No toda representacion de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ es suma directa de representaciones de dimensión finita!

Recordamos la construcción natural de todas las representaciones de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$:

$$\mathbb{C}[x,y] = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathbb{C}[x,y]_m = \bigoplus V_m$$

donde $\mathbb{C}[x,y]_m$=polinomios homogéneos de grado m, y las acciones de $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $H = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $Y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ están dadas por

$$\rho(X) = D_X := x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \rho(Y) = D_Y := y\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\rho(H) = D_H := x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

1. Verificar que efectivamente valen las reglas de conmutación

$$[D_H, D_X] = 2D_X$$
$$[D_H, D_Y] = -2D_Y$$
$$[D_X, D_Y] = D_H$$

2. Observar que si $W = \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ es una representación de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ con las mismas fórmulas de ρ.

3. Utilice $W \ni f = \frac{x}{y}$ para mostrar que X no actúa nilpotentemente en ninguna subrepresentación que contenga a f. Muestre que la mínima subrepresentación que contiene a f es $\mathbb{C}[f]_{>0} := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}f^n$. Calcule (la acción d)el Casimir en esa representación.

4. Sea $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Observar que, las mismas fórmulas de ρ definen una acción de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ en $C^\infty(U,\mathbb{C}) = \{f : U \to \mathbb{C} \text{ infintamente derivable}\}$. Muestre que, para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$f_\lambda := e^{\lambda \frac{y}{x}} \qquad \text{(ojo, ahora es } y/x\text{, no } x/y\text{)}$$

   es una auto-función de $\rho(X)$, de autovalor λ. En particular, salvo $\lambda = 0$, X no puede actuar nipotentemente en ninguna subrepresentación que contenga a f_λ, y f_λ no pertenece a ninguna subrepresentación de dimensión finita.

5. Consideramos $C^\infty(U)$ como en el item anterior y $f_\lambda = e^{\lambda \frac{y}{x}}$. Muestre que f_λ es autofuncón de $\rho(H)$. Podría ser autofunción de $\rho(Y)$? Halle la menor subrepresentación que contenga a f; describa los autovalores de $\rho(H)$ en esa subrepresentación. Calcule (la acción d)el Casimir en esa representación.