Sobre la base del módulo de Verma

Fijamos $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, Φ y Φ^+, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$

1. **Otra base en** $\mathrm{U}(\mathfrak{h})$

   $\mathfrak{h}$ es abeliana, sea $h_1, \ldots, h_\ell$ una base de $\mathfrak{h}$, entonces PBW dice que hay un iso de álgebras

   $$\mathrm{U}(\mathfrak{h}) \cong \mathbb{C}[h_1, \ldots, h_n]$$

   Si $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, y $\widetilde{h}_i := h - z_i$, muestre que

   $$\mathbb{C}[h_1, \ldots, h_n] = \mathbb{C}[\widetilde{h}_1, \ldots, \widetilde{h}_n]$$

   y que el conjunto

   $$\{(h_1 - z_1)^{n_1} \cdots (h_\ell - z_\ell)^{n_\ell} : (n_1, \ldots, n_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell\}$$

   es *otra* base de $\mathrm{U}(\mathfrak{h})$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

2. **Base en** I_λ

   Si fijamos $(\mathfrak{z}_1, \ldots, z_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$, definimos $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ via su valor en la base:

   $$\lambda(h_i) = z_i$$

   Recordar que para cada λ, se define

   $$I_\lambda = \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{U}(h_i - \lambda(h_i)) + \sum_{\alpha>0} \mathrm{U}E_\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{U}\widetilde{h}_i + \sum_{\alpha>0} \mathrm{U}E_\alpha$$

   Tomamos una base $\{E_{-\alpha}\}_{\alpha>0}$ de $\mathfrak{n}_-$ y $\{E_\alpha\}_{\alpha>0}$ de $\mathfrak{n}_+$ respectivamente. Las enumeramos $\{E_{-\alpha_1}, \cdots, E_{-\alpha_k}\}$ y $\{E_{\alpha_1}, \cdots, E_{\alpha_k}\}$.

   Muestre que una base de I_λ como $\mathbb{C}$ espacio vectorial está dada por la union de los siguientes conjuntos:

   $$\mathcal{B}_1 := \{E_{-\alpha_1}^{i_1} \cdots E_{-\alpha_k}^{i_k} \widetilde{h}_i^{j_1} \cdots \widetilde{h}_\ell^{j_\ell} E_{\alpha_1}^{n_1} \cdots E_{\alpha_k}^{n_k}\}$$

   donde $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}_0^k$, $(j_1, \ldots, j_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell$, y $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k$ con $(n_1, \ldots, n_k) \neq (0, \ldots, 0)$ (i.e. hay por lo menos un E_{α_i})

   unión

   $$\mathcal{B}_2 := \{E_{-\alpha_1}^{i_1} \cdots E_{-\alpha_k}^{i_k} \widetilde{h}_i^{j_1} \cdots \widetilde{h}_\ell^{j_\ell}\}$$

   donde $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}_0^k$, $(j_1, \ldots, j_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell$, con $(j_1, \ldots, j_\ell) \neq (0, \ldots, 0)$.

3. **Base del módulo de Verma.** Concluir que

$$\mathcal{B}_3 := \{E_{-\alpha_1}^{i_1} \cdots E_{-\alpha_k}^{i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_0^k\}$$

es una base de un complemento de I_λ en $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ como espacio vetorial, y por lo tanto

$$\mathcal{B} := \left\{\overline{E_{-\alpha_1}^{i_1} \cdots E_{-\alpha_k}^{i_k}} : (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_0^k\right\}$$

es una base de $V(\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})/I_\lambda$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

4. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathbb{C}Y \oplus \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}X$, concluir que el módulo de Verma $V(\lambda)$ es, como espacio vectorial, $\mathbb{C}[Y]$. Hacer el ejercicio 11 de la lista anterior de ejercicios `http://mate.dm.uba.ar/~mfarinat/materias/G/2021/EjPesos.pdf`

5. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $X_1 = E_{12}$, $X_2 = E_{23}$, $X_3 = [X_1, X_2] = E_{13}$. $H_1 = \mathrm{diag}(1, -1, 0)$, $H_2 = \mathrm{diag}(0, 1, -1)$, $Y_i = X_i^t$. Muestre que el módulo de Verma $V(\lambda)$ es el espacio vectorial con base

$$\{\overline{Y_1^{n_1} Y_2^{n_2} Y_3^{n_3}} : n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots\}$$

   a) Calcule $H \cdot \overline{Y_1 Y_2 Y_3} = \overline{H Y_1 Y_2 Y_3}$ (para $H = H_1$ y $H = H_2$) usando las reglas de conmutación y reemplazando

$$\overline{...H} \rightsquigarrow \overline{...\lambda(H)}$$

   b) Calcule de manera similar $H \cdot \overline{Y_1^2 Y_2^2}$

   c) Calcule $X_1 \cdot \overline{Y_1 Y_2 Y_3}$ usando las reglas de conmutación de X_1 con los Y_i's a partir de lo calculado antes y del reemplazo

$$\overline{...X} \rightsquigarrow 0$$