Álgebras nilpotentes

1. Mostrar que en dimensión 1 y 2 (sobre cualquier cuerpo) las únicas álgebras de Lie nilpotentes son la abeliana.

2. Mostrar que en dimensión 3, la única álgebra de Lie nilpotente no abeliana (a menos de iso) es
$$\mathfrak{h}_3(k) = kx \oplus ky \oplus kz$$
con $[x, y] = z$ (y z central).

3. Hallar todas las álgebras de Lie nilpotente de dimensión 4 sobre $\mathbb{R}$. Sugerencia: si $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n} = 4$ y $\mathfrak{n}$ es nilpotente, $\Rightarrow \mathfrak{z}(\mathfrak{n}) \neq 0$. Podría ser $\dim \mathfrak{z} = 1, 2, 4$. Analizar por separado las posibilidades de $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ (que nuevamente es un álgebra de Lie nilpotente), y ver las posibilidades de levantamiento de los corchetes de $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ a $\mathfrak{n}$.

4. Mostrar que niguna de las álgebras de Lie nilpotentes reales de dimensión 4 (salvo la abeliana) admite estructura compleja (de manera que el corchete sea $\mathbb{C}$-bilineal). Sugerencia: Cuáles son las álgebras nilpotentes complejas de dimensión (compleja) 2?

5. Si $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un morfismo de álgebras de Lie entonces $\phi(\mathfrak{g}^{(n)}) \subseteq \mathfrak{h}^{(n)}$ y $\phi(\mathfrak{g}_n) \subseteq \mathfrak{h}_n$. En particular, los automorfismos de $\mathfrak{g}$ preservan tanto la serie derivada como la serie central.

6. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ una derivación (i.e. verifica $D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$). Entonces
$$D(\mathfrak{g}^{(n)}) \subseteq \mathfrak{g}^{(n)}, \ \ D(\mathfrak{g}_n) \subseteq \mathfrak{g}_n$$

7. Si I es un ideal de $\mathfrak{g}$, muestre que
$$[\mathfrak{g}, I^{(n)}] \subseteq I^{(n)}, \ \ [\mathfrak{g}, I_n] \subseteq I_n$$

8. Muestre que si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son dos ideales nilpotentes de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ es un ideal nilpotente.

   Sugerencia: en una expresión del tipo
$$[a_1, [a_2, [\cdots, [b_1, [a_i, [b_2, [\cdots]] \cdots]]$$
   con $a_i \in \mathfrak{a}$ y $b_j \in \mathfrak{b}$, a los que aparezcan menos cantidad de veces, interpretarlos como derivaciones.

   En particular, existe el ideal nilpotente maximal, llamado el nilradical. Notar $\mathrm{nilrad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$, y si $\mathfrak{g}$ es soluble no nilpotente entonces $0 \subsetneq \mathrm{nilrad}(\mathfrak{g}) \subsetneq \mathfrak{g}$.

   a) Calcule el nilradical del álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2.

b) Calcule el nilradical de las álgebras de Lie de dimensión 3 que conozca.

c) Atención: Si $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es morfismo de álgebras de Lie, entonces no necesariamente vale $\phi(\mathrm{nilrad}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathrm{nilrad}(\mathfrak{h})$. Halle un contraejemplo. Sin embargo, si ϕ es un isomorfismo entonces $\phi(\mathrm{nilrad}(\mathfrak{g})) = \mathrm{nilrad}(\mathfrak{h})$.

Álgebras de grafo: ejemplos de 2-pasos nilpotentes

Sea (V, A) un grafo simple: V=cjto de vértices, A=aristas. Supondremos que no tiene loops de longitud 1 (auto-loops). Por ejemplo

$$\begin{tikzcd}
e_1 \arrow[r, dash] & e_2 \arrow[rr, dash] \arrow[dr, dash] & & e_3 \arrow[dl, dash] \\
& & e_4 & e_5
\end{tikzcd}$$

Sea k un cuerpo. Definimos el espacio vectorial con gneradores A y V:

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(V, A) = \big(\bigoplus_{e \in V} ke\big) \bigoplus \big(\bigoplus_{\alpha \in A} k\alpha\big)$$

Definiremos una estructura de Lie en este espacio vectorial.

1. A un grafo simple, siempre se lo puede *orientar*, (de varias maneras). Por ejemplo, se puede dar un orden total en los vértices, y se declara que las flechas van del más chico al más grande. En el ejemplo anterior:

$$\begin{tikzcd}
e_1 \arrow[r] & e_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & e_3 \arrow[dl] \\
& & e_4 & e_5
\end{tikzcd}$$

Para un grafo simple *orientado* $(V, \overrightarrow{A})$ se define la estructura de álgebra de Lie vía

$$[e, e'] = \alpha \text{ si } e \stackrel{\alpha}{\to} e'$$

$$[e, e'] = -\alpha \text{ si } e \stackrel{\alpha}{\leftarrow} e'$$

y

$$[e, e'] = 0 \text{ si no están unidos por una flecha}$$

A su vez, se define $[e, \alpha] = [\alpha, e] = 0 = [\alpha, \beta]$ para todo vértice e y flechas α, β. Este álgebra de Lie se denota $\mathfrak{n}(V, A)$.

En el ejemplo

$$\begin{tikzcd}
e_1 \arrow[r, "\alpha"] & e_2 \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"] & & e_3 \arrow[dl, "\delta"] \\
& & e_4 & e_5
\end{tikzcd}$$

$$[e_1, e_2] = \alpha,\ [e_1, e_3] = 0,\ [e_2, e_3] = \beta,\ [e_4, e_2] = -\gamma$$

etc.

2. Por ejemplo, $\mathfrak{h}_3 = kx \oplus ky \oplus kz$ con corchete $[x, y] = z$ y z central es el álgebra de grafo de
$$x \xrightarrow{z} y$$

3. Mostrar que las álgebras de grafo son 2-pasos nilpotente, es decir, $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$ (en particular, la propiedad de Jacobi es trivial de probar). Además, el centro coincide con el subespacio generado por las flechas y los vértices aislados. También, $\dim[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ = cantidad de flechas, por lo tanto, la cantidad de flechas y cantidad de aristas se calculan en términos de la estructura de Lie.

4. Si (V, A) es un grafo simple (no orientado), $(V, \vec{A})$ es el mismo grafo con una orientación asignada, y $(V, \vec{A}')$ es el mismo grafo con otra orientación, que coincide con la anterior salvo en la orientación de una sola flecha, e.g.:

$$\begin{tikzcd} e_1 \arrow[r] & e_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & e_3 \arrow[dl] = \vec{A}, \\ & & e_4 & e_5 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \vec{A}' = e_1 \arrow[r] & e_2 \arrow[rr] & & e_3 \arrow[dl] \\ & & e_4 \arrow[ul] & e_5 \end{tikzcd}$$

mostrar entonces que sus álgebras de Lie asociadas son isomorfas. Concluir que el tipo de isomorfismo de un álgebra asociada a un grafo simple orientado no depende de la orientación, y por lo tanto se suele hablar del "álgebra de Lie asociada al grafo simple".

5. Hacer una lista de grafos simples con

   a) 8 vértices y 1 aristas
   b) 7 vértices y 2 aristas
   c) 6 vértices y 3 aristas
   d) 5 vértices y 4 aristas
   e) 4 vértices y 5 aristas

   Notar que todas ellas son álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 10. Tomar algunas de ellas a gusto, y chequear si son isomorfas entre sí o no.

   Por ejemplo, las asociadas a