Elementos ad-diagonalizables y la forma de Killing

Los primeros 4 ejercicios siguen la presentacion y -parcialmente- la notación de Ingo Runkel `https://nms.kcl.ac.uk/benjamin.doyon/Lie2010Spring/Runkel.pdf`

Todas las álgebras de Lie aquí son de dimensión finita. Sea $\{T^a : a = 1, \ldots, n\}$ una base de $\mathfrak{g}$, definimos las constantes de estructura en esta base por

$$[T^a, T^b] = \sum_c f_c^{ab} T^c$$

1. Si $x \in \mathfrak{g}$, consideramos (ad_x) la matriz $n \times n$, con coefiientes $(\mathrm{ad}_x)_a^b$ definidos por
$$\mathrm{ad}_x(T^b) = [x, T^b] = \sum_a (\mathrm{ad}_x)_a^b T^a$$
verifique que $(\mathrm{ad}_{T^a})_c^b = f_c^{ab}$

2. (Álgebra lineal) Muestre que si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita y $b : V \times V \to \mathbb{C}$ es una forma bilineal simétrica no degenerada, entonces existe una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $b(v_i, v_j) = \delta_{ij}$

3. Sea $\mathfrak{g}$ ss compleja y $\{T^a\}$ una base tal que $\kappa(T^a, T^b) = \delta_{ab}$. Muestre que en esta base,
$$\kappa(T^a, [T^b, T^c]) = f_c^{ab}$$
y que, en esta base, f_c^{ab} es antisimétrico con respecto a todos los índices.

4. Sea $\mathfrak{g}$ ss compleja. El objetivo es probar que $x \in \mathfrak{g}$, *si* $\kappa(x, x) \neq 0$ *entonces* ad_x *es diagonalizable*.

   a) Si $\kappa(x, x) \neq 0$, muestre que se puede tomar una base $\{T^1, T^2, \ldots, T^n\}$ con $\kappa(T^a, T^b) = \delta_{a,b}$ y $x = \lambda T^1$.

   b) Muestre que, en esa base, $(\mathrm{ad}_x)_a^b$ es una matriz antisimétrica, y por lo tanto diagonalizable.

5. Sea $\mathfrak{g}$ ss compleja. Muestre que la condición "ad_x es diagonalizable" es genérica (es decir, contiene un abierto Zariski no vacío).

6. Sea $\mathfrak{g}$ ss compleja, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan, y $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ una raíz. Muestre que si $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, entonces ad_x *no es diagonalizable*, a menos que $x = 0$.

7. (Este ejercicio sólo está aquí como observación adicional del ejercicio 3.) Si V es una representaciónde una k-alg. de Lie $\mathfrak{g}$ y $\Theta : V \times V \times V \to \mathbb{C}$ trilineal, defina la noción de ser $\mathfrak{g}$-invariante. Si $\dim \mathfrak{g} < \infty$, se define $\Theta_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}^{\mathrm{ad}} \times \mathfrak{g}^{\mathrm{ad}} \times \mathfrak{g}^{\mathrm{ad}} \to k$ por
$$\Theta_{\mathfrak{g}}(x, y, z) := \kappa(x, [y, z])$$
Muestre que es trilineal $\mathfrak{g}$-invariante. **Hecho:** Si $\mathfrak{g}$ es *simple* compleja, toda forma trilineal $\mathfrak{g}$-invariante es un múltiplo complejo de ésta.