Aplicacion de la existencia de subálgebra de Cartan

Usamos que toda álgebra de Lie de dimension finita sobre $\mathbb{C}$ (sea ss o no) admite una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$. Ésta es nilpotente, y $\mathfrak{g}^{\mathrm{ad}}$, como $\mathfrak{h}$-módulo, se descompone como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\alpha=0} \oplus \Big(\bigoplus_{0 \neq \alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha \Big) = \mathfrak{h} \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \Big)$$

Lo aplicaremos a la clasificación de álgebra de Lie en dimensiones bajas. Aquí, todas las álgebras son sobre $\mathbb{C}$.

1. Si $\dim \mathfrak{h} = 2$ y $\mathfrak{h}$ es nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es abeliana.

2. Si $\dim \mathfrak{h} = 3$ y $\mathfrak{h}$ es nilpotente $\Rightarrow$ $\mathfrak{h}$ es abeliana, o bien $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}_3$ (la Heisenberg).

3. Sea $\mathfrak{g}$ de dimensión 3 no nilpotente y $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan. Entonces o bien $\dim \mathfrak{h} = 1$, o bien $\dim \mathfrak{h} = 2$, necesariamente $\mathfrak{h}$ es abeliana.

4. Sea $\mathfrak{g}$ de dimensión 3 tal que su subálgebra de Cartan es de dimensión 2. Escribimos
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$$
Necesariamente $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. Muestre $\exists$ una base $\{h_1, h_2, x\}$ y $0 \neq \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tales que
$$[h_1, h_2] = 0,\ [h_1, x] = \lambda x,\ [h_2, x] = \mu x$$
Incluso se puede tomar $\lambda = 1$. Notar que $\mathfrak{g}$ es soluble.

5. Sea $\mathfrak{g}$ de dimensión 3 tal que su subálgebra de Cartan es de dimensión 1. Entonces hay dos posibilidades

   a) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ con $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 2$. En ese caso, muestre que existe una base $\{h, x, y\}$ tal que
   $$[h, x] = \lambda x + y,\ \ [h, y] = \lambda y,\ \ [x, y] = 0$$
   Donde $\lambda \in \mathbb{C}$ puede tomarse $\lambda = 1$. Notar $\mathfrak{g}$ es soluble.

   b) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\beta$. En este caso, a su vez, hay a su vez dos posibilidades

      i) $\alpha = -\beta$. En este caso, existe una base $\{h, x, y\}$ y $c \in \mathbb{C}$ tal que
      $$[h, x] = 2x,\ \ [h, y] = -2y,\ \ [x, y] = ch$$
      En cualquier caso, c está determinado a menos de múltiplo.
      Si $c \neq 0$, entonces $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ y es simple.
      Si $c = 0$, $\mathfrak{g}$ es soluble.

      ii) $\alpha \neq -\beta$. En este caso, existe una base $\{h, x, y\}$ tal que
      $$[h, x] = x,\ \ [h, y] = \lambda y,\ \ [x, y] = 0$$
      En este caso, $\mathfrak{g}$ también es soluble. En partucular, si $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} = 3$ y $\mathfrak{g}$ es simple entonces necesariamente $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

6. Concluimos: si $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} = 3$, entonces o bien $\mathfrak{g}$ es abeliana, o bien es la Heisenberg, o bien es una de la lista de recién.