

GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE

EJERCICIOS - UBA - 1ER CUAT 2009

Formas reales

1. Sea \mathfrak{u} un álgebra de Lie real, y $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$ su complexificado. Mostrar que "conjugar", $(u + iv \mapsto u - iv)$ induce una involución $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, es decir, un automorfismo de orden dos de álgebras de Lie reales con $\sigma(\lambda u) = \bar{\lambda}\sigma(u) \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
2. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie compleja. Diremos que \mathfrak{u} es una *forma real* de \mathfrak{g} si \mathfrak{u} es un álgebra de Lie real, y $\mathfrak{g} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$ como álgebras de Lie complejas. Mostrar que \mathfrak{u} es forma real de \mathfrak{g} si y sólo si existe una involución σ en \mathfrak{g} (i.e. un automorfismo real de orden dos, conjugado-lineal) con $\mathfrak{u} \cong \mathfrak{g}^{\sigma} = \{x \in \mathfrak{g} : \sigma x = x\}$.
3. Sea V un espacio vectorial complejo y $\sigma : V \rightarrow V$ una involución. Muestre que
 - a) V^{σ} es un subespacio real, con $\dim_{\mathbb{R}} V^{\sigma} = \dim_{\mathbb{C}} V$.
 - b) $S \subseteq V$ es un subespacio *complejo* de la forma $S_0 \oplus iS_0 = \mathbb{C}.S_0$ con S_0 un subespacio *real* de V^{σ} si y sólo si $\sigma(S) \subseteq S$.
4. Muestre que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ y $\mathfrak{su}(2)$ son ambas formas reales de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Puede encontrar una involución $\sigma : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ tal que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{\sigma} = \mathfrak{su}(2)$?
5. Muestre que $\mathfrak{su}(p, q)$, $\mathfrak{su}(p+q)$, y $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ son formas reales de $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{C})$. y $\mathfrak{so}(p, q, \mathbb{R})$ y $\mathfrak{so}(p+q, \mathbb{R})$ son formas reales de $\mathfrak{so}(p+q, \mathbb{C})$.
6. Sea $\mathfrak{aff}(k) = kx \oplus ky$ el álgebra de Lie sobre k no abeliana de dimensión dos con corchete de Lie $[x, y] = y$. Como caso particular $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$ es un álgebra compleja de dimensión dos, y $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ la misma álgebra pero considerada como álgebra real es un álgebra de Lie real de dimensión real 4. Es cierto que $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})^{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$?
7. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie compleja, encuentre un isomorfismo explícito $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ como álgebra de Lie complejas (dos copias de \mathfrak{g} que conmutan entre sí).
8. El objetivo de este ejercicio es mostrar el isomorfismo $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{so}(1, 3, \mathbb{R})$
 - a) Sea $V = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} : X = X^*\}$ el espacio vectorial *real* de matrices hermíticas $n \times n$. Si $P \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ y $X \in V$ muestre que $PXP^* \in V$, y que esa acción define un morfismo de grupos reales $\rho : \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{R}}(V)$.
 - b) Mostrar que $\text{Ker}(\rho) = \{\lambda \text{Id} : 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}\}$ y que $\rho(\text{SL}(2, \mathbb{C})) = \rho(\text{GL}(2, \mathbb{C}))$. Concluya que $\text{Ker}(\rho|_{\text{SL}(n, \mathbb{C})}) = G_n \text{Id}$ donde G_n es el grupo de raíces n -esimas de 1.
 - c) Para $n = 2$, consideramos el isomorfismo de \mathbb{R} -espacios vectoriales $\mathbb{R}^4 \cong$ matrices hermíticas 2×2 dado por $(t, x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} t - z & x + iy \\ x - iy & t + z \end{pmatrix}$. Tomando determinante muestre que la imagen de $\rho|_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ en realidad está contenida en $\text{SO}(1, 3, \mathbb{R})$.
 - d) Muestre que la aplicación $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}(1, 3, \mathbb{R})$ es un difeo local (y por lo tanto su diferencial en la identidad es un isomorfismo).
 - e) Encuentre la fórmula explícita del morfismo de grupos $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}(1, 3, \mathbb{R})$, y una fórmula explícita del morfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{so}(1, 3, \mathbb{R})$.