ÁLGEBRAS DE LIE

PATRICIA JANCSA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
MAYO DE 2007

Índice

Introducción

Sólo a modo de introducción y motivación, daré una breve información sobre los orígenes de la teoría de Lie conforme a la concepción del matemático noruego Sophus Lie (1849-1925), aunque el enfoque de este curso y de mi propio estudio sean casi totalmente algebraicos.

En el año 1873, Sopuhs Lie dio origen a las ideas que conformaron esta teoría con aportes posteriores de Weyl, Cartan, Chevalley, Killing, Serre, Harish-Chandra y otros. Lie se dedicaba a estudiar ecuaciones diferenciales. Se dio cuenta de que las simetrias de una ecuacion diferencial daban lugar a grupos con parametros (lo que hoy llamamos un grupo de Lie). El grupo de Lie que deja invariante una ecuacion diferencial actúa sobre el conjunto de soluciones de dicha ecuación.

Los "grupos´´ ó conjuntos con los que Lie trabajaba en general no eran grupos en realidad, dado que la estructura de grupo estaba definida solo localmente cerca de la identidad. De todos modos, todo grupo local admite un álgebra de Lie, que a su vez se integra a un grupo global. Pero fue recien Weyl (1924) que tuvo la idea de estudiar sistemáticamente grupos definidos globalmente. Los aportes fundamentales que realizó Lie fueron el asociar a cada grupo de transformaciones continuas un álgebra de Lie y el establecer una aplicación del álgebra de Lie al grupo de Lie a través de los grupos monoparamétricos.

El nexo entre grupos y álgebras de Lie es una transformacion infinitesimal: es decir, un elemento del grupo de Lie de la forma $Id + \epsilon.X$, donde ϵ es pequeño. En el lenguaje moderno, una transformación infinitesimal está caracterizada por el elemento X, que no es otra cosa que un elemento del espacio tangente al grupo en la identidad, $T_e(G)$.

1. Grupos de Lie

Definición 1.1. *Un* **grupo de Lie** *es una variedad diferenciable sobre $\mathbb{R}$ munida de una estructura de grupo tal que la operación $G \times G \to G$, $(\sigma\ ,\tau) \mapsto \sigma.\tau^{-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$.*

Consecuencias de la definición son las siguientes:

1. Que la operación anterior sea $\mathcal{C}^\infty$ es equivalente a que las operaciones del grupo $\tau \mapsto \tau^{-1}$ y $(\sigma\ ,\tau) \mapsto \sigma.\tau$ sean funciones $\mathcal{C}^\infty$. En efecto, la primera se obtiene como composición de $\tau \mapsto (e,\ \tau) \mapsto e.\tau^{-1}$ y la segunda como $(\sigma,\tau) \mapsto (\sigma,\tau^{-1}) \mapsto \sigma.(\tau^{-1})^{-1} = \sigma.\tau$.

2. El elemento identidad de un grupo de Lie G forma él mismo un grupo de Lie; en efecto, por ser un subgrupo cerrado, admite una estructura diferenciable y es cerrado para las operaciones de grupo. Por otra parte, las componentes conexas de un grupo de Lie son todas difeomorfas entre sí.

   Consideraré solamente grupos de Lie *reales* y por variedad diferenciable entiendo diferenciable de clase $\mathcal{C}^\infty$. Un grupo de Lie complejo es, en particular, una variedad diferenciable compleja (es decir, analítica compleja).

   Por otra parte, las álgebras de Lie serán reales ó complejas; más aún, en general, serán complejas porque son más fáciles de abordar y porque la teoría de espacios raíces está pensada sobre $\mathbb{C}$. A grupos de Lie reales le corresponden álgebras de Lie reales y a grupos de Lie complejos le corresponden álgebras de Lie complejas.

   En la definición de variedad diferenciable estamos asumiendo la hipótesis de ser N_2: *2do axioma de numerabilidad: la topología tiene una base numerable*); aunque en realidad, todo grupo de Lie con una cantidad numerable de componentes es necesariamente N_2 como consencuencia de que todo grupo de Lie conexo es unión numerable de potencias de un entorno cualquiera de la identidad.

Ejemplo 1.2. 1. $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie con la suma de vectores.

2. El conjunto de los números complejos no nulos $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}/0$ es un grupo de Lie con la multiplicación usual de números complejos.

   En efecto, pensamos a $\mathbb{C}^*$ como a un abierto de $\mathbb{R}^2$, una variedad real de dimensión 2. Si $z = a + bi, w = a' + b'i \in \mathbb{C}$, la multiplicación $(z, w) \mapsto aa' - bb' + (ab' + ba')i$ que es diferenciable. Análogamente, la operación de invertir $0 \neq z \mapsto z^{-1}$ es la función $a + bi \mapsto \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$ que es polinomial en las coordenadas.

3. El círculo unidad $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ (pensado como subgrupo cerrado de $\mathbb{C}^*$) es un grupo de Lie con la multiplicación inducida de $\mathbb{C}^*$.

4. Si $G,\ H$ son grupos de Lie, entonces $G \times H$ es un grupo de Lie con la estructura de variedad producto y la estructura de grupo de producto directo, es decir coordenada a coordenada

$$(g, h).(g', h') = (g.g', h.h')$$

   para todo $(g, h) \in G \times H$.

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el toro n-ésimo $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$, el producto de n copias de S^1 es un grupo de Lie con la estructura producto.

6. La variedad $GL(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices $n \times n$ no singulares reales es un grupo de Lie con la multiplicación usual de matrices.

   En efecto, es un abierto de $\mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$, por lo tanto hereda su estructura diferenciable. Las operaciones de grupo son claramente diferenciables pues: $A \mapsto A^{-1}$ es una función racional en los coeficientes, por la fórmula de la matriz cofactor, es decir, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\mathrm{Cof}(A)^t$ donde si denotamos por A_{ij} a la matriz que se obtiene de A eliminando la fila i y la columna j, $(\mathrm{Cof}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$. Esta función es diferenciable justamente porque el denominador no se anula en las matrices inversibles.

   La multiplicación de dos matrices es diferenciable, en efecto, $(A, B) \mapsto A.B$ es polinomial en los coeficientes, i.e. $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

7. El conjunto $T_n(\mathbb{R})$ de las matrices $n \times n$ reales triangulares (i.e. todas las entradas por debajo de la diagonal iguales a cero), no singulares es un grupo de Lie con la multiplicación usual de matrices. (Como antes, se identifica con un abierto de $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ó se lo puede pensar como un cerrado de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$).

8. Denotemos por $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ al conjunto de los números reales no nulos y consideremos K la variedad producto $K = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Con una estructura de grupo definida por

$$(s, t).(s', t') = (s.s', st' + t)$$

K resulta un grupo de Lie; el *grupo de los movimientos afines de* $\mathbb{R}$, donde identificamos al elemento (s,t) con el movimiento afín $x \mapsto (sx+t)$; entonces la multilplicación en K es composición de movimientos afines.

9. Consideremos K la variedad producto $K = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ con la estructura de grupo definida por
$$(A,v).(A',v') = (A.A', Av'+v)$$
K resulta un grupo de Lie; el *grupo de los movimientos afines de* $\mathbb{R}^n$, donde identificamos al elemento (A,v) de K con el movimiento afín $x \mapsto (Ax+v)$; entonces la multilplicación en K es composición de movimientos afines.

Podemos pensar a K como a un subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$ en virtud de
$$K \cong \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & v \\ \hline 0\cdots 0 & 1 \end{array} \right) \text{ tales que } A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ v \in \mathbb{R}^{n\times 1}. \right\}$$

Con esta identificación es claro que el conjunto es cerrado por la operación de grupo; en efecto:
$$\left(\begin{array}{c|c} A & v \\ \hline 0\cdots 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A' & v' \\ \hline 0\cdots 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A.A' & Av'+v \\ \hline 0\cdots 0 & 1 \end{array} \right)$$

De manera más general, si consideramos cualquier grupo de Lie G en lugar de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ y cualquier representación de dimensión finita V de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ en lugar de $\mathbb{R}^n$, obtenemos
$$K = G \rtimes V = \{(g,v) \text{ con el producto de grupo dado por } (g,v).(g',v') = (gg', g.v'+v)\}$$
un grupo de Lie, donde $(g,v) \mapsto g.v'$, de $G \times V \mapsto V$ es la acción de G en V.

Las definiciones de homomorfismos y subgrupos son las usuales:

Definición 1.3. *Una función $\phi : G \to H$ entre grupos de Lie se dice un homorfismo de grupos de Lie si es un homorfismo de grupos abstractos y es diferenciable. Decimos que es un isomorfismo si además es un difeomorfismo. Un isomorfismo de G en sí mismo se llama un automorfismo.*

En el caso particular de un homorfismo de un grupo de Lie $G \to H = \mathrm{Aut}(V)$, con V un espacio vectorial, ó $H = GL(n,\mathbb{R})$ ó $GL(n,\mathbb{C})$, se dice que (H,ϕ) es una representación de G.

Un par (H,ϕ) se dice un subgrupo de un grupo de Lie G si H es un grupo de Lie en sí mismo, (H,ϕ) es una subvariedad de G y ϕ es un homorfismo de grupos (abstractos).

(H,ϕ) se dice un subgrupo cerrado de G si además $\phi(H)$ es cerrado en G.

Teorema 1.4. *Si $\phi : G \to H$ entre grupos de Lie es un homorfismo continuo, entonces es $\mathcal{C}^\infty$.*

Los grupos de Lie son una de las clases más importantes de las variedades diferenciables.

La importancia del estudio de las álgebras para los grupos de Lie es que:

Las categorías de álgebras de Lie de dimensión finita y la de grupos de Lie conexos y simplemente conexos son equivalentes.

Más aún, todo grupo de Lie conexo y simplemente conexo está completamente determinado, salvo isomorfismo, por su álgebra de Lie de campos de vectores invariantes a izquierda. El estudio de los grupos se reduce en gran medida al estudio de sus álgebras de Lie. El nexo entre un grupo y su álgebra de Lie está dado por la función *exponencial* que es una generalización de la exponencial de matrices.

Los ejemplos más importantes son grupos y álgebras de Lie de matrices; más aún, toda álgebra de Lie tiene un representante en su clase de isomorfismo que es un álgebra de Lie de matrices.

2. Álgebras de Lie

2.1. Definiciones

Definición 2.1. *Sea k un cuerpo. Un* **álgebra de Lie** *sobre k es un k-espacio vectorial $\mathfrak{g}$ munido de una operación bilineal $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, llamada corchete de Lie, que satisface:*

1. *Antisimetría: $[x, y] = -[y, x]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.*
2. *Identidad de Jacobi: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$.*

En general y, salvo que se diga explícitamente lo contrario, consideraré sólo álgebras de Lie de dimensión finita.

Ejercicio 2.2. Probar que la condición de *antisimetría*: $[x, y] = -[y, x]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, es equivalente a la identidad $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, salvo en el caso en que $char\ (k) = 2$.

Ejercicio 2.3. Probar que si dim $(\mathfrak{g}) = 2$, la identidad de Jacobi se obtiene inmediatamente de la condición de *antisimetría*.

Ejercicio 2.4. Probar que el miembro izquierdo de Jacobi es igual a un medio de la suma cíclica, es decir, si denotamos por $J(x, y, z)$ al miembro izquierdo de Jacobi, entonces

$$J(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]]$$

Para completar las definiciones correspondientes a la categoría de álgebras de Lie, necesitamos las siguientes:

Definición 2.5. *Sean $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ álgebras de Lie sobre k; un* **homomorfismo de álgebras de Lie**, *es decir, un morfismo en la categoría de álgebras de Lie, es una transformación lineal $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ tal que $\phi[x, y] = [\phi x, \phi y]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Un* **isomorfismo de álgebras de Lie** *es un homomorfismo de álgebras de Lie que admite un homomorfismo inverso.*

Ejercicio 2.6. Probar que un isomorfismo de álgebras de Lie es un homomorfismo de álgebras de Lie que es a la vez un isomorfismo lineal, es decir, que la inversa de un morfismo de Lie es automáticamente de Lie.

Definición 2.7. *Una* **subálgebra de Lie** *$\mathfrak{h}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ cerrado por el corchete, es decir, tal que $[h, h'] \in \mathfrak{h}$ para todo $h, h' \in \mathfrak{h}$.*
Un **ideal** *de $\mathfrak{g}$ es un subespacio $\mathfrak{I}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[g, h] \in \mathfrak{I}$ para todo $h \in \mathfrak{I}$, $g \in \mathfrak{g}$, es decir, tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{I}] \subset \mathfrak{I}$.*

Notar que un ideal es automáticamente una subálgebra de Lie.
Un álgebra de Lie se dice **abeliana** si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, es decir, si todos los corchetes son cero. En particular, todo espacio vectorial puede ser considerado como un álgebra de Lie abeliana.

Ejercicio 2.8. Sea $\mathfrak{I}$ un ideal de $\mathfrak{g}$. Probar que el espacio cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{I}$ admite la estructura standart de álgebra de Lie dada por

$$[x+\mathfrak{I}, y+\mathfrak{I}] = [x,y]+\mathfrak{I}$$

es decir, $[\overline{x},\overline{y}] = \overline{[x,y]}$.
Probar que la proyección al cociente es un morfismo de Lie por construcción y, en consecuencia, todo ideal es el núcleo de algún morfismo de Lie.

Ideales y morfismos de álgebras de Lie tienen muchas propiedades en común con ideales y morfismos de anillos. Una de ellas es la construcción de homomorfismos $\mathfrak{g}/\mathfrak{I} \to \mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{I}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$: si un homomorfismo $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ satisface $\mathfrak{I} \subset \ker(\pi)$ entonces π se factoriza por la proyección al cociente y define un morfismo de $\mathfrak{g}/\mathfrak{I} \to \mathfrak{h}$.
(En efecto, si $\mathfrak{I} \subset \ker(\pi)$ el map $\overline{\pi}(\overline{x}) = \pi(x)$ está bien definido pues $\overline{x} = \overline{x'} \iff x - x' \in \mathfrak{I} \subset \ker(\pi)$, then $\pi(x) = \pi(x')$ hence $\overline{\pi}(\overline{x}) = \overline{\pi}(\overline{x'})$ y el diagrama conmuta: $\pi = \overline{\pi} \circ p$).

Otra propiedad es la correspondencia uno a uno de ideales de $\mathfrak{g}$ que contienen a $\mathfrak{I}$ e ideales de $\mathfrak{g}/\mathfrak{I}$, dada por la proyección al cociente.

Finalmente, es importante mencionar el *Segundo Teorema de Isomorfismo*: sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ ideales en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tales que $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{g}$ entonces

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$$

donde el morfismo de la derecha es $\overline{a+b} \mapsto \overline{b}$.

2.2. Ejemplos

1. Todo espacio vectorial es un álgebra de Lie con el corchete nulo, un *álgebra de Lie abeliana*.

2. Un espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{x,y\}$ es un álgebra de Lie con el corchete $[x,x] = 0$, $[y,y] = 0$, $[x,y] = y$ y los demás corchetes se obtienen extendiendo bilinealmente.

   Ejercicio 2.9. Toda álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 es isomorfa a ésta.

3. $(\mathbb{R}^3, \times)$ es un álgebra de Lie real, compacta isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$, el álgebra de Lie de $\mathrm{SU}(2)$, llamada la forma compacta de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. La estructura de álgebra de Lie es la sgte:

   $$(\mathbb{R}^3, \times) = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w \text{ con el corchete } [u,v] = w,\ [v,w] = u,\ [w,u] = v$$

   que se extiende bilinealmente.

   Recordar que $SU(2) \cong S^3$, la esfera o los cuaterniones de norma 1, en efecto:

   Todo número cuaternión se puede escribir como e identificar con:

   $$x + y\mathbf{i} + u\mathbf{j} + v\mathbf{k} = x + y\mathbf{i} + (u + v\mathbf{i})\mathbf{j} = z + w\mathbf{j}$$

   con $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ o bien $z, w \in \mathbb{C}$. Se puede utilizar una representación matricial de $\mathbb{H}$ dada por

   $$x + y\mathbf{i} + u\mathbf{j} + v\mathbf{k} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x + y\mathbf{i} & u + \mathbf{i}v \\ -u + v\mathbf{i} & x - y\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

   Equivalentemente

   $$z + w\mathbf{j} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$$

En virtud de esta identificación,

$$\begin{aligned} SU(2) &= \left\{ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \text{ tales que } MM^* = Id,\ \det(M) = 1 \right\} && (1) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \text{ tales que } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} && (2) \\ &\cong \{x + y\mathbf{i} + u\mathbf{j} + v\mathbf{k} \text{ tales que } x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1\} \cong S^3. && (3) \end{aligned}$$

$S^3 \subset \mathbb{H}$ es decir, la estructura de grupo (subgrupo cerrado de H) se obtiene de esta identificación. Hay un morfismo de grupos $S^3 \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ dado por $\alpha \mapsto (v \mapsto ava^{-1})$ donde $v \in \mathbb{R}\mathbf{i} \oplus \mathbb{R}\mathbf{j} \oplus \mathbb{R}\mathbf{k}$, los cuaterniones puros, son el ortogonal a $\mathbb{R}$ en $\mathbb{H}$, se identifica con $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual. El núcleo de este morfismo (ejercicio!) es ± 1, por lo tanto la aplicación es abierta (S^3 tiene la misma dimensión que $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$), luego sobreyectiva (pues $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ es conexo).

Como S^3 es simplemente conexo, se sigue que $\mathrm{SU}(2)$ es un covering de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, y de paso $\pi_1(\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Más adelante, prodremos recuperar $\mathfrak{su}(2)$ como el espacio tangente en la identidad a $\mathrm{SU}(2)$ (y por lo anterior, también será isomorfa al álgebra de Lie tangente a $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$).

4. Sea $\mathfrak{g}$ un **álgebra asociativa**; entonces $\mathfrak{g}$ admite una estructura *standart* de álgebra de Lie con el corchete definido por el commutador $[x,y] = xy - yx$. Claramente, $[x,x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Probemos la identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned} & [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] \\ = \; & x[y,z] - [y,z]x + y[z,x] - [z,x]y + z[x,y] - [x,y]z \\ = \; & xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz - zxy + xzy + zxy - zyx - xyz + yxz \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

5. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ el **álgebra asociativa de todas las matrices** $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$; si se define el corchete de Lie como en el ejemplo 2, $[X,Y] = XY - YX$, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ resulta un álgebra de Lie. Veremos luego que debe su nombre al hecho de ser *el álgebra de Lie del grupo de Lie lineal general* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$.

6. Sea $\mathfrak{g} = \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ el **álgebra asociativa de todas las transformaciones $\mathbb{K}$-lineales de V en V**, que resulta un álgebra de Lie con el corchete $[X,Y] = XY - YX$. El ejemplo anterior es un caso particular de este, si se piensa a $V = \mathbb{K}^n$.

7. **Producto semidirecto.** Sean $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{g}$ álgebras de Lie sobre $\mathbb{K}$ y sea $\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{l})$ un homomorfismo de álgebras de Lie. Se define el álgebra de Lie *producto semidirecto de* $\mathfrak{l}$ *y* $\mathfrak{g}$ y se denota $\mathfrak{l} \rtimes \mathfrak{g}$ al álgebra de Lie cuyo espacio vectorial subyacente es $\mathfrak{l} \rtimes \mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{g}$ y la estructura de Lie está dada por
$$[(l,g),(l',g')] = ([l,l'] + \pi(g)l' - \pi(g')l +, [g,g'])$$
Con esta estructura de álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$ resulta una subálgebra de Lie de $\mathfrak{l} \rtimes \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{l}$ un ideal de $\mathfrak{l} \rtimes \mathfrak{g}$.

Recíprocamente, si un álgebra de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{g}$ donde $\mathfrak{l}$ es un ideal y $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{h}$, entonces $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}$ es una derivación para todo x, en particular, para todo $x \in \mathfrak{g}$, la cual define un homomorfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{l})$. Se obtiene $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{l} \rtimes \mathfrak{g}$, el *producto semidirecto de* $\mathfrak{l}$ *y* $\mathfrak{g}$.

8. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$. Recordemos que un campo de vectores $\mathcal{C}^\infty$ es un operador sobre funciones $\mathcal{C}^\infty(U)$ de la forma $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $a_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

   La antisimetría y la identidad de Jacobi son consecuencias de las propiedades del álgebra asociativa generada por los campos de vectores (con las operaciones de suma y composición usuales).

   Este ejemplo se puede generalizar a toda variedad $\mathcal{C}^\infty$ M, es decir, el espacio vectorial real de todos los campos de vectores $\mathcal{C}^\infty$ sobre M admite una estructura de álgebra de Lie con el corchete definido por el commutador $[X,Y] = X \circ Y - Y \circ X$, donde $X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ en la forma $X(f)(p) = X_p(f)$. Se prueba que el corchete de dos campos da otro campo, dado que las derivadas de orden mayor que dos se cancelan.

9. El **álgebra de Lie de un grupo de Lie**. Sea G un grupo de Lie.

   Si $f : G \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{C}^\infty$ y $g \in G$, consideremos la *traslación a izquierda* dada por $f_g(x) = f(g.x)$ para todo $x \in G$. Un campo de vectores $\mathcal{C}^\infty$ se dice *invariante a izquierda* si $X_{gp}f = dL_g(X_p)(f)$ para toda $f \in C^\infty(G)$ y $g, p \in G$. Los campos vectoriales invariantes a izquierda forman una subálgebra de Lie del álgebra de Lie todos los campos $\mathcal{C}^\infty$, y esta es la que se llama el **álgebra de Lie de** G, denotada por $\mathfrak{g}$. Podemos pensar a cada campo $\mathcal{C}^\infty$ invariante a izquierda como a una familia de vectores tangentes X_g, uno para cada $g \in G$, y como $X_g = dL_g X_e$, el campo X está determinado por X_e. Veremos que la función $X \to X_e$, con e el elemento identidad del grupo de Lie es un isomorfismo de espacios vectoriales de $\mathfrak{g}$ en $T_e(G)$, el espacio tangente a la identidad de G. Finalmente, $T_e(G)$ hereda la estructura de álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ vía este isomorfismo.

10. El álgebra de Lie de un grupo de Lie de matrices: Hay un **teorema de Ado** que afirma que toda álgebra de Lie admite una representación fiel en $\mathfrak{gl}(n\mathbb{R})$ para algún n; es decir que en cada clase de isomorfismo de álgebras de Lie, hay un representante que es un álgebra de Lie de matrices. Por lo tanto, estos ejemplos son los más importantes.

    Además, el teorema de Ado implica que para toda álgebra de Lie, existe un único grupo de Lie conexo y simplemente conexo que la tiene como álgebra de Lie. Más aún, existe una

    $\boxed{\text{correspondencia 1-1 entre subgrupos conexos de un grupo de Lie y subálgebras de su álgebra de Lie}}$

    en virtud de la cual, a subgrupos normales le corresponden ideales del álgebra de Lie (es decir, si $H \subset G$ es un subgrupo de Lie conexo que es normal como subgrupo abstracto, entonces $\mathfrak{h}$ =Lie (H) es un ideal de $\mathfrak{g}$).

Los enunciados precisos son los siguientes:

2.3. El álgebra de Lie de un grupo de Lie

Definición 2.10. *Sea G un grupo de Lie y sea $g \in G$. Se definen las traslaciones a izquierda y a derecha como los difeomorfimos de G dados por*

$$l_g(\tau) = g.\tau$$

$$r_g(\tau) = \tau.g$$

Se dice que un campo de vectores X (no necesariamente $\mathcal{C}^\infty$ a priori) en G es **invariante a izquierda** *si para todo $g \in G$*

$$\boxed{dl_g \circ X = X \circ l_g}$$

Proposición 2.11. *Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ el espacio vectorial de todos los campos de vectores invariantes a izquierda, entonces*

1. *$\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial real y $\mathfrak{g} \cong T_e(G)$ vía el isomorfismo $\mathfrak{g} \mapsto T_e(G)$ dado por $\alpha(X) = X_e$.*
2. *Los campos de vectores invariantes a izquierda son diferenciables.*
3. *El corchete de dos campos invariantes a izquierda es invariante a izquierda.*
4. *$\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie que identificamos con $T_e(G)$, el álgebra de Lie de G.*

Demostración. 1. Es claro que $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial real y que α es lineal; veamos que $\alpha(X)$ es inyectiva: Supongamos que $\alpha(X) = \alpha(Y)$, entonces para cada $g \in G$ $dl_g(X(e)) = dl_g(Y(e))$, luego

$$X(g) = dl_g(X(e)) = dl_g(Y(e)) = Y(g)$$

Por lo tanto, $X = Y$. Veamos que α es suryectiva: sea $x \in T_e(G)$, definamos un campo de vectores invariantes a izquierda por $X(g) = dl_g(x)$ para cada $g \in G$; entonces $\alpha(X) = x$.

2. Veamos que los campos de vectores invariantes a izquierda son diferenciables: es suficiente probar que para todo campo invariante X y toda $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, $X(f)$ es $\mathcal{C}^\infty$, para lo cual queremos ver ésta se escribe como una composición de funciones $\mathcal{C}^\infty$. En efecto, para cualquier $g \in G$

$$Xf(g) = X_g(f) = dl_g(X_e)f = X_e(f \circ l_g) \ (*)$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que $(*)$ es $\mathcal{C}^\infty$. El truco es tomar un campo $\mathcal{C}^\infty$ Y tal que $Y_e = X_e$ y reemplazar a X por Y en la anterior. Definamos inclusiones $\mathcal{C}^\infty$ de $G \to G \times G$ por

$$i_e^1(g) = (g, e) \text{ e } i_\tau^2(g) = (\tau, g)$$

Finalmente, si m es la multiplicación en el grupo, veamos que $(*)$ coincide con la función $((0, Y)(f \circ m)) \circ i_e^1$ que es $\mathcal{C}^\infty$ por ser composición de funciones $\mathcal{C}^\infty$. En lo siguiente, notemos que $(0, Y)$ es un campo $\mathcal{C}^\infty$ en $G \times G$, el primer paso es la evaluación de un campo en una función aplicada en el punto (g, e) y las n primeras derivadas parciales son cero:

$$\begin{aligned} ((0, Y)(f \circ m)) \circ i_e^1(g) &= (0, Y)_{(g,e)}(f \circ m) = 0_e(f \circ m \circ i_e^1) + Y_e(f \circ m \circ i_g^2) \\ &= Y_e(f \circ m \circ i_g^2) = X_e(f \circ m \circ i_g^2) = X_e(f \circ l_g) = (*) \end{aligned}$$

3. "El corchete de dos campos invariantes a izquierda es invariante a izquierda" es consecuencia del siguiente hecho más general: *Sea $\phi : G \to H$ un difeomorfismo entre variedades diferenciables G y H, sean X e Y campos de vectores de vectores en G, entonces*

$$d\phi[X, Y] = [d\phi X, d\phi Y]$$

aplicado a $G = H$ grupo de Lie, $\phi = l_g$ la traslación a izquierda por un $g \in G$ arbitrario.

$\square$

Por lo tanto, $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie que identificamos con $T_e(G)$, el álgebra de Lie de G.

Teorema 2.12. 1. *Si (H, ϕ) es un subgrupo de un grupo de Lie G y denotamos por $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ a las álgebras de Lie de G y H, respectivamente, entonces $d\phi$ es un isomorfismo entre $\mathfrak{h}$ y la subálgebra de Lie $d\phi(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{g}$.*

2. *Todo subgrupo abstracto H que es un subconjunto cerrado de G admite una única estructura de variedad diferenciable que lo convierte en un subgrupo de Lie de G.*

3. *Sea $\phi : G \to H$ es un homorfismo de grupos de Lie, sea $A = \ker(\phi)$ y $\mathfrak{a} = \ker(d\phi)$; entonces $A = \ker(\phi)$ es un subgrupo de Lie cerrado de G con álgebra de Lie $\mathfrak{a}$.*

4. **[Ado]** *Toda álgebra de Lie admite una representación fiel en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ para algún n; es decir que en cada clase de isomorfismo de álgebras de Lie, hay un representante que es un álgebra de Lie de matrices.*

5. **Corolario del teorema de Ado** *Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, existe un único grupo de Lie conexo y simplemente conexo G tal que $\mathfrak{g}$ =Lie (G) (i.e. que la tiene como álgebra de Lie). Más aún, existe una correspondencia 1-1 entre subgrupos conexos de un grupo de Lie conexo y simplemente conexo y subálgebras de su álgebra de Lie, en virtud de la cual, a subgrupos normales le corresponden ideales del álgebra de Lie (es decir, si $H \subset G$ es un subgrupo de Lie conexo que es normal como subgrupo abstracto, entonces $\mathfrak{h}$ =Lie (H) es un ideal de $\mathfrak{g}$).*

6. *Un grupo topológico N_2, localmente euclídeo admite a lo sumo una estructura $\mathcal{C}^\infty$ que lo convierte en un grupo de Lie.*

7. *Sea G un grupo de Lie y sea H un subgrupo cerrado* abstracto *de G, entonces H admite una única estructura $\mathcal{C}^\infty$ que lo convierte en un subgrupo de Lie de G (necesariamente con la topología relativa, dado que (H, ϕ) subgrupo cerrado si y sólo si ϕ es un imbedding.)*

   (Recordar: ϕ es un imbedding si es un homeo: $H \mapsto \phi(H) \subset G$ en la topología relativa).

Ejemplo 2.13. Existen subgrupos de Lie de un grupo de Lie G que no cerrados, es decir, que no están embebidos en G. Una manera de construir un ejemplo es la siguiente: Sea $G = T^2 = S^1 \times S^1$ y sea el subgrupo abstracto u subgrupo de Lie $H = (e^{i2\pi t}, e^{ia2\pi t})$, con $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, a fijo y $t \in \mathbb{R}$; la irracionalidad de a implica que $H \cong (\mathbb{R}, +)$, donde $H = (H, .)$ con . el producto coordenada a coordenada y $G = (G, .)$. El isomorfismo es

$$\phi : \mathbb{R} \to H$$

$$t \mapsto (e^{i2\pi t}, e^{ia2\pi t})$$

La función ϕ es claramente suryectiva. El núcleo de ϕ es $\{t \in \mathbb{R} \ : e^{i2\pi t} = 1 = e^{ia2\pi t}\}$; pero $e^{i2\pi t} = 1$ implica $t \in \mathbb{Z}$ y $e^{ia2\pi t} = 1$ implica $at \in \mathbb{Z}$, contradicción salvo $t = 0$; por lo tanto, ϕ es inyectiva.
H no es cerrado en G pues si lo fuera, $\mathbb{R}$ sería compacto porque G es compacto.

Ejercicio: demostrar que la imagen de ϕ es densa en G.

2.4. El álgebra de Lie de un grupo de Lie de matrices y subejemplos:

Observación 2.14. Recordemos que todo espacio vectorial real admite una estructura natural de variedad diferenciable y que su espacio tangente en cualquier punto se puede identificar con el mismo espacio.

Ejemplo 2.15. El álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ es el álgebra de Lie del grupo de Lie lineal general $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$.

Demostración. Por un lado, sabemos que $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ es un álgebra de Lie; por otro, sabemos que el grupo de Lie $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ tiene su álgebra de Lie $\mathfrak{g} \cong T_e(G) \cong$ espacio de campos invariantes a izquierda. Se quiere demostrar que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$. Sea X un campo de vectores de la forma

$$X(p) = \sum_{ijk} x_{ik}(p) a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_p$$

para cada $p \in G$, donde $a_{kj} \in \mathbb{R}$. Notar que un campo tal es invariante y que

$$X(\mathrm{Id}) = \sum_{ijk} x_{ik}(\mathrm{Id}) a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_{\mathrm{Id}} = \sum_{ijk} \delta_{ik} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_{\mathrm{Id}} = \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_{\mathrm{Id}}$$

Dado que todo campo invariante queda completamente determinado por su valor en la identidad, todo campo invariante a izquierda es de esta forma para una única elección de coeficientes a_{ij}.

El isomorfismo es la composición siguiente

$$X \mapsto X(\mathrm{Id}) = \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_{\mathrm{Id}} \mapsto A = (a_{ij})$$

Denotemos por X_A al úinco campo invariante a izquierda asociado a la matriz A. Falta probar que

$$[X_A, X_B] = X_{[A,B]}$$

(a la izquierda es el corchete de Lie de campos, y $[A,B]$ el conmutador de matrices). Utilizamos la fórmula del corchete de Lie

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$$

donde f, g son funciones, X e Y campos. Obtenemos

$$\begin{aligned} [X_A, X_B] &= \left[\sum_{ijk} x_{ik} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \sum_{i'j'k'} x_{i'k'} b_{k'j'} \frac{\partial}{\partial x_{i'j'}}\right] \\ &= \sum_{ijki'j'k'} x_{ik} a_{kj} x_{i'k'} b_{k'j'} \left[\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \frac{\partial}{\partial x_{i'j'}}\right] \\ &\quad + \sum_{ijki'j'k'} x_{ik} a_{kj} b_{k'j'} \frac{\partial(x_{i'k'})}{\partial x_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_{i'j'}} - \sum_{ijki'j'k'} x_{i'k'} b_{k'j'} a_{kj} \frac{\partial(x_{ik})}{\partial x_{i'j'}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \end{aligned}$$

utilizando $\dfrac{\partial(x_{ik})}{\partial x_{i'j'}} = 1$ si $i = i', j = k'$ y 0 en otro caso, idem para $\dfrac{\partial(x_{ik})}{\partial x_{i'j'}}$,

$$= \sum_{ijki'j'k'} x_{ik}a_{kj}b_{k'j'}\delta_{ii'}\delta_{jk'}\frac{\partial}{\partial x_{i'j'}} - \sum_{ijki'j'k'} x_{i'k'}b_{k'j'}a_{kj}\delta_{ii'}\delta_{kj'}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

la suma en i' y en k' colapsan y se reemplaza $i' = i$ y $k' = j$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{ijkj'} x_{ik}a_{kj}b_{jj'}\frac{\partial}{\partial x_{ij'}} - \sum_{ijkk'} x_{ik'}b_{k'k}a_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \quad (\Rightarrow \textstyle\sum_j a_{kj}b_{jj'} = (AB)_{kj'})\\
&= \sum_{ikj'} x_{ik}(AB)_{kj'}\frac{\partial}{\partial x_{ij'}} - \sum_{ijk'} x_{ik'}(BA)_{k'j}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \quad (\Rightarrow k' \leftrightarrow k, j' \leftrightarrow j)\\
&= \sum_{ikj} x_{ik}[A,B]_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\\
&= X_{[A,B]}
\end{aligned}$$

□

2.5. La Función Exponencial

Sea G un grupo de Lie, X un campo de vectores $\mathcal{C}^\infty$ y $c(t)$ una curva $\mathcal{C}^\infty$; recordemos que c es una curva integral del campo X si $c'(t) = X_{c(t)}$ para todo t. Sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, se define **la función exponencial** $\exp : \mathfrak{g} \to G$ por: para cada $v \in T_e(G)$, sea X el único campo invariante a izquierda tal que $X_e = v$; sea $c(t)$ la única curva integral del campo X tal que $c(0) = e$ (en particualr, $c'(0) = v$); se define

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$
$$\exp(v) = c(1).$$

Si se quiere definir a $\exp : \mathfrak{g} \to G$ donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de campos invariantes a izquierda, se toma $v = X_e$ y la definición es la misma.

Teorema 2.16. *Sea X en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G, entonces*

1. *Sea $c(t)$ la única curva integral del campo X tal que $c(0) = e$ (en particular, $c(1) = \exp(X)$), entonces $c(t) : t \mapsto \exp(tX)$ es el único subgrupo 1-paramétrico tal que la derivada en $t = 0$ es X_e, (subgrupo 1-paramétrico es un morfismo de grupos de Lie de $\mathbb{R}$ en G).*
2. $\exp(tX). \exp(t'X) = \exp((t + t')X)$.
3. $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$.
4. *$\ell_\sigma \circ \exp_X$ es la única curva integral de X que toma el valor σ en cero; en particular, los campos invariantes a izquierda son completos.*
5. *Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo de grupos de Lie, entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\phi"] & G \\
\mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\phi"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 2.17. La función exponencial $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ es la exponencial usual de matrices

$$e^A = \mathrm{Id} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

Dada una matriz $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ el morfismo 1-paramétrico $c : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ esta dado por $c(t) = e^{tA}$; en consecuencia $\exp(A) = e^A$.

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{g}$ a quien le corresponde $X_e = A$ para alguna matriz A y $X_g = g.A$ para todo $g \in G$.

Ya sabemos por el teorema anterior quien es el álgebra de Lie de G, o sea, quiénes son los campos invariantes a izquierda en $G = \mathrm{GL}(n\mathbb{C})$. Hay que ver que

- Buena definición de e^{tA}:

  Para la buena definición, la convergencia de la exponencial se basa en las desigualdades $||A^n|| \leq ||A||^n$ y la convergencia absoluta de la serie de números reales positivos $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}||A||^n$.

- $c(t) := e^{tA}$ es la única curva integral del campo X asociado a una matriz dada A y que $c(0) = \mathrm{Id}$, lo cual es evidente. Calculemos $c'(t)$:

  Con técnica similar se puede demostrar la diferenciabilidad con respecto a t de la función e^{tA} y probar $c'(t) = \frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A = X_{c(t)}$. Identificando a $T_e\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ con $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, la formula anterior nos dice que *la curva e^{tA} es la curva integral del (único) campo invariante a izquierda que tiene valor A en la identidad.*

$\square$

Proposición 2.18. *(a) Sea G un subgrupo de Lie cerrado de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, entonces*

$$\mathfrak{g} = \left\{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) : e^{tA} \in G \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\right\}$$

(b) Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (o en particular en $\mathbb{R}^{n\times n}$), entonces $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}A}$; $\det e^{tA} = 1$ para todo t si y sólo si $\mathrm{tr}A = 0$.

(c) $(e^{tA})^{-1} = (e^{tA})^{\mathbf{t}}$ para todo real t si y sólo si $A + A^t = 0$.

(d) $(e^{tA})^{-1} = (\overline{e^{tA}})^{\mathbf{t}}$ para todo real t si y sólo si $A + \overline{A}^t = 0$.

Demostración. (b) Si A es triangular inferior el lema es claro. En el caso general podemos cambiar a A por su forma de Jordan. En efecto, sea J la forma de Jordan de A, y sea $C \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tal que $A = CJC^{-1}$. Aplicando el caso especial a J y usando que el determinante y la traza son invariantes por conjugación obtenemos

$$\det(e^A) = \det(e^{CJC^{-1}}) = \det(Ce^JC^{-1}) = \det(e^J) = e^{\mathrm{tr}J} = e^{\mathrm{tr}C^{-1}AC} = e^{\mathrm{tr}A}$$

(c) $(e^{tA})^{-1} = (e^{tA})^{\mathbf{t}} \iff e^{t(A+A^{\mathbf{t}})} = \mathrm{Id}\ \forall t$.
Derivando con respecto a t: $(e^{t(A+A^{\mathbf{t}})})' = 0 = (A + A^{\mathbf{t}})e^{t(A+A^{\mathbf{t}})}$, y como $e^{t(A+A^{\mathbf{t}})}$ es inversible se sigue que $A + A^{\mathbf{t}} = 0$.

(d) es análogo a (c). $\square$

Corolario 2.19. *El álgebra de Lie del grupo de Lie de las matrices de determinante uno es el espacio de las matrices de traza cero.*

La siguiente es una lista de ciertos grupos de Lie de matrices con sus correspondientes álgebras de Lie. Todos estos grupos se obtienen "exponenciando"subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ó de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. La estructura de grupo de Lie la obtienen como subgrupos cerrados de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ó $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Tabla de grupos de Lie con sus correspondientes álgebras de Lie

a) Grupo lineal general real	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : \det \neq 0\}$.
b) Grupo lineal general complejo	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$.
c) Grupo lineal especial real	$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$.
d) Grupo lineal especial complejo	$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : \det A = 1\}$.
e) Grupo ortogonal real	$\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : A^{-1} = A^t\}$
f) Grupo ortogonal especial real	$\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$
g) Grupo ortogonal complejo	$\mathrm{O}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : A^{-1} = A^t\}$
h) Grupo ortogonal especial complejo	$\mathrm{SO}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \cap \mathrm{O}(n,\mathbb{C})$
i) Grupo unitario	$\mathrm{U}(n) = \left\{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : A^{-1} = \overline{A}^t\right\}$
j) Grupo unitario especial	$\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$
a′) Álgebra de Lie general real	$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) := \mathbb{R}^{n\times n}$.
b′) Álgebra de Lie general compleja	$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) := \mathbb{C}^{n\times n}$.
c′) Álgebra de matrices reales de traza cero	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}$.
d′) Álgebra de matrices complejas de traza cero	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}$.
e′f′) Álgebra ortogonal especial real = matrices reales antisimétricas	$\mathfrak{o}(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : A + A^t = 0\}$.
g′h′) Álgebra ortogonal especial compleja = matrices complejas antisimétricas	$\mathfrak{o}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : A + A^t = 0\}$
i′) Álgebra de matrices antihermíticas	$\mathfrak{u}(n) = \left\{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : A + \overline{A}^t = 0\right\}$.
j′) Álgebra de matrices antihermíticas de traza cero	$\mathfrak{su}(n) = \left\{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : A + \overline{A}^t = 0, \mathrm{tr}(A) = 0\right\}$.

- Los grupos $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$ y $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ son grupos complejos, mientras $\mathrm{U}(n)$ y $\mathrm{SU}(n)$ son grupos reales. Pero se los puede ver también como subgrupos reales de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ que a su vez es un subgrupo real de $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$.

- Si $d = \det A$, $A^{-1} = A^t \Rightarrow d^{-1} = d \Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = \pm 1$ (no importa $d \in R$ o $d \in \mathbb{C}$). En cambio $A^{-1} = \overline{A}^t \Rightarrow d^{-1} = \overline{d} \Rightarrow |d^2| = 1$.

- $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ y $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$. Ambas son reductivas: $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$

- $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ es compleja simple de tipo A_{n-1}, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ y $\mathfrak{su}(n,\mathbb{R})$ son reales de tipo A_{n-1}, ambas formas reales de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

- $\mathfrak{u}(n) \cong \mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(n) = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{u},\mathfrak{u}]$ es reductiva, no semisimple.

- $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ es simple, su tipo dependende de la paridad de n: $\mathfrak{so}(2k+1,\mathbb{C})$ es de tipo B_k y $\mathfrak{so}(2k,\mathbb{C})$ es de tipo D_k.

- Los grupos $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{U}(n)$ y $\mathrm{SU}(n)$ son compactos, los demás no.

- Los grupos $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, y $\mathrm{SU}(n)$ son conexos mientras que $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$ y $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, no lo son. Los grupos $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ y $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$ tienen dos componentes conexas: los elementos de determinante 1 ó -1. El grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ también tiene dos componentes conexas, los de determinante positivo o negativo.

Más ejemplos de exponenciales

Ejemplo 2.20. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ y $A \in \mathfrak{g}$, entonces $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)} > 0$, por lo tanto $\exp(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})) = \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : \det(g) > 0\} = \mathrm{GL}(n\mathbb{R})_0$, la componente conexa de la identidad. En cambio, $\exp(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})) = \mathrm{GL}(n\mathbb{C})$.

Ejemplo 2.21. Determinemos el grupo de Lie conexo tal que su álgebra de Lie sea $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & x \\ 0 & t & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Como

$$\exp \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $e^t > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, podemos ver que $\exp(\mathfrak{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & * \\ 0 & \lambda & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \lambda > 0 \right\}$.

Ejemplo 2.22. Determinemos el grupo de Lie conexo tal que su álgebra de Lie sea $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t & x \\ -t & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y, \right.$

Como

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$$

$$= \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2k} + \sum_{n=2k+1} \frac{1}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2k+1}$$

$$= \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=2k+1} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos ver que $\exp(\mathfrak{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & * \\ -\sin(t) & \cos(t) & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Teorema: Sea A un subgrupo abstracto de un grupo de Lie G y sea $\mathfrak{a}$ un subespacio de $\mathfrak{g}$. Sean U y V entornos abiertos de $0 \in \mathfrak{g}$ y de $e \in G$, respectivamente, difeomorfos vía la función exponencial, tales que

$$\exp(U \cap \mathfrak{a}) = V \cap A$$

entonces A es un subgrupo de Lie de G con la topología relativa, $\mathfrak{a}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ y es el álgebra de Lie de A. Es decir, la exponencial es un difeomorfismo local.

3. La representación adjunta y la forma de Killing

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo K (cualquiera), y consideramos $V = \mathfrak{g}^{\mathrm{ad}}$ la representación adjunta, es decir, para cada $x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}_x = [x, -] : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es un endomorfismo de $\mathfrak{g}$.

Recordamos que $\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{[x,y]}$ (es decir, $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es morfismo de Lie, es decir, ad define efectivamente una representación). En efecto, para todo $z \in \mathfrak{g}$ tenemos

$$(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_x)(z) = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

que por la identidad de Jacobi es igual a

$$[[x, y], z] = \mathrm{ad}_{[x,y]}(z)$$

Definimos la *forma de Killing* de $\mathfrak{g}$ como la forma bilineal κ:$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ dada por

$$\kappa(x, y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y)$$

La traza calculada como endomorfismo de $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 3.1. Sea $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & a \\ 0 & t & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : t, a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Si llamamos

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $B = \{x, y, z\}$ es una base de $\mathfrak{g}$, los corchetes están determinados por $[z, x] = x$, $[z, y] = y$, $[x, y] = 0$. En la base B, la transformación lineal $[z, -] = \mathrm{ad}_z$ tiene matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la transformación lineal $\mathrm{ad}_x = [x, -]$ tiene matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y finalmente $\mathrm{ad}_y = [y, -]$ tiene matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. De esto se sigue

$$\kappa(z, z) = 2,$$

$$0 = \kappa(z, x) = k(x, z) = \kappa(z, y) = \kappa(y, z) = \kappa(x, x) = \kappa(x, y) = \kappa(y, x) = \kappa(y, y)$$

3.1. Propiedades de la forma de Killing

1. Es simétrica: $\kappa(x,y)=\kappa(y,x)$ para todo $x,y\in\mathfrak{g}$.

2. Es invariante por la acción adjunta: $\kappa([x,y],z)=\kappa(x,[y,z])$ para todo $x,y,z\in\mathfrak{g}$.

3. Es invariante por isomorfismos de álgebras de Lie, es decir, si $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ es un isomorfismo de álgebras de Lie, entonces $\kappa_{\mathfrak{g}}(x,y)=\kappa_{\mathfrak{h}}(\phi(x),\phi(y))$ (escribimos κ_g y κ_h simplemente para enfatizar que calculamos la forma de Killing correspondiente al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ o $\mathfrak{h}$ respectivamente).

4. Extiende escalares: Si E es una extensión de cuerpos de $\mathbb{K}$, $\mathfrak{u}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$, consideramos $\mathfrak{g}=E\otimes_{\mathbb{K}}\mathfrak{u}$ como álgebra de Lie sobre E con el corchete
$$[\lambda\otimes x,\mu\otimes y]=\lambda\mu\otimes[x,y],$$
entonces $\kappa(\lambda\otimes x,\mu\otimes y)=\lambda\mu\otimes\kappa(x,y)$.

Demostración. 1. Para cualquier par de endomorfismos $f,g:V\to V$ vale $\mathrm{tr}(fg)=\mathrm{tr}(gf)$, en particular
$$\kappa(x,y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_x)=\kappa(y,x)$$
2.
$$\kappa([x,y],z)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{[x,y]}\mathrm{ad}_z)=\mathrm{tr}((\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y-\mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_x)\mathrm{ad}_z)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_z)-\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_z)$$
Por otra parte
$$\kappa(x,[y,z])=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_{[y,z]})=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x(\mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_z-\mathrm{ad}_z\mathrm{ad}_y))=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_z)-\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_z\mathrm{ad}_y)$$
Si comparamos las dos expresiones, los terminos que suman son evidentemente identicos, para los términos que restan utilizamos la propiedad cíclica de la traza:
$$\mathrm{tr}(ABC)=\mathrm{tr}(CAB)=\mathrm{tr}(BCA)$$
3. Tomamos $x_1,\dots,x_n$ una base de $\mathfrak{g}$, y para $\mathfrak{h}$ tomamos la base $\phi(x_1),\dots,\phi(x_n)$. Si calculamos $[x_i,x_j]=\sum_k a_{ij}^k x_k$, por ser ϕ un morfismo de Lie
$$\phi([x_i,x_j])=[\phi(x_i),\phi(x_j)]$$
y por lo tanto
$$[\phi(x_i),\phi(x_j)]=\sum_k a_{ij}^k\phi(x_k)$$
Es decir, las constantes de esctructura son *idénticas* (para esa elección de bases), luego la matriz de ad_x en la base B *coincide* con la matriz de $\mathrm{ad}_{\phi(x)}$ en la base $\phi(B)$ para todo $x,y\in\mathfrak{g}$, de lo que se sigue que las trazas $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y)$ y $\mathrm{tr}(ad_{\phi x}\mathrm{ad}_{\phi y})$ son iguales, pues son trazas del producto de dos matrices iguales.

4. Aqui notamos que si $x_1,\dots x_n$ es una base de $\mathfrak{u}$ como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces $1\otimes x_1,\dots,1\otimes x_n$ es una base de $\mathfrak{g}=E\otimes_{\mathbb{K}}\mathfrak{u}$ como E-espacio vectorial. La cuenta es similar a (3), utilizando estas base. $\square$

3.2. La forma de Killing de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ y otros ejemplos

Ejemplo 3.2. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ es el álgebra de Lie *real* con generadores

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

los corchetes están dados por $[h,x] = 2x$, $[h,y] = -2y$, $[x,y] = h$. Las matrices (en la base $\{x,h,y\}$ de ad_x, ad_h, ad_y son

$$\mathrm{ad}_x = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La tabla para la forma de Killing es

$$\kappa(h,h) = 8, \quad \kappa(x,x) = 0, \quad \kappa(y,y) = 0$$

$$\kappa(h,x) = 0, \quad \kappa(h,y) = 0, \quad \kappa(x,y) = 4$$

Es decir, la matriz de la forma bilineal en esta base es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notamos que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ admite el automorfismo $x \leftrightarrow y$, $h \leftrightarrow -h$, por lo tanto de antemano sabemos que tiene que valer $\kappa(x,x) = \kappa(y,y)$, y $\kappa(h,x) = -\kappa(h,y)$, lo que reduce un poco los cálculos. Tambien vemos en la matriz, que ad_x (y por lo tanto ad_y) es nilpotente, y en consecuencia su cuadrado también, y por lo tanto tienen traza cero, es decir $\kappa(x,x) = 0$. Resulta obvio de la expresion matricial de ad_h que $\kappa(h,h) = 8$. Queda entonces de ejercicio calcular efectivamente $\kappa(h,x)$ y $\kappa(x,y)$.

Si calculamos la forma de Killing de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ como álgebra de Lie *compleja*, podemos utilizar nuevamente la base $\{x,h,y\}$ y evidentemente obtenemos las mismas matrices.

Ejercicio 3.3. Calcular la forma de Killing de $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t & a \\ -t & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Ver que es semidefinida negativa, luego el algebra de Lie no puede ser isomorfa a la de traslaciones afines y dilataciones.

Ejercicio 3.4. Calcular la forma de Killing de $\mathfrak{su}(2)$ y ver que es definida negativa. Concluir que $\mathfrak{su}(2)$ no es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. (Sin embargo, sus complexificaciones son isomorfas.)

4. Álgebras de Lie nilpotentes y solubles

4.1. Ideales

Proposición 4.1. *Sean $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$ ideales de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces $\mathfrak{I}+\mathfrak{J}$, $\mathfrak{I}\cap\mathfrak{J}$ e $[\mathfrak{I},\mathfrak{J}]$ son ideales de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Los dos primeros son claros; probemos que $[\mathfrak{I}, \mathfrak{J}]$ es ideal de $\mathfrak{g}$:

$$[\mathfrak{g}, [\mathfrak{I}, \mathfrak{J}]] \subseteq [[\mathfrak{g}, \mathfrak{I}], \mathfrak{J}]] + [\mathfrak{I}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{J}]] \subseteq [\mathfrak{I}, \mathfrak{J}]] + [\mathfrak{I}, \mathfrak{J}] = [\mathfrak{I}, \mathfrak{J}].$$

□

Ejemplos de Ideales

1) El centro de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es el ideal $\mathfrak{z} = \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0 \forall y \in \mathfrak{g}\}$.
2) El conmutador $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ como consecuencia de la proposición 4.1.

4.2. Álgebras de Lie nilpotentes y solubles: teoremas de Lie, Engel y Cartan

Sucesión de conmutadores de $\mathfrak{g}$

La *sucesión de conmutadores de* $\mathfrak{g}$ es la sucesión de ideales definidos recursivamente por

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \text{ y para cada } j \geq 1, \quad \mathfrak{g}^{j+1} := [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^j].$$

Se obtiene la sucesión descendente

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{j-1} \supseteq \mathfrak{g}^j \supseteq \ldots$$

Por inducción se prueba que cada $\mathfrak{g}^j$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ como consecuencia de la proposición 4.1. Se dice que $\mathfrak{g}$ es **soluble** si $\mathfrak{g}^j = 0$ para algún j.
Notar que si $0 \neq \mathfrak{g}$ es soluble, entonces admite un ideal abeliano no nulo, a saber, el último $\mathfrak{g}^j$ no nulo de la cadena de conmutadores.

La *sucesión central descendente de* $\mathfrak{g}$ es la sucesión de ideales definidos recursivamente por

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \text{ y para cada } j \geq 1, \quad \mathfrak{g}_{j+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j].$$

Se obtiene la sucesión descendente

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}_{j-1} \supseteq \mathfrak{g}_j \supseteq \ldots$$

Por inducción se prueba que cada $\mathfrak{g}_j$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ como consecuencia de la proposición 4.1. Se dice que $\mathfrak{g}$ es **nilpotente** si $\mathfrak{g}_j = 0$ para algún j.
Notar que si $0 \neq \mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces el centro de $\mathfrak{g}$ es no trivial; en efecto, el último $\mathfrak{g}_j$ no nulo de la cadena central está contenido en el centro de $\mathfrak{g}$. Por inducción se ve que para todo j, $\mathfrak{g}^j \subseteq \mathfrak{g}_j$; entonces si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, $\mathfrak{g}$ es soluble.

Ejemplo 4.2. El álgebra de Lie de las matrices triangulares superiores

$$\mathfrak{s} = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : A_{ij} = 0 \text{ para todo } i > j\}$$

es soluble.

El álgebra de Lie de las matrices triangulares superiores *estrictas*

$$\mathfrak{n} = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : A_{ij} = 0 \text{ para todo } i \geq j\}$$

es nilpotente.

Proposición 4.3. *Toda subálgebra y todo cociente de un álgebra de Lie soluble (respectivamente, nilpotente) es soluble (respectivamente, nilpotente).*

Demostración. Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Lie de un álgebra de Lie soluble $\mathfrak{g}$, entonces para los ideales de la cadena de conmutadores obtenemos por inducción que $\mathfrak{h}^j \subseteq \mathfrak{g}^j$ para todo j. Dado que $\mathfrak{g}$ es soluble, existe un j tal que $\mathfrak{g}^j = 0$, pero entonces $\mathfrak{h}^j \subseteq \mathfrak{g}^j = 0$, es decir que $\mathfrak{h}$ es soluble.

Sea $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}$ un epimorfismo de álgebras de Lie, entonces $\pi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{l}$ y $\pi(\mathfrak{g}^j) = \mathfrak{l}^j$ para todo j. Por lo tanto, si $\mathfrak{g}^j = 0$ para algún j, entonces $\mathfrak{l}^j = 0$, es decir que $\mathfrak{l}$ es soluble. En particular, si $\mathfrak{I}$ es un ideal de un álgebra de Lie soluble $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{l} := \mathfrak{g}/\mathfrak{I}$, lo anterior implica que $\mathfrak{l}$ es soluble.

Las demostraciones para el caso nilpotente son completamente análogas y se dejan como ejercicio. $\square$

Proposición 4.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ y $\mathfrak{a}$ un ideal de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}$ son solubles, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.*

Demostración. Dado que $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ es soluble, existe un j tal que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^j = 0$. Sea $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ la proyección al cociente, sabemos que

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^j = \pi(\mathfrak{g})^j = \pi(\mathfrak{g}^j)$$

luego $\mathfrak{g}^j \subseteq \ker(\pi) = \mathfrak{a}$. Por otra parte, dado que $\mathfrak{a}$ es soluble, $\mathfrak{a}^k = 0$ para algún k, entonces $\mathfrak{g}^{j+k} = (\mathfrak{g}^j)^k \subseteq \mathfrak{a}^k = 0$. Por lo tanto, $\mathfrak{g}$ es soluble. $\square$

Proposición 4.5. *Toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{K}$ admite un único ideal soluble maximal. Este ideal se llama el radical soluble de $\mathfrak{g}$ y se denota por $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$.*

Demostración. Es suficiente demostrar que si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales solubles de $\mathfrak{g}$ entonces $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ es un ideal soluble: se define

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = \sum_{\mathfrak{I} \text{ soluble}} \mathfrak{I}.$$

Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ ideales solubles de $\mathfrak{g}$ y sea $\mathfrak{I} := \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$; sabemos que $\mathfrak{I}$ es un ideal en virtud de la proposición. Veamos que es soluble. Por el *Segundo Teorema de Isomorfimos*

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$$

En virtud de la proposición 4.4, concluimos que $\mathfrak{I}$ es soluble pues $\mathfrak{a}$ es soluble y $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ es soluble por la proposición 4.3. $\square$

Definición 4.6. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se dice simple si $\mathfrak{g} \neq 0$, $\mathfrak{g}$ es no abeliana y $\mathfrak{g}$ no admite ideales propios (es decir que los únicos ideales de $\mathfrak{g}$ son el ideal nulo y $\mathfrak{g}$).*

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se dice semisimple si $\mathfrak{g} \neq 0$ no admite ideales solubles no nulos, es decir, si $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = 0$.

Proposición 4.7. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces*

1. *Si $\mathfrak{g}$ es simple, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.*
2. *Si $\mathfrak{g}$ es simple, $\mathfrak{g}$ es semisimple.*
3. *Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, su centro es trivial.*

Demostración. 1. Sea $\mathfrak{g}$ simple, entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$ pues $\mathfrak{g}$ es no abeliana; pero $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, luego $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

2. Si $\mathfrak{g}$ es simple, el $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ es un ideal que es cero ó bien igual a todo $\mathfrak{g}$. Si $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$, $\mathfrak{g}$ es semisimple. Si $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble y necesariamente la cadena de conmutadores de $\mathfrak{g}$ debe descender; por lo tanto, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ pero $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$, lo cual contradice la simplicidad de $\mathfrak{g}$.

3. El centro de $\mathfrak{g}$ es un ideal abeliano, en particular, soluble. Por lo tanto, $\mathfrak{z} \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ pues $\mathfrak{g}$ es semisimple.

$\square$

Proposición 4.8. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ es semisimple.*

Demostración. Sea $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ la proyección al cociente; si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ es un ideal soluble, entonces $\mathfrak{a} := \pi^{-1}(\mathfrak{h})$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$ pues $\mathfrak{a}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{h}$ (proposición 4.4). Por lo tanto, $\mathfrak{a} \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ y concluímos que $\mathfrak{h} = \pi(\mathfrak{a}) = 0$. $\square$

Ejemplo 4.9. Toda álgebra de Lie de dimensión 1 ó 2 es soluble. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión 3 entonces $\mathfrak{g}$ es o bien simple o bien soluble.

Demostración. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión 1, $\mathfrak{g}$ es abeliana, en particular es soluble. Si $\dim \mathfrak{g} = 2$ y $\mathfrak{g}$ no es abeliana, entonces es isomorfa al álgebra de Lie con generadores x e y y corchete $[x, y] = x$, que es soluble.

Si $\dim \mathfrak{g} = 3$ y $\mathfrak{g}$ no es simple, entonces existe un ideal propio $\mathfrak{h}$. La dimensión de $\mathfrak{h}$ es 1 ó 2, luego $\mathfrak{h}$ es soluble, y $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ también es 1 ó 2, por lo tanto $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ también es soluble. Por la Proposición 4.4 concluimos que $\mathfrak{g}$ es soluble. $\square$

Ejemplo 4.10. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ y $\mathfrak{su}(2)$ son álgebras de Lie reales simples de dimensión 3, no isomorfas entre sí. Sobre $\mathbb{C}$ se tiene $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, la única álgebra de Lie simple compleja de dimensión 3, salvo isomorfismo.

Ejercicio 4.11. Probar que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ es simple para todo cuerpo de característica distinta de dos. Si $\mathrm{ch}(\mathbb{K}) = 2$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ es nilpotente.

Teorema 4.12. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es soluble si y sólo si existe una sucesión de subálgebras de Lie de la forma*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_{n-1} \supseteq \mathfrak{a}_n = 0$$

tal que cada $\mathfrak{a}_{i+1}$ es un ideal en $\mathfrak{a}_i$ y $\dim(\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}) = 1$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble, existe una sucesión de subálgebras de la forma

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{j-1} \supseteq \mathfrak{g}^j = 0$$

Para cada par $\mathfrak{g}^k \supseteq \mathfrak{g}^{k+1}$ tal que $\dim(\mathfrak{g}^k/\mathfrak{g}^{k+1}) \geq 2$ interpolemos subespacios $\mathfrak{a}_i^k$ en la sucesión de modo tal que

$$\mathfrak{g}^k \supseteq \mathfrak{a}_1^k \supseteq \mathfrak{a}_2^k \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{k+1}$$

y $\dim(\mathfrak{a}_i^k/\mathfrak{a}_{i+1}^k) = 1$.
Los subespacios $\mathfrak{a}_i$ resultan subálgebras pues $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] \subseteq [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^k] \subseteq \mathfrak{g}^{k+1} \subseteq \mathfrak{a}_i$; además, cada $\mathfrak{a}_{i+1}$ es un ideal en $\mathfrak{a}_i$ pues $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{i+1}] \subset [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^k] \subset \mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{a}_{i+1}$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que en $\mathfrak{g}$ existe una sucesión de subálgebras de Lie de la forma

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_{n-1} \supseteq \mathfrak{a}_n = 0$$

con las propiedades del enunciado. Consideremos la sucesión de commutadores de $\mathfrak{g}$; veamos por inducción que $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{a}_k$ para cada k.

Sea $x_k \in \mathfrak{a}_k$ tal que $\mathfrak{a}_k = \mathbb{K}x_k \oplus \mathfrak{a}_{k+1}$; por construcción, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0$, luego

$$\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_0] = [\mathbb{K}x_0 \oplus \mathfrak{a}_1, \mathbb{K}x_0 \oplus \mathfrak{a}_1] = [\mathbb{K}x_0, \mathfrak{a}_1] + [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1] \subseteq \mathfrak{a}_1$$

Por inducción, se prueba que cada $\mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{a}_k$ para cada $0 \leq k \leq n$. Finalmente, dado que $\mathfrak{a}_n = 0$, obtenemos que $\mathfrak{g}^n = 0$; por lo tanto, $\mathfrak{g}$ es soluble.

□

Teorema 4.13 (Lie). *Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie soluble, $0 \neq V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}V$ una representación de $\mathfrak{g}$. Si $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, entonces existe un autovector simultáneo $0 \neq v \in V$ para todo $\pi(x)$ con $x \in \mathfrak{g}$. Más generalmente, si $\mathbb{K}$ no es algebraicamente cerrado pero todos los $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, tienen todos sus autovalores en $\mathbb{K}$, la misma conclusión es válida.*

Corolario 4.14. *Sean $\mathfrak{g}$, V, π y $\mathbb{K}$ como en el teorema de Lie, entonces existe una base de V tal que todas las matrices de $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, son triangulares superiores.*

Demostración. Por inducción en la dimensión, usando el teorema de Lie. Si $0 \neq v_1$ un autovector simuláneo para todos los $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, entonces $\mathbb{K}v_1$ es una subrepresentación. Consideremos la representación $V/\mathbb{K}v_1$ y apliquémosle la hipótesis inductiva. Tenemos una base $\{\overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$ de $V/\mathbb{K}v_1$, de la cual se obtiene una base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V que tiene las propiedades requeridas. □

Teorema 4.15. Descomposición de Levi. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero, entonces existe una subálgebra de Lie semisimple $\mathfrak{s}$ tal que $\mathfrak{g} \cong \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \rtimes \mathfrak{s}$.*

Para álgebras de Lie nilpotentes se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.16 (Engel). *Sea $0 \neq V$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y sea $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}_K(V)$ una subálgebra de Lie de endomorfismos nilpotentes de V, entonces*

1. *$\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente.*

2. *Existe $0 \neq v \in V$ tal que $x(v) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

3. *Existe una base B de V tal que la matriz de x en la base B es triangular superior estricta para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Teorema 4.17. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.*

a) Criterio de solubilidad de Cartan: $\mathfrak{g}$ es soluble si y solo si $\kappa(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \equiv 0$.

b) Criterio de semisimplicidad de Cartan: $\mathfrak{g}$ es semisimple si y solo si κ es no degenerada.

Demostración. Veamos primero que el $\mathrm{rad}(\kappa) \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$, donde $\mathrm{rad}(\kappa) = \{x \in \mathfrak{g} : \kappa(x, y) = 0$ para todo $y \in \mathfrak{g}\}$ es el radical de la forma de Killing.

Dado que κ es invariante por ad, $\mathrm{rad}(\kappa)$ es un ideal, en efecto, para todo $x \in \mathrm{rad}(\kappa)$ y para todo $y, z \in \mathfrak{g}$

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]) = 0$$

entonces $[x, y] \in \mathrm{rad}(\kappa)$. Más aún, la cuenta anterior para $x, y, z \in \mathrm{rad}(\kappa)$ muestra que $\mathrm{rad}(\kappa)$ es un ideal soluble por el criterio de solubilidad de la parte a). En particular, obtenemos que $\mathrm{rad}(\kappa) \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$.

Probaremos b) utilizando a):

($\Rightarrow$) Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, $0 = \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \supseteq \mathrm{rad}(\kappa)$, por lo tanto κ es no degenerada.

($\Leftarrow$) Si $\mathfrak{g}$ no fuera semisimple, $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$ y $\mathfrak{g}$ admitiría un ideal abeliano $\mathfrak{a} \neq 0$. En efecto, la cadena descendente de conmutadores del radical $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})^i$ consiste de ideales de $\mathfrak{g}$ ($[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ es ideal si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ lo son), el último $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})^j$ no nulo es un ideal abeliano; llamémoslo $\mathfrak{a}$. Veamos que $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{rad}(\kappa)$. Sean $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{g}$ y consideremos el endomorfismo $T = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y$.

Dado que $\mathfrak{a}$ es ideal y $x \in \mathfrak{a}$, $T(z) = [x, [y, z]] \in \mathfrak{a}$ para todo $z \in \mathfrak{g}$; como además $\mathfrak{a}$ es abeliano, $T^2(z) = [x, [y, T(z)]] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$ para todo $z \in \mathfrak{g}$. Es decir

$$T^2(\mathfrak{g}) = T(T(\mathfrak{g})) \subset T(\mathfrak{a}) \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0.$$

Obtenemos que T es nilpotente; en consecuencia su traza es cero y esto dice que $0 = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y) = \kappa(x, y)$ para todo $x \in \mathfrak{a}$ e $y \in \mathfrak{g}$; por lo tanto, $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathrm{rad}(\kappa)$ lo cual implica que κ es degenerada. □

Corolario 4.18. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja.*

a) Si $\mathfrak{g}_0$ es una forma real de $\mathfrak{g}$ entonces $\mathfrak{g}_0$ es semisimple si y sólo si $\mathfrak{g}$ es semisimple.

b) $\mathfrak{g}$ es semisimple si y sólo si $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ es semisimple, donde $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ es la realificación de $\mathfrak{g}$, es decir, $\mathfrak{g}$ considerada como álgebra de Lie real.

Demostración. a) es consecuencia inmediata del criterio de semisimplicidad de Cartan.

Para b), probar que $\kappa_{\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}} = 2Re\ \kappa_{\mathfrak{g}}$. □

Teorema 4.19. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, entonces $\mathfrak{g}$ es semisimple si y sólo si*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$$

donde cada componente es una subálgebra de Lie simple y un ideal en $\mathfrak{g}$. En este caso, la descomposición es única, salvo isomorfismo y el orden de las componentes simples, y los únicos ideales de $\mathfrak{g}$ son suma de algunos de los $\mathfrak{g}_j$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Se deja como ejercicio.

($\Rightarrow$) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple; si $\mathfrak{g}$ no es simple, admite un ideal propio minimal $0 \neq \mathfrak{I} \subset \mathfrak{g}$. Este ideal no es abeliano pues $\mathfrak{g}$ no contiene ideales solubles. La prueba procede por inducción global en la dimensión. Debemos probar que $\mathfrak{I}$ es simple y que admite un complemento directo semisimple. Sea $\mathfrak{I}^\perp := \{x \in \mathfrak{g} : \kappa(x, y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{I}\}$; este subespacio es un ideal porque $\mathfrak{I}$ es un ideal y κ es ad-invariante. Dado que κ es no degenerada,

$$\dim(\mathfrak{I}) + \dim(\mathfrak{I}^\perp) = \dim(\mathfrak{g})$$

Por lo tanto, para probar que $\mathfrak{I} \oplus \mathfrak{I}^\perp = \mathfrak{g}$, es suficiente demostrar que $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}^\perp = 0$. Para ésto, necesitamos el siguiente resultado.

Lema 4.20. *Sea $\mathfrak{I}$ un ideal en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces $\kappa_{\mathfrak{I}} \equiv \kappa_{\mathfrak{g}}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}_{\mathfrak{I}} = \{v_1, \cdots v_k\}$ una base de $\mathfrak{I}$ que se extiende a $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots v_k,\ v_{k+1}, \cdots v_n\}$ base de $\mathfrak{g}$. Dado que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{I}] \subset \mathfrak{I}$, para cada $x \in \mathfrak{I}$ la matriz de ad_x en la base $\mathcal{B}$ es de la forma

$$\mathrm{ad}_x : \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{ad}_x|_{\mathfrak{I}} & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es decir, una matriz en bloques. Si y es otro elemento del ideal, su matriz es de la misma forma y el producto puede realizarse en bloques:

$$\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{ad}_x|_{\mathfrak{I}} \mathrm{ad}_y|_{\mathfrak{I}} & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

En consecuencia, la traza de $\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y$ coincide con la traza de $\mathrm{ad}_x|_{\mathfrak{I}} \mathrm{ad}_y|_{\mathfrak{I}}$, que es por definición $\kappa_{\mathfrak{I}}(x, y)$. □

Volviendo a la demostración del teorema, el ideal $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}^{\perp}$ verifica $\kappa(\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}^{\perp}, \mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}^{\perp}) \equiv 0$, por lo tanto $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}^{\perp}$ es soluble. Al ser $\mathfrak{g}$ semisimple, su único ideal soluble es 0, por lo tanto $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}^{\perp} = 0$ como queríamos probar.

Para concluir con la inducción debemos mostrar que $\mathfrak{I}$ es simple y $\mathfrak{I}^{\perp}$ es semisimple. Dado que $\mathfrak{g} = \mathfrak{I} \oplus \mathfrak{I}^{\perp}$, si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{I}$ entonces también es un ideal de $\mathfrak{g}$. Por minimalidad $\mathfrak{I}$ no tiene ideales propios, luego $\mathfrak{I}$ es simple.

Por el mismo argumento, todo ideal de $\mathfrak{I}^{\perp}$ resulta ideal de $\mathfrak{g}$. Más aún, si $\mathfrak{a}$ es un ideal soluble de $\mathfrak{I}^{\perp}$ entonces $\mathfrak{a}$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$. Por lo tanto, $\mathfrak{a} = 0$ y $\mathfrak{I}^{\perp}$ resulta semisimple. □

Una representación (V, π) de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice **irreducible** si $0 \neq V$ y sus únicas subrepresentaciones son 0 y V. Una representación (V, π) se dice **completamente reducible** si V se descompone en suma directa de representaciones irreducibles.

Teorema 4.21 (Weyl)**.** *Si $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple, toda representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ es completamente reducible.*

Para la demostración, ver [Hu], capítulo II, sección 6.3.

5. Información sobre álgebras de Lie compactas

- Las clases de isomorfimo de

  1. grupos de Lie semisimples, compactos, conexos y simplemente conexos *reales*
  2. álgebras de Lie semisimples, compactas *reales*
  3. álgebras de Lie semisimples, complejas
  4. sistemas de raíces abstractos, reducidos
  5. matrices de Cartan abstractas y sus diagramas de Dynkin asociados

  están en correspondencia biunívoca al pasar del grupo de Lie a su álgebra de Lie (1→2), de ella a la complexificación del álgebra de Lie (2→3), de ésta al sistema de raíces subyacente (3→4).

- Consideremos Aut($\mathfrak{g}$) el *grupo de automorfismos de un álgebra de Lie*; es un grupo de Lie por ser cerrado en GL($\mathfrak{g}$), el grupo de Lie de todos los automorfismos lineales de $\mathfrak{g}$.

  El álgebra de Lie de Aut($\mathfrak{g}$) es Der($\mathfrak{g}$); el espacio ad($\mathfrak{g}$) es una subálgebra de Lie de Der($\mathfrak{g}$). Se define *grupo de automorfismos interiores de* $\mathfrak{g}$ Int($\mathfrak{g}$) como el *subgrupo de Lie de Aut*($\mathfrak{g}$) *con álgebra de Lie ad*($\mathfrak{g}$). Un álgebra de Lie *real* k se dice *compacta* si el grupo Int($\mathfrak{g}$) es compacto.

- Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *reductiva* si a todo ideal $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{g}$ le corresponde un ideal $\mathfrak{b}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. $\mathfrak{g}$ es reductiva si y sólo si $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, donde $\mathfrak{z}$ y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es semisimple.

  El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie compacto G es *reductiva*, por lo cual el estudio de los grupos compactos se reduce en gran medida al estudio de los semisimples.

  Los subgrupos de G correspondientes a éstas subálgebras de $\mathfrak{g}$ son cerrados.

- Todo grupo de Lie compacto puede realizarse como un grupo de matrices reales ó complejas.

6. Clasificación de las álgebras de Lie semisimples sobre $\mathbb{C}$.

6.1. Introducción

Se estudian a través del siguiente proceso: se pasa de una dada álgebra de Lie semisimple a un sistema de raíces abstracto vía la elección de una subálgebra de Cartan y luego de de este sistema a una matriz de Cartan abstracta y a un diagrama de Dynkin abstracto vía la elección de un orden.

Si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces toda subálgebra de Cartan es abeliana. La acción adjunta de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ conduce a una descomposición de $\mathfrak{g}$ en espacios raíces y el conjunto de raíces forma un sistema de raíces reducidos.

Al imponer un orden en el conjunto de raíces se define raíz simple como aquella que no es suma de dos raíces positivas. Las raíces simples forman base especial con buenas propiedades y a partir de ella se define la matriz de Cartan y el diagrama de Dynkin. ("Grupo de Weyl"$\Rightarrow$ la elección anterior no depende del orden.) Se prueba la correspondencia 1-1 anterior (entre (3) (4) y (5)).

La relación entre álgebras de Lie $/\mathbb{C}$ y sistemas de raíces abstractas es más profunda. Además del isomorfismo, la correspondencia no depende de la elección de la subálgebra de Cartan (como consecuencia de que son únicas salvo conjugación). Parte de este estudio conduce a encontrar un sistema de generadores y relaciones.

A partir de la correspondencia, en vez de clasificar álgebras de Lie semisimples sobre $\mathbb{C}$ se clasifican diagramas de Dynkin y se llega a una lista. Las series A_n, B_n, C_n y D_n correspondieron a álgebras de Lie clásicas conocidas. Para las excepcionales se comprobó que efectivamente existían álgebras de Lie con esos correspondientes diagramas, y con el tiempo se fueron dando diversas realizaciones.

6.2. Descomposición en espacios raíces

6.2.1. Subálgebras de Cartan

Sea $\mathfrak{l}$ un álgebra de Lie de dimensión finita, una subálgebra $\mathfrak{h}$ se dice una **subálgebra de Cartan** si $\mathfrak{h}$ es nilpotente y coincide con su normalizador, es decir, $\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{l} : [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$.

Toda álgebra de Lie de dimensión finita admite una subálgebra de Cartan. Si $\mathfrak{g}$ es semisimple compleja y $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan entonces $\mathfrak{h}$ es abeliana. Más aun, si $\mathfrak{g}$ es semisimple / $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es una subálgebra de Cartan si y solo si $\mathfrak{h}$ es abeliana maximal y $\{\mathrm{ad}_H : H \in \mathfrak{h}\}$ es simultaneamente diagonalizable.

Por otra parte, las subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie $/\mathbb{C}$ de dimensión finita compleja son *únicas salvo conjugación* por un automorfismo interior de $\mathfrak{g}$. Es decir, dadas $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}'$ subálgebras de Cartan de $\mathfrak{l}$, existe un automorfismo interior $a : \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}$ tal que $a(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$.

Se define el **rango** de un álgebra de Lie $\mathfrak{l}$ y se denota $\mathrm{rank}\mathfrak{l} = \dim \mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{h}$ es alguna subálgebra de Cartan de $\mathfrak{l}$.

Si $\mathfrak{g}$ es semisimple compleja y $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan, como $\{\mathrm{ad}_H : H \in \mathfrak{h}\}$ son simultaneamente diagonalizables, $\mathfrak{g}$ se descompone como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

6.2.2. El ejemplo $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$

Consideremos el álgebra de Lie sobre sobre $\mathbb{C}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}), \quad n \geq 2$$

Consideremos la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ y una subálgebra de Lie real $\mathfrak{h}_0$

$$\mathfrak{h} = \{A \text{ matrices diagonales de traza cero}\} \subset \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$$

$$\mathfrak{h}_0 = \{A \in \mathfrak{h} : A_{ii} \in \mathbb{R}\}$$

$\mathfrak{h}_0$ es una subálgebra de Lie *real* de $\mathfrak{h}$ (que es subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$) y $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_0)^{\mathbb{C}}$; $\mathfrak{h}_0$ es una forma real de $\mathfrak{h}$.

Sean $E_{ij} \in \mathbb{Z}^{n\times n} \subset \mathbb{R}^{n\times n} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ las matrices con un 1 en el lugar ij y ceros en el resto

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Sean $e_i \in \mathfrak{h}^*$ las funcionales lineales que toman la coordenada i-ésima de de la diagonal:

$$e_i \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_n \end{pmatrix} = h_i$$

Calculemos $\mathrm{ad}_H(E_{ij})$ para cada $H \in \mathfrak{h}$. Dada $H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_n \end{pmatrix}$ obtenemos

$$\mathrm{ad}_H(E_{ij}) = HE_{ij} - E_{ij}H = h_iE_{ij} - h_jE_{ij} = (h_i - h_j)E_{ij} = ((e_i - e_j)(H))\, E_{ij}$$

Obtenemos que E_{ij} es un autovector simultáneo de ad_H para todo $H \in \mathfrak{h}$, con autovalor $(e_i - e_j)(H)$. Notar que la dependencia en H del autovalor es lineal. En otras palabras, $(e_i - e_j) : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ es una funcional lineal, $(e_i - e_j) \in \mathfrak{h}^*$. Para $i = j$ es, evidentemente, la funcional nula.

$\boxed{\text{Para } i \neq j\text{, las funcionales } \{(e_i - e_j) : i \neq j\} =: \Phi \text{ se llaman raíces}}$.

El cardinal de Φ es $n^2 - n = n(n-1)$.

Podemos descomponer al álgebra de Lie como suma directa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C} E_{ij} \right) = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{g}_{e_i - e_j} \right) = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

donde $\mathfrak{g}_{e_i - e_j} = \{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}_H(x) = (h_i - h_j)x, \ \forall H \in \mathfrak{h}\}$,
o bien $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}_H(x) = \alpha(H)x, \ \forall H \in \mathfrak{h}\}$.

Definición 6.1. *En general, si $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, se define $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : [H, x] = \alpha(H)x \ \forall H \in \mathfrak{h}\}$, y α se dirá una* **raíz** *si $\alpha \neq 0$ y $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$; $\mathfrak{g}_\alpha$ se denomina el subespacio raíz correspondiente a la raíz α.*

Notar que Φ genera todo $\mathfrak{h}^*$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial (no son una base pues dado α, siempre está $\pm\alpha$, pero aún así, eligiendo uno de cada uno de ellos, hay $n(n-1)/2$ "$e_i - e_j$" para $i < j$.

Calculemos los corchetes en la descomposición anterior. Por ejemplo $[E_{12}, E_{23}] = E_{13}$, pues

$$(E_{12}E_{23})_{ij} = \sum_k (E_{12})_{ik}(E_{23})_{kj}$$

$(E_{12})_{ik}$ es cero a menos que $i = 1$ y $k = 2$, en particular, $(E_{12}E_{23})_{ij}$ es cero si $i \neq 1$. A su vez $(E_{23})_{kj}$ es cero a menos que $k = 2$ y $j = 3$, lo que dice que $(E_{12}E_{23})_{ij}$ es cero también para $j \neq 3$, queda ver

$$(E_{12}E_{23})_{13} = \sum_k (E_{12})_{1k}(E_{23})_{k3} = \sum_k \delta_{2k}\delta_{2k} = 1$$

Una cuenta similar muestra que $E_{23}E_{12} = 0$. Observemos que $(e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) = e_1 - e_3 \in \Phi$; la cuenta anterior nos dice que $[g_{e_1-e_2}, g_{e_2-e_3}] \subset g_{e_1-e_3}$.

En general, podemos comprobar que $[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}$. Salvo $(kl) = (ji)$, el corchete de dos elementos de un espacio raíz quedara dentro del espacio raíz suma, y $[E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj} \in \mathfrak{h}$.

Más en general, si $[H, x] = \alpha(H)x$ y $[H, y] = \beta(H)y$ entonces

$$[H, [x, y]] = [[H, x], y] + [x, [H, y]] = [\alpha(H)x, y] + [x, \beta(H)y] = (\alpha + \beta)(H)[x, y]$$

Se dividen tres casos: $\alpha + \beta$ es raíz, $\alpha = -\beta$, o $\alpha \neq -\beta$ pero $\alpha + \beta$ no es raíz, y se obtiene

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \text{ es raíz} \\ = 0 & \text{si } \alpha + \beta \text{ no es raíz (ni cero)} \\ \subset \mathfrak{h} & \text{si } \alpha = -\beta \end{cases}$$

Notar que todas las raíces son reales en $\mathfrak{h}_0$ y, entonces, por restricción, pueden ser considerados elementos del espacio vectorial real $\mathfrak{h}_0^*$.

El próximo paso es introducir una noción de positividad en $\mathfrak{h}_0^*$ tal que

(i) $\forall \varphi \in \mathfrak{h}_0^*$, exactamente uno de los dos: φ ó $-\varphi$ es positivo.

(ii) $\sum_{\varphi > 0} \varphi$ y $n\varphi > 0 \ \forall \varphi > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Es decir, la suma de raíces positivas es positiva, y todo múltiplo positivo de una raíz positiva es positiva.

Se puede demostrar que la estructura (clasificación) no depende del orden.

Notar que el conjunto $e_1, \dots, e_n$ no es una base de $\mathfrak{h}_0^*$ pues $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = \mathrm{tr}$, que se anula en $\mathfrak{h}$; la dimensión (real) de $\mathfrak{h}_0^*$ es $n-1$. No todo elemento de $\mathfrak{h}_0^*$ se escribe de manera única como $\sum_i c_i e_i$, pero esta escritura sí es única si se agrega la condición adicional $\sum_i c_i = 0$.

Se dice que $0 \neq \varphi \in \mathfrak{h}_0^*$, $\varphi = \sum\limits_i c_i e_i$ con $\sum\limits_i c_i = 0$ es **positiva** si el primer $0 \neq c_i > 0$.

Es claro que esta noción de positividad satisface (i) y (ii). Se dice que $\varphi > \psi$ si $\varphi - \psi > 0$. Se obtiene una relación de *orden* compatible con la suma y multiplicación por $c \in \mathbb{R}_{>0}$.

Para las raíces el orden es el siguiente:

$$e_1 - e_n > e_1 - e_{n-1} > \cdots > e_1 - e_2 >$$

$$e_2 - e_n > e_2 - e_{n-1} > \cdots > e_2 - e_3 >$$

$$e_3 - e_n > e_3 - e_{n-1} > \cdots > e_3 - e_4 >$$

$$\cdots > e_{n-2} - e_n > e_{n-2} - e_{n-1} > e_{n-1} - e_n > 0$$

éstas son las positivas, luego vienen todas las negativas.

Por lo tanto, $\Phi = \Phi^+ \coprod \Phi^-$ donde $\Phi^+ = \{e_i - e_j : i < j\}$, $\Phi^- = \{-\alpha : \alpha \in \Phi^+\}$.

6.2.3. Propiedades generales para $\mathfrak{g}$ simple sobre $\mathbb{C}$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple $/\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ un asubálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ el sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{h}$, entonces:

1. Existe una subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{h}$ tal que $\mathfrak{g}$ admite una descomposición simultanea en autoespacios relativos a ad_H; $H \in \mathfrak{h}$ y tal que

   a) el autoespacio cero es $\mathfrak{h}$,

   b) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ para todo $\alpha \in \Phi$, es decir, los subespacios de autovalor de un dado $\varphi \in \mathfrak{h}^*$ o bien es cero, o bien es de dimensión uno y φ es (por definición) una raíz.

   c) Para todo $\alpha, \beta \in \Phi$, vale la relación

   $$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \text{ es raíz} \\ = 0 & \text{si } \alpha + \beta \text{ no es raíz (ni cero)} \\ \subset \mathfrak{h} & \text{si } \alpha = -\beta \end{cases}$$

   d) Existe una forma real $\mathfrak{h}_0$ de $\mathfrak{h}$ tal que para todo $\alpha \in \Phi$, $\alpha(H) \in \mathbb{R}\ \forall H \in \mathfrak{h}_0$.

2. Las raíces generan $\mathfrak{h}^*$.

3. Si α es raíz, entonces $-\alpha$ es raíz.

4. $\mathfrak{h} = \sum_{\alpha \in \Phi} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$.

5. $\kappa|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ no degenerada, en consecuencia, para cada $\mathfrak{h}$ en Φ existe $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha(H) = \kappa(H, H_\alpha)$ para todo $H \in \mathfrak{h}$.

6. Fijemos un elemento $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ con $[H, x_\alpha] = \alpha(H)x_\alpha$ para todo $H \in \mathfrak{h}$. Para todo $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $[x_\alpha, y] = \kappa(x_\alpha, y)h_\alpha$.
7. Si $\alpha, \beta \in \Phi$, entonces $2\kappa(\alpha,\beta)/\kappa(\beta,\beta) \in \mathbb{Z}$.
8. Para cada par $\alpha \neq$, $\beta \in \Phi$, se define la α *-string que contiene a* β como el subconjunto de ϕ de los elementos de la forma

   α-string que contiene a β $= \{\alpha + m\beta\} = \{\beta, \beta+\alpha, \beta+2\alpha, ..., \beta+m\alpha : \beta+k\alpha \in \Phi \; \forall 1 \leq k \leq m\}$.

   para un cierto $m \in \mathbb{Z}$. Observación: empezando de la izquierda en la sucesión anterior, toda subsuma es raíz, pero no cualquier subsuma ni cualquier término de ella es raíz; en particular, α *no pertenece a ninguna* β *string*, dado que ningún múltiplo de $\alpha \in \Phi$, salvo $\pm\alpha$.

Ejemplo: Sean $\alpha = e_2 - e_3$ y $\beta = e_1 - e_2 \in \Phi(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$; la α *-string que contiene a* β es el conjunto $\{\beta = e_1 - e_2;\ \beta + \alpha = e_1 - e_3\}$.

En $\mathfrak{sp}(2,\mathbb{C})$, la α *-string que contiene a* β para $\alpha = e_2 - e_1$ y $\beta = 2e_1$ es el conjunto $\{\beta = 2e_1;\ \beta + \alpha = e_1 + e_2;\ \beta + 2\alpha = 2e_2\}$.

6.2.4. El ejemplo $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$, $n \geq 2$

$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{(2n+1)\times(2n+1)} : A + A^t = 0\}$ es un álgebra de Lie compleja simple de tipo B_n, de rango n, para todo $n \geq 2$.

Ejercicio 6.2. Para $n = 1$ probar que $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Consideremos la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} := \{H \in \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$ de la forma (*)$\}$

$$H = \left(\begin{array}{cc|cc|c|c|c}
0 & ih_1 & & & & & \\
-ih_1 & 0 & & & & & \\ \hline
 & & 0 & ih_2 & & & \\
 & & -ih_2 & 0 & & & \\ \hline
 & & & & \ddots & & \\
 & & & & 0 & ih_2 & \\
 & & & & -ih_2 & 0 & \\ \hline
 & & & & & & 0
\end{array}\right)$$

Se define $e_j(H) = h_j$, $1 \leq j \leq n$. Consideremos la forma real $\mathfrak{h}_0 = \{H \in \mathfrak{h} : \text{entradas} \in i\mathbb{R}\} = \{H \in \mathfrak{h} : e_j(H) \in \mathbb{R}$ para todo $j = 1, \ldots, n\}$.

Las raíces son $\Phi = \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm e_k : k = 1, \ldots, n\}$.

La descomposición en espacios raíces $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}_\alpha)$ esta dada por:

Para $\alpha = \pm e_i \pm e_j$, $i < j$, sean

$$x_{e_i - e_j} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{e_i + e_j} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \quad x_{-e_i + e_j} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{-e_i - e_j} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

y finalmente

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_\alpha^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(2n+1)\times(2n+1)}$$

la matriz de bloques donde x_α^t se ubica en el lugar ij y x_α en el lugar ji. Es decir, E_α tiene todas sus entradas iguales a cero salvo las 8 entradas correspondientes correspondientes a los pares de indices indicados.

Para $\alpha \pm e_k$, sean

$$x_{e_k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad x_{-e_k} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{C}^{2\times 1}$$

y

$$E_\alpha = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -x_\alpha^t & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donde x_α y x_α^t se ubican en los respectivos lugares k.

6.2.5. El ejemplo $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, $n \geq 3$

$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n} : A^t J + J A^t = 0\}$ donde $J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{Id}_n \\ \hline -\mathrm{Id}_n & 0 \end{array}\right)$. Es un álgebra de Lie compleja simple de tipo C_n de rango n.

Ejercicio 6.3. $\mathfrak{sp}(1, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Ejercicio 6.4. (más dificil) $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$

Consideremos la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} := \{H \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ de la forma (*)$\}$

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & h_n & & & \\ & & & -h_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -h_n \end{pmatrix}$$

Se define $e_j(H) = h_j$, $1 \leq j \leq n$. Consideremos la forma real $\mathfrak{h}_0 = \{H \in \mathfrak{h}$:entradas$\in \mathbb{R}\} = \{H \in \mathfrak{h} : e_j(H) \in \mathbb{R}$ para todo $j = 1, \ldots, n\}$.

Las raíces son $\Phi = \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm 2e_k : k = 1, \ldots, n\}$.

$\boxed{\text{Notar que } 2e_k \in \Phi \text{ pero } e_k \notin \Phi.}$

La descomposición en espacios raíces $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}_\alpha)$ esta dada por:

Para todo $i \neq j$:

$$E_{e_i - e_j} = E_{ij} - E_{j+n,i+n}, \quad E_{e_i+e_j} = E_{i,j+n} + E_{j,i+n}, \quad E_{-e_i-e_j} = E_{i+n,j} + E_{j+n,i}$$

Para $k = 1, \ldots, n$:

$$E_{2e_k} = E_{k,k+n}, \quad E_{-2e_k} = E_{k+n,k} = E_{2e_k}^t$$

6.2.6. El ejemplo $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$, $n \geq 4$

$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n} : A + A^t = 0\}$ es un álgebra de Lie compleja simple de rango n, de tipo D_n, para cada $n \geq 4$.

$\mathfrak{so}(2,\mathbb{C}) = \{\begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{pmatrix}\}$ es abeliana de dimensión 1.

Ejercicio 6.5. (fácil, pero no evidente) Probar que $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Ejercicio 6.6. (más difícil) Probar que $\mathfrak{so}(6,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$.

Consideremos la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ como en $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ donde a cada matriz se le elimina la última fila y la última columna. Explícitamente, $\mathfrak{h} := \{H \in \mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ de la forma (*)$\}$

$$H = \left(\begin{array}{cc|cc|c|cc} 0 & ih_1 & & & & & \\ -ih_1 & 0 & & & & & \\ \hline & & 0 & ih_2 & & & \\ & & -ih_2 & 0 & & & \\ \hline & & & & \ddots & & \\ \hline & & & & & 0 & ih_2 \\ & & & & & -ih_2 & 0 \end{array}\right)$$

Se define $e_j(H) = h_j$, $1 \leq j \leq n$, y la forma real como antes: $\mathfrak{h}_0 = \{H \in \mathfrak{h}$:entradas$\in i\mathbb{R}\} = \{H \in \mathfrak{h} : e_j(H) \in \mathbb{R}$ para todo $j = 1,\ldots,n\}$. Las raíces son $\Phi = \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\}$.

La descomposición en espacios raíces $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}_\alpha)$ esta dada de manera similar al caso $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$, eliminando la última fila y columna, y considerando sólo $\alpha = \pm e_i \pm e_j$.

Explícitamente, para $\alpha = \pm e_i \pm e_j$, $i < j$, como antes

$$x_{e_i-e_j} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{e_i+e_j} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \quad x_{-e_i+e_j} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{-e_i-e_j} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

tenemos

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_\alpha^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$$

la matriz de bloques donde x_α^t se ubica en el lugar ij y x_α en el lugar ji. Es decir, E_α tiene todas sus entradas iguales a cero salvo las 8 entradas correspondientes correspondientes a los pares de indices indicados.

6.3. Axiomática de los sistemas de raíces

6.3.1. Reflexiones en el espacio euclídeo

Fijamos un espacio euclídeo E de dimensión finita, es decir, un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ munido de una forma bilineal simétrica definida positiva $\kappa(-,-)$, i.e. *un espacio producto interno real*.

Una reflexión es una transformación lineal que deja fijo un hiperplano y transforma al vector normal al hiperplano en su negativo. Toda reflexión es una transformación lineal ortogonal, es decir, preserva el producto interno. Todo vector no nulo α determina una reflexión σ_α: la reflexión con respecto al hiperplano ortogonal $P = \{\beta : \kappa(\alpha, \beta) = 0\}$. Explícitamente, la reflexión con respecto al hiperplano P es

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)}\alpha = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$$

pues es claro que esta transformacion lineal deja fijo a β si $\kappa(\beta, \alpha) = 0$ y $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$.

Como el número $2\frac{\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)}$ ocurre frecuentemente, se abreviará por $\langle \beta, \alpha \rangle$. Notar que $\langle -, - \rangle$ es lineal sólo en la primera variable.

6.3.2. Sistemas de raíces

Un subconjunto Φ de un espacio euclídeo E se llama un **sistema de raíces** en E si satisface los siguientes axiomas:

(Rl) es finito, genera E, y no contiene al 0.

(R2) Si $\alpha \in \Phi$, los únicos múltiplos de α en Φ son $\pm\alpha$.

(R3) Si $\alpha \in \Phi$, la reflexión σ_α deja Φ invariante.

(R4) Si $\alpha, \beta \in \Phi$, entonces $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$.

Para un sistema de raíces Φ, se define el **grupo de Weyl** $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\Phi)$ como el subgrupo del grupo ortogonal de E generado por $\{\sigma_\alpha : \alpha \in \Phi\}$. Notar que $\mathcal{W}$ puede considerarse como un subgrupo de las permutaciones del conjunto de raíces y, por lo tanto, es finito.

Ejemplos de Sistemas de Raíces con $V = \mathbb{R}^2$

Son los correspondientes a las álgebras de Lie semisimples compleja de rango 2:
$A_1 \oplus A_1$; A_2; $B_2 \cong C_2$; G_2.
En esta lista, las álgebras de Lie son todas simples, excepto la de $A_1 \oplus A_1$.

Teorema 6.7. *El sistema de raíces de un álgebra de Lie semisimple compleja respecto de una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ es un sistema de raíces en $\mathfrak{h}_0^*$.*

El siguiente lema resume las propiedades de sistemas de raíces, con las pruebas de los items 1 y 2.

Lema 6.8. *Sea Φ un sistema de raíces en un espacio euclídeo E, entonces*

1. $\langle \beta, \alpha \rangle = 2\frac{\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.
2. *Si $\beta \neq \pm\alpha$ y $|\alpha| \geq |\beta|$ entonces $\langle \beta, \alpha \rangle = 0, \pm 1$.*
3. *Si $\kappa(\alpha, \beta) > 0$ entonces $\alpha - \beta \in \Phi$. Si $\kappa(\alpha, \beta) < 0$ entonces $\alpha + \beta \in \Phi$.*
4. *Si $\alpha, \beta \in \Phi$ pero $\alpha \pm \beta \notin \Phi$ entonces $\kappa(\alpha, \beta) = 0$.*
5. *La α-cuerda que contiene a β tiene a lo sumo 4 elementos. Más precisamente consiste de $\{\beta + m\alpha : -p \leq m \leq q\} \subset \Phi$ donde $p, q \geq 0$ y $p - q = \langle \beta, \alpha \rangle$.*

Demostración. 1.) Sean $0 \neq \alpha, \beta \in \Phi \subset E$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$|\kappa(\alpha,\beta) \leq |\alpha|.|\beta|$$

entonces

$$|r.s| = \left|\frac{2\kappa(\alpha,\beta)}{\kappa(\beta,\beta)}.\frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)}\right| \leq 4$$

y vale la igualdad si y sólo si $\beta = c\alpha$ con $c = \pm 1$ pues deben ser raíces. En el caso de igualdad, obtenemos que $|r| = |s| = 2$. En el otro caso, $|r.s| < 4$, es decir $|r|.|s| \leq 3$ y la conclusión es obvia.

2.) Si $\beta \neq \pm\alpha$ y $|\alpha| \geq |\beta|$ entonces

$$s = |\langle\alpha,\beta\rangle| = \left|\frac{2\kappa(\alpha,\beta)}{\kappa(\beta,\beta)}\right| \geq \left|\frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)}\right| = |\langle\beta,\alpha\rangle| = r$$

desigualdad de enteros cuyo producto es menor ó igual que tres, y no son ambos iguales a dos. En consecuencia el más chico es menor ó igual que uno. □

6.3.3. Raíces simples

Un subconjunto $\Delta \subset \Phi \subset E$ se dice un **sistema de raíces simples** , si

1. Δ es una base de E como espacio vectorial
2. cada raíz $\beta \in \Phi$ se escribe como $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha$ con todos los coeficientes c_α enteros, todos ≥ 0, o todos ≤ 0.

Notar que la escritura $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha$ es única pues Δ es una base. También el cardinal de Δ es $|\Delta| = n = \dim E$, en el caso de $E = \mathfrak{h}_0^*$, y Φ es el sistema de raíces asociado, $|\Delta| = \mathrm{rank}\mathfrak{g}$. Se define el **nivel** o altura de una raíz $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha$ relativa a Δ al número entero $\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha$.

Teorema 6.9. Φ *admite un sistema de raíces simples.*

6.4. Matriz de Cartan

Fijamos un sistema de raíces simples, que enumeramos $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, la matriz $(A)_{ij} = (\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle)$ se denomina la **matriz de Cartan** de Φ, sus coeficientes son enteros, se denominan los enteros de Cartan.

Ejemplo 6.10. Para rango 2, las matrices de Cartan son

$$A_1 \times A_1 : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B_2 : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cada matriz de Cartan depende de Δ y de una enumeración; distintas enumeraciones producen matrices de Cartan conjugadas por matrices de permutación. (una matriz de permutación P consiste de 0 y $1'$s, conjugar por P se obtiene la matriz en la base nueva que no es mas que una reordenacion de la base anterior)

Propiedades de las matrices de Cartan:

1. $(A)_{ij} \in \mathbb{Z}$ para todo ij.
2. $A_{ii} = 2$, i.e. en la diagonal tiene siempre 2 pues $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 2\frac{\kappa(\alpha_i,\alpha_i)}{\kappa(\alpha_i,\alpha_i)} = 2$.
3. $(A)_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$.
4. $A_{ij} = 0 \iff A_{ji} = 0$
5. Existe una matriz diagonal D tal que $D_{ii} > 0$ y DAD^{-1} es simétrica definida positiva, en particular A es no singular. Más precisamente, $D_{ii} = |\alpha_i| = \kappa(\alpha_i, \alpha_i)^{\frac{1}{2}}$, y $(DAD^{-1})_{ij} = 2\kappa(\alpha_i, \alpha_j)$.

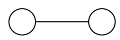
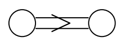
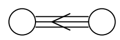
Proposición 6.11. *La matriz de Cartan determina a Φ a menos de isomorfismo.*

6.5. Diagrama de Dynkin

Si Δ un sistema de raíces simples, $\alpha \neq \beta \in \Delta$, sabemos que $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 0, 1, 2, 3$.

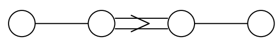
Se define el **diagrama de Dynkin** de Δ como el grafo (múltiple) con tantos vértices como elementos de Δ, y tantas aristas uniendo α con β como el número natural $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$. En caso de haber más de una arista entre dos vértices, se coloca un signo de desigualdad indicando cual de las dos raíces es la mayor.

Ejemplos:

$A_1 \times A_1$	
A_2	
B_2	
G_2	

Ejercicio: a) Probar que la matriz de Cartan correspondiente al diagrama de Dynkin de tipo A_4 es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Probar que la matriz de Cartan del diagrama de Dynkin F_4 :  es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Probar que la matriz de Cartan del diagrama de Dynkin de tipo E_6 es la siguiente

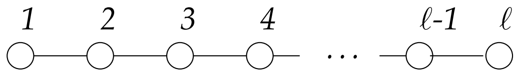
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Un sistema de raíces Φ se dice *irreducible* si no se descompone como unión disjunta de dos subconjuntos propios (componentes) mutuamente ortogonales. Si Δ es un sistema de raíces simples de Φ, se obtiene que Φ es irreducible si y sólo Δ es irreducible.

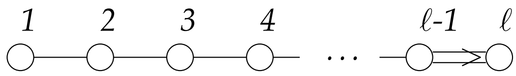
Más aún, resulta que Δ es irreducible si y sólo si el diagrama de Dynkin correspondiente es conexo, si y sólo si el álgebra de Lie semisimple, compleja es *simple.*

Teorema 6.12. *1.) Si Φ es un sistema irreducible de raíces de rango ℓ, entonces el diagrama de Dynkin correspondiente es alguno de los siguientes:*

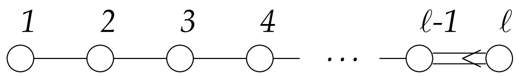
- A_ℓ, $\ell \geq 1$



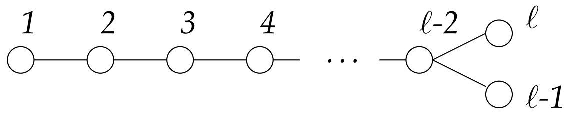
- B_ℓ, $\ell \geq 2$



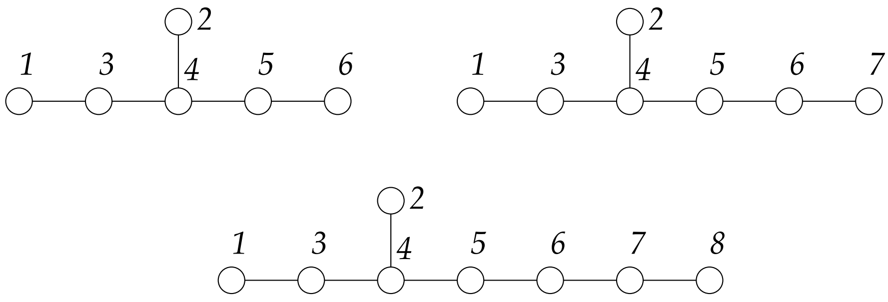
- C_ℓ, $\ell \geq 3$



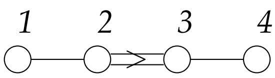
- D_ℓ, $\ell \geq 4$



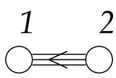
- E_6, E_7, E_8



- F_4



- G_2



El subíndice es exactamente igual al rango del álgebra de Lie y a la cantidad de vértices. Los anteriores diagramas son todos no isomorfos.

2.) Para cada diagrama de Dynkin (ó matriz de Cartan) de tipos A_ℓ a G_2 de la lista anterior, existe un sistema irreducible de raíces Φ de rango ℓ tal que su diagrama de Dynkin es el dado.

Para las álgebras de Lie simples clásicas $\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(2\ell+1,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})$ y $\mathfrak{so}(2\ell,\mathbb{C})$ hemos dado explícitamente el sistema de raíces y a éstos les corresponde un diagrama de Dynkin de tipo A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ y D_ℓ, respectivamente, vía la matriz de Cartan.

Para los diagramas de Dynkin de tipos E_6, E_7, E_8, F_4, y G_2, llamados *excepcionales*, se construyen sistemas de raíces, y más tarde, como consecuencia del teorema de Serre, se obtiene un álgebra de Lie abstracta correspondiente a cada tipo.

La clasificación de las álgebras de Lie semisimples se obtiene de la de los diagramas de Dynkin.

Demostración: [Hu] Capítulo III, sección 12.1.

Teorema 6.13. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple compleja, sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ y Φ el sistema de raíces correspondiente. Si $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathfrak{g}_i$ es su descomposición en subálgebras de Lie simples, entonces $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$ es una una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_i$; el correspondiente sistema de raíces Φ_i se incluye canónicamente en Φ de manera tal que $\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_t$ es la descomposición de Φ en componentes irreducibles.*

El teorema reduce el problema de clasificación a las simples.

Teorema 6.14. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple compleja, sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ y Φ el sistema de raíces correspondiente; Fijemos una base Δ de Φ entonces $\mathfrak{g}$ está generada* como álgebra de Lie *por* $\{0 \neq x_\alpha,\ 0 \neq x_{-\alpha} : x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}\}_{\alpha\in\Delta}$

Demostración. Idea de la prueba Sea $\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s \in \Phi^+$ y su descomposición (única) como suma de simples, donde cada suma parcial $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i \in \Phi$. Sabemos que $[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_\delta] = \mathfrak{g}_{\gamma+\delta}$ toda vez que $\gamma,\ \delta,\ \gamma+\delta \in \Phi$ (en realidad sabíamos sólo "$\subset$" y que $0 \neq [x_\gamma, x_\delta] \in \mathfrak{g}_{\gamma+\delta}$, pero este espacio tiene dimensión 1). Por inducción en s, $\mathfrak{g}_\beta$ está en la subálgebra de $\mathfrak{g}$ generada por $\{\mathfrak{g}_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$. Análogamente, si $\beta < 0$, $\mathfrak{g}_\beta$ está en la subálgebra de $\mathfrak{g}$ generada por $\{\mathfrak{g}_{-\alpha}\}_{\alpha\in\Delta}$.

Aceptemos que $\mathfrak{h} = \sum_{\alpha\in\Phi} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$; por otra parte, la descomposición de $\mathfrak{g}$ en espacios raíces $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ implica el enunciado. □

Un conjunto $\{0 \neq x_\alpha,\ 0 \neq x_{-\alpha} : x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}\}_{\alpha\in\Delta}$ es un *conjunto standart de generadores de* $\mathfrak{g}$ si $h_\alpha := [x_\alpha, x_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}$ satisface $\alpha(h_\alpha) = 2$ (h_α es en realidad único).

6.6. Teoremas de isomorfismo

Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ álgebras de Lie simples compleja, sean $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}'$ subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ respectivamente, y Φ y Φ' los sistemas de raíces correspondientes. Se prueba que un isomorfismo entre Φ y Φ' induce un isomorfimo de álgebras de Lie entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ que mande $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{h}'$.

Esto dice	que	la aplicación:
(clases de isom. de álg. de Lie s.s. $/\mathbb{C}$)	$\to$	(clases de isom. de sist. de raíces abstractos)
	es	inyectiva

Por definición, un isomorfimo $\pi : \Phi \to \Phi'$ induce un isomorfimo entre los correspondientes espacios ambientes, $\mathfrak{h}_0^*$ en ${\mathfrak{h}'}_0^*$, que, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que es una *isometría*, dado que los axiomas de sistema de raíces siguen valiendo si se cambia el producto interno original por un múltiplo > 0.

Complexificando, obtenemos un isomorfismo $\pi : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}'^*$. Via Killing identificamos a $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}'$ con sus duales. Explícitamente, para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ existe un único $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha = \kappa(t_\alpha, -)$. Dado que el isomorfismo entre Φ y Φ' viene de una isometria, y dado que $h_\alpha = 2t_\alpha/(\alpha, \alpha)$ entonces $\pi(h_\alpha) = h_{\pi(\alpha)}$ i.e. $h_\alpha \mapsto h'_{\alpha'}$.

Dado que $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}'$ son abelianas, π es un isomorfismo de álgebras de Lie. Queremos extender a un isomorfismo $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$. Sea $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ una elección abritraria de un elemento no nulo para cada $\alpha \in \Delta$, idem $0 \neq x'_{\alpha'} \in \mathfrak{g}'_{\alpha'}$ para cada $\alpha' \in \Delta'$.

Dada esta elección, afirmamos que existe un único isomorfismo de álgebras de Lie $x_\alpha \mapsto x'_{\alpha'}$ para todo $\alpha \in \Delta$. La parte de unicidad es inmediata pues los $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es un sistema de generadores como álgebra de Lie.

7. Relaciones de Serre

7.1. Generadores de Chevalley - Serre

Proposición 7.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan, Φ su correspondiente sistema de raíces, $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ un sistema de reíces simples. Recordemos $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 2\kappa(\alpha_i, \alpha_j)/\kappa(\alpha_j, \alpha_j) = \alpha_i(h_j)$. Fijamos un sistema standard de generadores $x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$, de manera que $[x_i, y_i] = h_i$. Entonces, $\mathfrak{g}$ está generada como álgebra de Lie por el conjunto $\{x_i, y_i, h_i : 1 \leq i \leq \ell\}$ y estos generadores satisfacen las siguientes relaciones:*

(S1) $[h_i, h_j] = 0 \qquad (1 \leq i, j \leq \ell).$

(S2) $[x_i, y_i] = h_i, \qquad [x_i, y_j] = 0 \quad \text{si } i \neq j$

(S3) $[h_i, x_j] = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle x_j, \qquad [h_i, y_j] = -\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle y_j,$

(S_{ij}^+) $(\mathrm{ad} x_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(x_j) = 0 \qquad (i \neq j)$

(S_{ij}^-) $(\mathrm{ad} y_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(y_j) = 0 \qquad (i \neq j)$

Un sistema de generadores como en la proposición anterior se denominan un **sistema de generadores de Chevalley - Serre**.

Teorema 7.2. *(Serre) Dado un sistema de raíces abstracto Φ con una elección de raíces simples $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$, sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie generada por los 3ℓ elementos $\{x_i, y_i, h_i : 1 \leq i \leq \ell\}$ sujetos a las relaciones (S1), (S2), (S3), (S_{ij}^{+}) y (S_{ij}^{-}). Entonces $\mathfrak{g}$ es un álebra de Lie de dimensión finita, semisimple, el subespacio vectorial generado por los h_i es una subálgebra de Cartan, y su correspondiente sistema de raíces es Φ.*

El teorema de Serre	dice	que la aplicación:
$\{$*clases de isom. de álg. de Lie s.s.* $/\mathbb{C}\}$	$\rightarrow$	$\{$*clases de isom. de sist. de raíces abstractos*$\}$
	es	suryectiva.

7.2. Existencia de la forma real compacta

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple $/\mathbb{C}$ y consideremos un sistema de generadores de Chevalley - Serre $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$. Se define la forma real $\mathfrak{u}$ como el álgebra de Lie real generada por

$$\{ih_\alpha, (x_\alpha - x_{-\alpha}), i(x_\alpha + x_{-\alpha})\}_{\alpha\in\Delta}$$

Se prueba explícitamente que la forma de Killing de $\mathfrak{u}$ es definida negativa, luego $\mathfrak{u}$ es un álgebra de Lie compacta.

Las formas reales de las álgebras clásicas se dan en la siguiente tabla:

tipo	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{u}$
A_n	$\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(n)$
B_n	$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{R})$
C_n	$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$
D_n	$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{R})$

8. Representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

Construcción natural: sea

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{Der}(\mathbb{C}[X,Y])$$
$$x \mapsto D_x = X\partial_Y$$
$$y \mapsto D_y = Y\partial_X$$
$$h \mapsto D_h = X\partial_X - Y\partial_Y$$

resulta $\mathbb{C}[x,y] = \oplus_{m\geq 0}\mathbb{C}[x,y]_m$: esta suma directa es la descomposición como subrepresentaciones simples, cada una de las representaciones simples de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ aparece una (y solo una) vez.

Por ejemplo $\mathbb{C} = \mathbb{C}1$ es la representación trivial, $V = \mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}Y$ es la representación standard de dimensión 2 de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Los polinomios homogéneos de grado dos: $\mathbb{C}X^2 \oplus \mathbb{C}XY \oplus \mathbb{C}Y^2$ tiene dimensión 3, es isomorfa a la representación adjunta, el isomorfismo está dado por $XY \leftrightarrow h$, $X^2 \leftrightarrow x$, $Y^2 \leftrightarrow y$.

Referencias

[B] Bourbaki, N., *Elements de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie*, Hermann, Paris 1960.

[H] Helgason, S., *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1978.

[Hu] Humphreys, J., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Second printing, revised. Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

[J] Jacobson, N., *Lie Algebras*, Dover 1979.

[Kn] Knapp, A., *Lie Groups Beyond an Introduction*. Progress in Mathematics, 140. Birkhäuser, Boston, MA, 1996.

[S] Serre, J.-P., *Lie Algebras and Lie Groups*. W A. Benjamin, New York 1965 .

[W] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott Foresman, Glenview, III, 1971. Second ed. Springer-Verlag. New York 1982.