Última práctica - Representaciones

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie arbitraria

1. Si V y W son dos representaciones, entonces $V \otimes W$, V^*, $\mathrm{End}(V,W)$ son representaciones. escriba las acciones de $\mathfrak{g}$ en cada uno de los casos. Muestre que si $\dim V < \infty$, $\mathrm{End}(V,W) \cong V^* \otimes W$ (isomorfismo de representaciones). Si $f : V \to W$ es morfismo de representaciones, entonces $f^* : W^* \to V^*$ es morfismo de representaciones.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $V^{\otimes n}$ es una representación. Escriba la fórmula de la acción. Si S_n es el grupo simétrico y $\sigma \in S_n$, muestre que la aplicación $V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ dada por

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto v_{\sigma 1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma n}$$

   es un morfismo de representaciones. Concluya que $S^n V$ (los n-tensores simétricos) y $\Lambda^n V$ (los n-tensores anisimétricos) son dos subrepresentaciones de $V^{\otimes n}$.

3. Muestre que para $n = 2$ vale $V^{\otimes 2} = S^2 V \oplus \Lambda^2 V$ pero que para $n > 2$, $S^2 V \oplus \Lambda^2 V \subset V^{\otimes 2}$ es una subrepresentación propia.

4. Sea ahora $\mathfrak{g}$ semisimple compleja, con $\mathfrak{h}$ subalgebra de Cartan y Δ un sistema de raíces simples. Sea $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ y $V = L(\lambda)$ el módulo simple de peso máximo $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.
   Muestre que $L(n\lambda) \subset L(\lambda)^{\otimes n}$ en realidad es una subrepresentación de la potencia simétrica, es decir $L(n\lambda) \subset S^n L(\Lambda) \subset L(\lambda)^{\otimes n}$.

5. Mismas notaciones que en el ejercicio anterior, muestre que si $d = \dim(L(\lambda))$ entonces $\Lambda^d L(\lambda)$ es la representación trivial.

6. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra simple y V una representación de dimensión menor a $\sqrt{\dim \mathfrak{g}}$, muestre entonces que la acción de $\mathfrak{g}$ en V es necesariamente trivial. Haga una tabla con los valores de $\sqrt{\dim \mathfrak{g}}$ y de su parte entera para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ con $n = 2, 3, 4, 5, n$, para $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ con $n = 4, 5, 6$, y para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n)$ con $n = 4, 5, 6$.

7. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo F tal que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (por ejemplo si $\mathfrak{g}$ es semisimple), y V una representación finita de dimensión d. Muestre que la multiplicación en el álgebra exterior induce, para cada $1 \le k \le d$ una función bilineal no degenerada $\mathfrak{g}$-invariante

$$\Lambda^k V \times \Lambda^{d-k} V \to \Lambda^d V \cong F$$

   donde F es la reprsentacion trivial de dimensión uno. Concluya que $\Lambda^k V \cong \Lambda^{d-k} V^*$ (isomorfismo de representaciones).

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

Tomamos los generadores $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Llamemos V_m a la representación simple de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ de dimensión m. Sabemos que debe ser de peso máximo λ, y caracterizada de manera única por un entero $m_1 = \lambda(h)$.

1. Muestre que V_m corresponde a $L(\lambda)$ con $\lambda(H) = m-1$. Llamemos $V(n)$ a V_{n+1}.

2. Muestre que $V(1) \otimes V(1) = V(2) \oplus V(0)$.

3. Muestre que $V(2) \otimes V(1)$ contiene a la representación trivial
(sugerencia: considere $V(2) \otimes V(1) \subset (V(1) \otimes V(1)) \otimes V(1) = (V(2) \oplus V(0)) \otimes V(1)$).
Como también debe contener a $V(3)$, concluya $V(2) \otimes V(1) \cong V(3) \oplus V(0) \oplus V(0)$

4. En general para una representación V, sabemos que $V \otimes V = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$ (tensores simétricos mas antisimétricos). Para $V = V(2)$, $V(2) \otimes V(2) = S^2V(2) \oplus \Lambda^2 V(2)$, muestre que $\dim S^2V(2) = 6$, $\dim \Lambda^2 V(2) = 3$, y que $V(4) \subset S^2V(2)$. A quién es isomorfo $V(2) \otimes V(2)$?

$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$

Llamemos $V(n,m)$ a la representación simple $L(\lambda)$ con $\lambda(h_1) = n$ y $\lambda(h_2) = m$. Recordemos que la representación de definición $\mathbb{C}^3$ es isomorfa a $V(1,0)$ y su dual es isomorfa a $V(0,1)$.

1. Sea V la representación adjunta, con base $\{f_1, f_2, f_3 = -[f_1, f_2], h_1, h_2, e_1, e_2, e_3 = [e_1, e_2]\}$. Muestre que e_3 es un vector de peso máximo, a que $V(m,n)$ es isomorfa?

2. Muestre que $V(1,0) \otimes V(0,1) = V(1,0) \otimes V(1,0)^* = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V(1,0)) = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})^{\mathrm{ad}} \oplus \mathbb{C}$. Notar que esto da otra manera de responder al ejercicio anterior.

3. Muestre que $V(1,0) \otimes V(1,0) \otimes V(1,0)$ contiene a la representación trivial. Concluya que existe una forma trilineal invariante $V(1,0) \times V(1,0) \times V(1,0) \to \mathbb{C}$ no nula. Concluya que $V(1,0) \otimes V(1,0)$ contiene a $V(0,1)$ como subrepresentación y que $V(0,1) \otimes V(0,1)$ contiene a $V(1,0)$.

4. A partir de $V(1,0) \otimes V(1,0) = S^2V(1,0) \oplus \Lambda^2 V(1,0)$, concluya que $V(1,0) \otimes V(1,0)$ contiene a $V(0,1)$ pues $\Lambda^2 V(1,0) \cong V(0,1)$ (porqué?).

5. Sabiendo que $V(2,0) \subseteq S^2(V(1,0))$ muestre que $\dim V(2,0) \leq 6$. Calcule la subrepresentación generada por $E_1 \otimes E_1$ (E_1 = vector de peso máximo de $V(1,0)$); vale $\dim V(3,0) = 6$?

6. Exhiba una base de $S^3V(1,0)$; concluya que $\dim V(3,0) \leq 10$. Calcule la subrepresentación generada por $E_1 \otimes E_1 \otimes E_1$; vale $\dim V(3,0) = 10$?

7. Descomponga $V(1,0) \otimes V(1,0) \otimes V(1)$ como suma de subrepresentaciones simples. (sugerencia, parta de la descomposición de $V(1,0) \otimes V(1,0)$ y de lo que sepa del ejercicio anterior).

8. Descomponga $V(1,0)^{\otimes 4}$ como suma de representaciones simples. Puede contener a la representación trivial? idem $V(1,0)^{\otimes 5}$ y $V(1,0)^{\otimes 6}$.