Grupos y Algebras de Lie - 1er cuat 2009 - Ejercicios

1. Grupos de Lie y grupos topológicos

1. Sea G un grupo continuo y G_0 la componente conexa de la identidad. Mostrar que G_0 es un subgrupo normal.

2. Mostrar que S_n es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Concluir que todo subgrupo finito es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ para algún n. Qué puede decir de n en términos del orden del grupo finito en cuestión?

3. Calcular las dimensiones de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, $U(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$. Mostrar que $\dim \mathrm{SO}(p, q, \mathbb{R}) = \dim \mathrm{SO}(p+q, \mathbb{R})$, y que $\dim \mathrm{SU}(n) = \dim \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

4. Sea G un grupo finito y V una representación (real o compleja). Mostrar que V es isomorfa a una suma directa de representaciones simples.

5. Sea V una representación k-lineal simple de un grupo finito G, $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Mostrar que $\mathrm{End}_G(V)$, las transformaciones k-lineales y G-equivariantes son un Álgebra de división, de dimensión finita sobre k. Concluir que en particular si $k = \mathbb{C}$ entonces los únicos endomorfismos G-equivariantes son múltiplos de la identidad. Si $k = \mathbb{R}$ cuáles son las posibilidades? exhibir un ejemplo de G y V para cada posibilidad.

6. Chequear que los siguientes son morfismos de grupos de Lie:

   a) $S^1 \to \mathrm{SU}(2)$, $e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ y también $e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

   b) $\mathrm{GL}(n, k) \to \mathrm{SL}(n+1, k)$, $M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \det^{-1} M \end{pmatrix}$.

   c) $\mathrm{GL}(n, k) \to \mathrm{Sp}(n, k)$, $M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}$.

7. $\mathrm{SU}(2)$ y los cuaterniones. Recordamos la estructura multiplicativa de $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k = -ji,\ jk = i = -kj,\ ki = j = -ik$$

   a) Ver que $\mathbb{H}$ se puede definir como el Álgebra con generadores i, j, donde $i^2 = j^2 = -1$ e $ij = -ji$.

   b) Mostrar que σ definido por $i \mapsto -i$ y $j \mapsto -j$ determina un automorfismo de orden 2 ($\sigma(k) = k$).

   c) Mostrar que $\tau(i) = i$, $\tau(j) = j$ y $\tau(k) = -k$ determina un anti-morfismo de Álgebras (de orden 2), es decir $\tau(hh') = \tau(h')\tau(h)$ para todo par $h, h' \in \mathbb{H}$.

   d) Concluir (o mostrar directamente) que la "conjugación" $h = a + bi + cj + dk \mapsto \overline{h} := a - bi - cj - dk$ es una involución, es decir $\overline{\overline{h}} = h$ y $\overline{hh'} = \overline{h'}\,\overline{h}$. Mostrar que $\overline{h}h = h\overline{h} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ (con esto se concluye que todo elemento no nulo es inversible).

e) Si $G = \{h \in \mathbb{H} : |h|^2 = 1\}$, es un grupo de Lie, isomorfo (como variedad diferenciable) a S^3.

f) La aplicación $U(\mathbb{H}) \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ definida por

$$h \mapsto (a, b, c, d) \mapsto h(a + bi + cj + dk)h^{-1}$$

es un morfismo de grupos, cuya imagen estÁ contenida en $\mathrm{SO}(4, \mathbb{R})$. Para cualquier h, la aplicación "conjugar por h" deja invariante la recta $\mathbb{R}$,1, y por lo tanto define una aplicación

$$U(\mathbb{H}) \to \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$$

luego de haber identificado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ con $xi + yj + zk \in 1^{\perp}$.

g) Mostrar que esta aplicación restringida a $G = \{h \in \mathbb{H} : |h| = 1\}$ tiene núcleo $\{\pm 1\}$.

h) Consideremos $\mathrm{SU}(2) = \{M \in \mathbb{C}^{2\times 2} : MM^* = \mathrm{Id},\ \det M = 1\}$. La condición $MM^* = 1$ nos dice que las filas (o columnas) son vetores de norma uno, ortogonales entre sÃ, es decir

$$M = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} : |z|_1^2 + |z|_2^2 = 1 = |w|_1^2 + |w|_2^2,\ z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2 = 0$$

Dado que $(z_1, z_2) \neq (0, 9)$, la condición de ortogonalidad dice que existe un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(w_1, w_2) = \lambda(\overline{z}_2, -\overline{z}_1)$.

$$M = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\lambda\overline{z}_2 & \lambda\overline{z}_1 \end{pmatrix}$$

Como ademÁs el determinante debe ser 1, tenemos que $\lambda = 1$, por lo tanto

$$M = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} : |z|_1^2 + |z|_2^2 = 1$$

Con esto concluimos que $\mathrm{SU}(2) \cong S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : ||(z, w)|| = 1\}$. Pero mÁs aún, si definimos la aplicación

$$\mathbb{H} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$$
$$a + bi + cj + dk = (a + ib) + (c + id)j \mapsto \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}$$

es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-Álgebras, que se restringe a un isomorfismo de grupos $S^3 = \{h \in \mathbb{H} : |h| = 1\} \cong \mathrm{SU}(2)$.

Como S^3 es simplemente conexo, se sigue que $\mathrm{SU}(2)$ es el revestimiento universal de $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, y de paso $\pi_1(\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

8. Gram-Schmidt

a) Interprete atentamente el procedimiento de ortogonalización de Gramd-Schmidt para mostrar el siguiente homeomorfismo (de hecho difeomorfismo) de espacios topológicos:

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \cong U(n) \times T_{>0}(n, \mathbb{C}) \cong U(n) \times \mathbb{R}^n_{>0} \times \mathbb{C}^{n(n-1)/2} \cong U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$$

donde $T_{>0}(n,\mathbb{C})$ denota al conjunto de las matrices triangulares, con elementos reales positivos en la diagonal. Sugerencia: mostrar que la aplicación

$$U(n) \times \times T_{>0}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$$

$$(U,T) \mapsto UT$$

es inyectiva por ser $U(n)$ y $T_{>0}(n,\mathbb{C})$ subgrupos con intersección trivial, y que es sobreyectiva gracias a Gramd-Schmidt.

b) Muestre que la aplicación anterior NO es morfismo de grupos, ni siquiera considerando productos semidirectos.

c) Mostrar que restringiendo la aplicación anterior (o repitiendo el argumento) se obtienen homeomorfismos de espacios topológicos

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \cong \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$$

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2-1}$$

d) Concluir que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tiene el mismo tipo de homotopÃa que $U(n)$, idem para los otros. (Por ejemplo, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tiene el mismo tipo de homotopÃa que S^1.)

e) Mostrar que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tiene dos componentes conexas: las de determinante positivo y las de determinante negativo. Concluir que $O(n,\mathbb{R})$ tiene dos componentes conexas y por lo tanto $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ es conexo. Concluir que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ es conexo.

2. Álgebras de Lie

1. Probar que la condición de antisimetría: $[x,y] = -[y,x]$ para todo $x,y \in \mathfrak{g}$, es equivalente a la identidad $[x,x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, salvo en el caso en que $char\ (k) = 2$.

2. Probar que si dim $(\mathfrak{g}) = 2$, la identidad de Jacobi se obtiene inmediatamente de la condición de antisimetría.

3. Probar que el miembro izquierdo de Jacobi es igual a un medio de la suma alternada, es decir, si denotamos por $J(x,y,z)$ al miembro izquierdo de Jacobi, entonces

$$J(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]]$$

4. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión 2. Mostrar si $\mathfrak{g}$ es no abeliana, entonces existe una base $\{x,y\}$ tal que $[x,y] = x$. Calcular el grupo de automorfismos de éste álgebra de Lie, y calcular el álgebra de Lie de derivaciones de $\mathfrak{g}$.

5. Mostrar que vale Jacobi para el producto semidirecto.

6. Sea $\mathfrak{g} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, se define el corchete de Poisson de dos funciones como $\{f,g\} = \sum_{i=1}^n \partial_i f \partial_{n+i} g - \partial_{n+i} f \partial_i g$. Mostrar que verifica Jacobi, y por lo tanto $(\mathfrak{g}, \{-,-\})$ es un álgebra de Lie.

7. Calcular el espacio tangente a $\mathrm{SO}(p, q, \mathbb{R})$ y a $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$, explicitar los corchetes.

8. Sea $f \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, digamos $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y definamos en $\mathbb{R}^3$, con base $\{x, y, z\}$ el corchete dado por
$$[z, x] = ax + by,\ [z, y] = cx + dy,\ [x, y] = 0$$
donde se sobre-entiende que extendemos por bilinealidad y antisimetría. Llamamos $\mathfrak{g}_f$ a $\mathbb{R}^3$ dotado de este corchete antisimétrico.

   - Mostrar que el corchete así definido verifica Jacobi, por lo tanto $\mathfrak{g}_f$ es un álgebra de Lie.
   - Mostrar que si f y f' son matrices conjugadas entonces $\mathfrak{g}_f \cong \mathfrak{g}_{f'}$ (isomorfismo de álgebras de Lie).
   - Para $\lambda \in \mathbb{R}$, denotemos $\mathfrak{g}_\lambda := \mathfrak{g}_f$ donde $f = \mathrm{diag}(\lambda, 1)$. Mostrar que $\mathfrak{g}_lambda \cong \mathfrak{g}_{\lambda'}$ si y sólo si $\lambda = \lambda'$. Concluimos que hay una cantidad no numerable de clases de isomorfismo de álgebras de Lie reales de dimensión tres.

9. Sea $G = S^3$ la esfera unitaria con la estructura de grupo dada por los cuaterniones de norma 1. Encuentre curvas $\sigma, \tau, \rho : \mathbb{R} \to S^3$ tales que $\sigma(0) = \tau(0) = \rho(0) = 1$, $\sigma'(0) = i$, $\tau'(0) = j$ y $\rho'(0) = k$. A partir de éstas curvas, calcule el corchete de Lie del álgebra tangente a S^3 y muestre que es isomorfa a $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial.