GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE

EJERCICIOS

UBA 1ER CUAT 2009

Raices I

Todas las álgebras que consideraremos ahora son complejas.

1. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra semisimple de dimensión tres. Probar que su subálgebra de Cartan tiene dimensión uno, y fijada una tal subálgebra, muestre que sólo hay dos raíces: $\alpha, -\alpha$. Concluya que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

2. Muestre que toda álgebra de Lie semisimple con subálgebra de Cartan de dimensión uno es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

3. Mostrar que no existen álgebras de Lie semisimple de dimensión 4 ni 5.

4. Sea un álgebra de Lie semisimple de dimensión 6. Muestre que una subálgebra de Cartan no puede tener dimensión uno, ni tampoco dimensión mayor que 3. Cuántas raíces tiene entonces? Hay alguna posibilidad aparte de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$?

5. $\mathfrak{so}(5)$ tiene diemnsión 10, sabiendo que es semisimple (porque es reductiva), muestre que es simple.

6. Consideramos $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{M \in \mathbb{C}^{2n\times 2n} : Xw + wX = 0\}$ donde $w = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$. Para $n = 2$, si escribimos un elemento como bloques de matrices 2 por dos, tenemos $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} : B = B^t,\ C = C^t \right\}$. Considerar la subálgebra $\mathfrak{h}$ de matrices diagonales. Muestre que es una subálgebra de Cartan, encuentre los subespacios raíz (recuerde que E_{ij} es autovector de ad_Hi H es diagonal). Cuántas raíces hay? existe alguna raíz γ de la forma $\alpha + \beta$?

7. Considere la subálgebra de $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$ generada por $H_1 = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $H_2 = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & -J & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde $J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. Muestre que es una subálgebra de Cartan, cuántas raíces tiene? Muestre que $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}(2, \mathbb{C})$.

Representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

1. Sea $\mathbb{C}^2$ la representación de definición de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, es decir, viendo a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \subset \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$. Encuentre un isomorfismo explícito entre esta representación y V_2, donde V_2 es la representación de dimensión dos dada en el Teorema en clase.

2. Sea V_3 la representación simple de dimensión 3 de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Encuentre un isomorfismo explícito entre esta representación (dada en la base del teorema en clase) y $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})^{\mathrm{ad}}$. Mostrar de dos maneras distintas que $V_3^* \cong V_3$ (isomorfismo de representaciones).

3. Hallar una base de $\mathbb{C}[X,Y]_{m-1}$=polinomios homogeneos de grado $m-1$ en donde la acción de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ coincida con las fórmulas del teorema en clase.

4. Sea V_2 la representación simple de dimensión 2 de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, es $V_2 \otimes V_2$ una representación simple? si no, que representaciones aparecen?

5. Considerar $V_3 \otimes V_2$. Por cuestiones dimensionales, cuáles son las posibles subrepresentaciones? cuáles son los posibles autovalores del Casimir?

6. Si V es un espacio vectorial, denotamos por $\Lambda^2 V$ al subespacio vectorial de $V \otimes V$ formado por los tensores antisimétricos, es decir, al subespacio generado por los tensores de la forma $v \otimes w - w \otimes v$. Muestre que si V es una representación de un álgebras de Lie $\mathfrak{g}$, entonces $\Lambda^2 V$ es una subrepresentación. Se complementa?

7. Denotemos por $\Lambda^3 V$ al subespacio vectorial de $V \otimes V \otimes$ formado por los tensores antisimétricos, es decir, al subespacio generado por los tensores de la forma
$$\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma v_{\sigma 1} \otimes v_{\sigma 2} \otimes v_{\sigma 3}.$$
Qué dimensión tiene $\Lambda^3 V$? (en términos de $\dim V$). Muestre que si V es una representación de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces $\Lambda^3 V$ es subrepresentación de $V \otimes V \otimes V$. Muestre que para $V = \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\Lambda^3 \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$, es isomorfa a la representación trivial.

8. Denotemos por $S^2(V)$ al subespacio de $V \otimes V$ formado por tensores simétricos, es decir, el subespacio generado por tensores de la forma $v \otimes w - w \otimes v$. Mostrar que $S^2(V^*)$ se identifica naturalmente con las formas bilineales simétricas en V. Para $V = \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, descomponga $S^2(\mathfrak{g}^*)$ ($\cong S^2(\mathfrak{g})$) como suma directa de simples. Concluya que $\dim(S^2(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}) = 1$, por lo tanto, toda forma bilineal simétrica *invariante* es un multiplo de la forma de Killing, y todo 2-tensor simétrico es un múltiplo del Casimir.