Grupos y Álgebras de Lie

Ejercicios

UBA 1er cuat 2009

La forma de Killing

1. Calcular la forma de Killing para el álgebra de Lie no abeliana de dimensión dos.
2. Calcular la forma de Killing de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, concluir que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ no es isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$.
3. Calcular las formas de Killing de $\left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & a \\ 0 & t & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,t \in \mathbb{R} \right\}$ y de $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & t & a \\ -t & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,t \in \mathbb{R} \right\}$. Pueden ser estas álgebras isomorfas?
4. Sea $\Theta : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to k$ definida por $\Theta(x,y,z) := \kappa([x,y],z)$. Mostrar que es alternada (i.e. $\Theta(x_1,x_2,x_3) = (-1)^\sigma \Theta(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)})$ e invariante (i.e. $\Theta([t,x],y,z)+\Theta(x,[t,y],z)+\Theta(x,y,[t,z]) = 0$ para todo $t,x,y,z \in \mathfrak{g}$).

El Casimir

Supongamos que $\mathfrak{g}$ es tal que su forma de Killing es no degenerada. Sea $x_1,\ldots,x_n$ una base de $\mathfrak{g}$ y sea $x^1,\ldots,x^n$ la base dual con respecto a Killing, es decir, $x^1,\ldots,x^n$ son elementos de $\mathfrak{g}$ que verifican $\kappa(x_i,x^j) = \delta_i^j$ (porqué estan bien definidos? porqué forman una base de $\mathfrak{g}$?). Sea V una representación de $\mathfrak{g}$ y consideremos la transformación lineal $\omega : V \to V$ dada por

$$v \mapsto \omega(v) := \sum_i x_i \cdot x^i \cdot v$$

1. Muestre que ω no depende de la base elegida. Este endomorfismo se denomina El Casimir.
2. Muestre que ω es un morfismo de representaciones, es decir, para todo $x \in \mathfrak{g}$, $\omega(x.v) = x.\omega(v)$.
3. Calcule el Casimir para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ y para $\mathfrak{su}(2)$.
4. Sea $D_x = x\partial_y$, $D_y = y\partial_x$ vistos como endomorfismos de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Calcular $D_h = [D_x,D_y]$. Verificar que $[D_h,D_x] = 2D_x$ y $[D_h,D_y] = -2D_y$. Concluir que $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ es una representación de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ con $\rho = D$. Calcular el operador diferencial asociado al Casimir.
5. Sean $D_1 = y\partial_z - z\partial_y$, $D_2 = z\partial_x - x\partial_z$ y $D_3 = x\partial_y - y\partial_x$, vistos como endomorfismos de $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Calcular $[D_i,D_j]$ y verificar que D es una representación de un álgebra de Lie de dimensión tres conocida. Cual? Calcular el operador de Casimir asociado.

6. (Schur) Sea V una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ que sea simple, es decir, si $S \subseteq V$ es una subrepresentación, entonces $S = 0$ o $S = V$. Muestre que si $f : V \to V$ es un morfismo de representación, entonces $f = 0$ o f es un isomorfismo. Si además el álgebra de Lie es compleja y la representación es compleja, entonces f es un múltiplo de la identidad. (sugerencia: considerar S el subespacio de autovectores de un autovalor de f). Concluir que el Casimir actúa por múltiplos escalares en representaciones simples complejas (el escalar depende de la representación).

Conmutadores y centro

1. Sea V un subespacio de $\mathfrak{g}$ que contiene a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Muestre que V es un ideal.

2. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión 3. Si $\dim \mathfrak{z}\mathfrak{g} = 1$ y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{z}\mathfrak{g}$ entonces $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_3$.

3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión 3.

   a) Si existe un ideal $\mathfrak{J}$ con $\dim \mathfrak{J} = 1$ entonces $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \leq 2$.

   b) Si existe un ideal $\mathfrak{J}$ con $\dim \mathfrak{J} = 2$ entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{J}$.

   Concluir que si $\dim \mathfrak{g} = 3$ y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ entonces $\mathfrak{g}$ no tiene ideales propios (es decir, es simple). Concluya que $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ son simples.

4. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, k) = \mathrm{End}_k(k^n)$ y $\mathfrak{sl}(n, k)$ la subálgebra de Lie de endomorfismos de traza cero.

   a) Muestre que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{sl}(n, k)$ y que $[\mathfrak{sl}(n, k), \mathfrak{sl}(n, k)] = \mathfrak{sl}(n, k)$.

   b) Muestre que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = k\mathrm{Id}$ y $\mathfrak{z}(\mathfrak{sl}) = 0$

   c) Muestre que si $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{sl}(n, k)$ es un ideal, entonces $\mathfrak{J} = 0$ o $\mathfrak{J} = \mathfrak{sl}(n, k)$.

5. Cuántas clases de isomorfismo de álgebras de Lie nilpotentes de dimension tres hay? Para cada una de ellas, calcular explícitamente la forma de Killing.

6. Sea $\mathfrak{g}$ nilpotente de dimensión cuatro y supongamos que $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 2$. Cuántas clases de isomorfismo de tales álgebras hay?