Grupos y Algebras de Lie - 1er cuat 2009 - Ejercicios

La Exponencial

1. Calcular las exponenciales de $\exp\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ (con $a, b \in \mathbb{R}$).

2. Realizar al álgebra real no abeliana de dimensión dos $\mathfrak{g}$ como subálgebra de matrices reales de 2 por dos. Qué subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ es $\exp(\mathfrak{g})$?

3. Sea $\mathfrak{h}_3$ el álgebra de Lie real de dimensión tres con base x, y, z y corchetes $[x, y] = z$, $[x, z] = [y, z] = 0$. Realizar este álgebra como subálgebra de Lie de matrices y exponenciarla.

4. [Lema de Hadamard] Consideremos $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n\times n}$, y $\mathrm{ad}_A : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ definida por $\mathrm{ad}_A(B) = [A, B]$. Como endomorfismo lineal, podemos exponenciarlo:

$$e^{\mathrm{ad}_A}(B) = B + \mathrm{ad}_A(B) + \frac{1}{2!}\mathrm{ad}_A^2(B) + \frac{1}{3!}\mathrm{ad}_A^3(B) + \cdots$$

$$= B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots$$

Muestre que
$$e^{\mathrm{ad}_A}(B) = e^A B e^{-A}$$

Sugerencia: considere $e^{t\mathrm{ad}_A}(B)$ vs. $e^{tA}Be^{-tA}$ y las derivadas sucesivas con respecto a t en el cero.

5. Descomposición polar. Denotemos por $\mathfrak{p}(n)$ al conjunto de las matrices hermíticas $n \times n$, es decir $\mathfrak{p} = \{p \in \mathbb{C}^{n\times n} : p = p^*\}$. Recordemos que una matriz hermítica P se dice *positiva* si $\langle Pv, v\rangle > 0$ para todo $v \neq 0$.

   a) Mostrar que una matriz positiva (necesariamente diagonalizable) tiene todos sus autovalores positivos, y que existe un función biyectiva y continua $\log$: $\{$matrices positivas$\} \to \{$matrices hermíticas$\}$ tal que $\exp(\log P) = P$ para toda matriz positiva P. (Sugerencia: diagonalizar.)

   b) Sea $M \in \mathrm{GL}(n(\mathbb{C})$ y consideramos M^*M. Mostrar que M^*M es hermítica y positiva, por lo tanto admite única raíz cuadrada positiva que es un polinomio en M^*M, denotamos $P = \sqrt{M^*M}$ y $U = MP^{-1}$.

   c) Mostrar que U es unitaria.

   d) * [Chevalley] Muestre que existe una biyección, que de hecho es un homeomorfismo de espacios topológicos (la inversa es la descomposición polar)

$$\mathrm{U}(n) \times \mathfrak{p} \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

$$(U, p) \mapsto Ue^p$$

6. [Proposición 1.122 de Knapp, Lie Groups Beyond an Introduction, pag. 72] Sea $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ un subgrupo definido por ceros de polinomios reales en las partes reales e imaginarias de los coeficientes de las matrices y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie asociada. Asumamos que G es cerrado por tomar adjunto. Entonces la aplicación

$$(G \cap U(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}) \cong G$$

$$(U, p) \mapsto Ue^p$$

es un homeomorfismo.

Utilizar este hecho para concluir que la cantidad de componentes conexas (más generalmente el tipo de homotopía) de G está en biyección con la cantidad de componentes conexas de $G \cap U(n)$. Mostrar la siguiente tabla de intersecciones:

a) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \cap U(n) = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$

b) $\mathrm{O}(p, q, \mathbb{R}) \cap U(n) = \mathrm{O}(p, \mathbb{R}) \times \mathrm{O}(q, \mathbb{R})$, en particular, por ejemplo $\mathrm{O}(1, 3, \mathbb{R})$ tiene cuatro componentes conexas.

c) $\mathrm{SO}(p, q, \mathbb{R}) \cap U(n) = S(\mathrm{O}(p, \mathbb{R}) \times \mathrm{O}(q, \mathbb{R}))$

d) $\mathrm{SU}(p, q) \cap U(n) = S(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$