UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Semigrupos y grupos cuánticos: simetrías cuánticas

Sebastián Maddonni

Director: Marco Farinati

Fecha de Presentación: 16 de julio de 2020

Introducción

En esta tesis usaremos biálgebras y álgebras de Hopf como sustitutos no conmutativos de semigrupos y grupos. Para esto se necesitan preliminares algebraicos, ya que la categoría de comódulos sobre un álgebra de Hopf conmutativa se identifica con las representaciones de dimensión finita de un grupo algebraico afín, introducimos primero las nociones algebraicas de álgebras, coálgebras, biálgebras, álgebras de Hopf, módulos y comódulos. Esto permite tener un marco teórico en el cual generalizar la noción de acción de un grupo algebraico afín, estudiando la categoría de comódulos sobre un álgebra de Hopf no necesariamente conmutativa.

En la **Sección 1** mencionamos los preliminares elementales, se recuerda la noción de producto tensorial con su propiedad universal, noción que utilizaremos de forma subyacente en toda la tesis y supondremos familiaridad con el tema.

En la **Sección 2** se establecen la mayoría de los conceptos básicos que luego serán pilares para todo el desarrollo de la tesis y para poder abarcar los teoremas, propiedades y ejemplos específicos de la demás secciones.

Se tratarán las nociones algebraicas de álgebras, coálgebras, biálgebras, módulos y comódulos. Especificando los detalles de esta sección, como ejemplos especiales se trabajarán las k-álgebras de dimensión 2 y 3, es decir estudiaremos las clases de isomorfismo en estas dimensiones. Luego aprovechando que son álgebras de dimensión finita, a través de 'dualizar' describimos explícitamente las coálgebras de dimensión 2 y 3.

Avanzado en la sección abarcaremos el álgebra de grupo y funciones sobre un grupo, temas centrales en esta tesis que además utilizaremos en la última Sección.

Luego trataremos los temas A-módulos y C-comódulos, donde A es una k-álgebra y C una coálgebra. Utilizaremos notaciones habituales de las referencias clásicas de biálgebras y álgebras de Hopf como los libros de Moss Sweedler [S], Susan Montogomery [M] o Christian Kassel [K].

A su vez remitiéndonos a las relaciones entre álgebras finitas y coálgebras, relacionaremos módulos con comódulos. Finalizando la sección 2 desarrollaremos los conceptos de biálgebra y producto tensorial de módulos y comódulos. Temas fundamentales para la última Sección de la tesis que tratará entre otras cosas sobre construcción universal.

En la **Sección 3** abarcaremos álgebras de Hopf, la noción de antípoda, luego la noción de elementos de tipo grupo (group-like elements), donde para H coálgebra, denotado $G(H)$. Si H es una biálgebra resulta un semigrupo. Vemos además que si H es Hopf, $G(H)$ resulta un grupo. Además dado un semigrupo M veremos que el álgebra de semigrupo $H = k[M]$ como biálgebra resulta Hopf si y sólo si M es grupo. Finalizando esta Sección consideraremos ejemplos sobre elementos primitivos relacionados con álgebras de Hopf.

En la **Sección 4** desarrollaremos algunas biálgebras universales. Trabajaremos sobre la biálgebra $\mathbb{S}(C) = k[x_1, \dots, x_n]$, el anillo de polinomios en las variables $x_1, \dots, x_n$, donde $\{x_1, \dots, x_n\}$ es base de una coálgebra C. Desarrollaremos también el álgebra tensorial $T(V)$ donde V es un k-espacio vectorial, para llegar a la biálgebra $T(C)$, el álgebra tensorial en una coálgebra C.

A la vez en los tres casos mencionados enunciaremos y demostraremos sus propiedades universales. Llegando al final de esta Sección trabajaremos sobre la nociones de co-ideal, bi-ideal y enunciaremos teoremas y propiedades con los mismos. Para luego analizar cocientes de biálgebras y cocientes de álgebra de Hopf.

En la **Sección 5** que es la última, el punto fuerte es el desarrollo de una *construcción universal* teniendo como base el álgebra tensorial TC para C una coálgebra. Si bien esta parte puede lleara ser considerada como *folklore* entre los especialistas, no está descripta explícitamente -a conocimiento del director de esta tesis- en ningún lugar de la literatura, se deja entrever por ejemplo en los trabajos de Duvois-Viollete y Launer [DL] o más recientemente los trabajos de Chelsea Waltonn y colaboradores (por ejemplo [CWW]). En esta sección se conjugan nociones antes tratadas de la tesis como las nociones de cómodulos y biálgebras. Más precisamente dado un espacio vectorial V de dimesión finita y una coálgebra también de dimensión finita, cuya comultiplicación está definida de una manera especial, se lo considera a V como C-comódulo, extendiéndolo a TC-comódulo. Pero como ya hemos visto que TC es una biálgebra se puede generalizar esto aún más y establecer que $V^{\otimes l}$ es un TC-comódulo para todo $l \in \mathbb{N}_0$.

Como consecuencia de lo citado, dada una aplicación lineal

$$f : V^{\otimes n_1} \to V^{\otimes n_2},$$

su condición de colinealidad fuerza a considerar un bi-ideal de TC al que llamamos $\mathcal{I}_f$, para dar lugar a la definición del cociente $A(f) := TC/\mathcal{I}_f$ que es una biálgebra y además tiene una *propiedad universal respecto a la colinealidad de la aplicación* f. Esta construcción es lo que llamamos el semigrupo cuántico asociado a f, o la biálgebra de simetrías asociadas de f.

Todo esto se generaliza rápdidamente a una 'Familia de flechas': dado un espacio vectorial V consideramos varias aplicaciones (flechas)

$$\left\{ f_i : V^{\otimes n_i^1} \to V^{\otimes n_i^2} \right\}_{i \in \Lambda}$$

como parte de un dato alebraico asociado a V. Tenemos el ideal

$$\mathcal{I}_{f_\Lambda} = \sum_{i \in \Lambda} \mathcal{I}_{f_i} \subset TC$$

y claramente $\mathcal{I}_{f_\Lambda}$ resulta un bi-ideal por ser suma de bi-ideales. Así consideramos ahora la biálgebra

$$A(f_\Lambda) = TC/\mathcal{I}_{f_\Lambda}$$

Finalizando, esta nueva generalización se aplica de ejemplo a los espacios vectoriales concretos $V = k[x]/x^2 = k1 \oplus kx$ y $V = k \times k$ que a la vez son álgebras unitarias. Se construye la biálgebra $A(f_\Lambda)$ para cada espacio vectorial, cada uno en base a dos flechas naturales que tienen que ver con que los mismos a la vez son álgebras unitarias: en ambos casos se usa la flecha multiplicación

$$m : V^{\otimes 2} \to V$$

y la flecha unidad

$$u : k = V^{\otimes 0} \to V$$

Es decir, la familia en estos dos ejemplos es $\{f_i : i \in \Lambda\} = \{m, u\}$

Luego como algo interesante, escribiendo $A = A(f_\Lambda)$, se analizan los morfismos de álgebras $\phi : A \to k$ para cada uno de los espacios vectoriales anteriores. Trabajar con estos morfismos da lugar a tratar la biálgebra "el abelianizado"

$$A_{abel} = A/([A, A])$$

donde $([A, A])$ es el ideal generado por el conjunto de los corchetes. En primer lugar, observamos que si A es biálgebra, entonces el ideal $([A, A])$ siempre es bi-ideal, por lo que A_{abel} es siempre una biálgebra. A la vez, si A es Hopf A_{abel} también. Estos resultados clásicos se dearrollan en la Sección 5.

Dada A= la biálgebra / álgebra de Hopf (en principio no conmutativa), su abelianizado corresponde con un *semigrupo / grupo* en el sentido clásico, por lo tanto las biálgebras construidas, que son mucho mas "grandes" que su abelianizado, pueden interpretarse como simetrías nuevas "no clásicas" encontradas de manera universal.

Ilustramos esto último con el ejemplo de k^M con M monoide finito con unidad, y describiendo el abelianizado para cada biálgebra $A = A(f_\Lambda)$ respectiva a cada álgebra unitaria

$$V = k[x]/x^2 = k1 \oplus kx \qquad \text{y} \qquad V = k \times k.$$

En el primer caso, esta construcción muestra la estructura diferencial graduada de $k[x]/x^2$, mientras que el abelianizado sólo "ve" la graduación; en el caso $k \times k = k^{\{1,2\}}$, la versión no conmutativa es una biálgebra de dimensión infinita, mucho mas grande que $k^{M^{op}}$ que tiene dimensión 4, donde M= el monoide de funciones de $\{1, 2\}$ en $\{1, 2\}$, que tiene 4 elementos.

Hacemos notar que todos los ejemplos son con álgebras extremadamente sencillas, y sin embargo los resultados son no triviales, por lo que esperamos que las herramientas sean de interés general.

Índice

1. Preliminares Elementales

Durante toda la tesis k denotará un cuerpo. Recordemos que el producto tensorial sobre k es una operación qua a dos espacios vectoriales V y W le asigna un tercer espacio vectorial $V \otimes_k W$ junto con una aplicación bilineal $T : V \times W \to V \otimes_k W$ que tiene la siguiente propiedad universal, dada una aplicación bilineal $B : V \times W \to X$, con X un espacio vectorial, existe una única aplicación lineal $L_B : V \otimes_k W \to X$ que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"'] & V \otimes_k W \arrow[dl, "L_B"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Para cada par $(v, w) \in V \times W$ denotamos $v \otimes w := T(v, w)$. El producto tensorial será de utilidad al estudiar k-algebras y estructuras algebraicas relacionadas pues la multiplicación de una k-algebra A es, en particular, una función k-bilineal $A \times A \to A$, por lo tanto le corresponde una transformación k-lineal $m : A \otimes A \to A$ $((a, b) \mapsto a \otimes b)$. En toda la tesis supondremos familiaridad con los productos tensoriales.

2. Biálgebras, módulos y comódulos

2.1. Álgebras

Definición 2.1. Una k-álgebra (unitaria) es un par (A, m) donde A es un espacio vectorial y $m : A \otimes A \to A$ es una transformación lineal, $a \otimes b \mapsto ab$ tal que $a(bc) = (ab)c$. Además tenemos unidad: $\exists 1_A \in A$ tal que $1_A a = a 1_A = a$. Pediremos además que $\lambda a = a\lambda$ para todo $\lambda \in k$.

2.2. Ejemplos de k-álgebras

Ejemplo 2.2. Podemos citar al conjunto k^X, formado por las funciones de un conjunto X al cuerpo k, donde la suma y el producto es punto a punto. La unidad está dada por la función constantemente 1. De esta manera k^X resulta una k-álgebra unitaria.

Ejemplo 2.3. El álgebra de grupo $k[G]$. Sea G un grupo. Notemos por $k[G]$ al espacio vectorial cuya base es $\{g/g \in G\}$ con coeficientes en k. A la vez podemos definir en $k[G]$ una estructura de k-álgebra, escribiendo el producto por, dados dos elementos $\sum_{g\in G} \alpha_g g, \sum_{h\in G} \beta_h h$, se tiene que

$$(\sum_{g\in G} \alpha_g g)(\sum_{h\in G} \beta_h h) = \sum_{g,h\in G} \alpha_g \beta_h (gh) = \sum_{g\in G}(\sum_{h\in G} \alpha_h \beta_{h^{-1}g})g.$$

Notemos que para definir esta estructura de álgebra sobre $k[G]$ alcanza con pedir que G sea un monoide.

2.2.1. k-algebras de dimension 2

Si k es algebraicamente cerrado veremos que, a menos de isomorfismo, habrá solo dos k-álgebras de dimensión 2. En A tenemos el uno $1_A =: 1$ y A como espacio vectorial tiene dimensión 2, podemos completar a una base $\{1, x\}$ con $x \in A$. Entonces podemos expresar x^2 como combinación lineal de la base. Escribamos entonces:

$$x^2 = \beta x + \alpha 1$$

donde $\beta, \alpha \in k$ se llaman constantes de estructura.

Por lo tanto

$$x^2 - \beta x - \alpha 1 = 0,$$

tenemos $p(X) = X^2 - \beta X - \alpha \in k[X]$. Notar que como k es algebraicamente cerrado, las raíces de p están en k. Por otro lado por la base elegida podemos afirmar que

$$A \cong \frac{k[X]}{(p)}$$

como k-álgebras.

En efecto, el único morfismo de k-álgebras determinado por

$$k[X] \to A$$

$$X \mapsto x$$

es claramente sobreyectivo y se factoriza por el cociente por $(p(X))$=ideal generado por $p(X)$, induciendo un epimorfismo

$$k[X]/(p(X)) \to A$$
$$\overline{X} \mapsto x$$

y por dimensionalidad, resulta un isomorfismo. En adelante identificaremos $\overline{X}$ con $x \in A$.

Tenemos dos posibilidades, que p tenga dos raíces distintas en k o que p tenga una raíz doble en k. Factorizando p podemos escribir que

$$A \cong \frac{k[X]}{((X-\lambda_1)(X-\lambda_2))} \tag{1}$$

con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, o en otro caso

$$A \cong \frac{k[X]}{((X-\lambda_0)^2)} \tag{2}$$

donde λ_1, λ_2 son dos raíces distintas de p y λ_0 una raíz doble, en el caso de que así sea. Además para el caso (1) la relación entre las constantes de estructura será:

$$\beta^2 + 4\alpha = 0$$

para (2) existirá $\gamma \neq 0$, $\gamma \in k$ tal que

$$\beta^2 + 4\alpha = \gamma^2.$$

Observación 2.4. Las k-álgebras en (1) y (2) no son isomorfas entre sí.

En el caso (1) podemos ver este cociente a qué conjunto es isomorfo como k-álgebra, podemos recurrir al teorema chino del resto. Lo enunciamos:

Teorema 2.5. *Teorema chino del resto*

Sea A es un anillo conmutativo. Si $I, J \subset A$ son ideales coprimos, es decir, $I+J = A$, entonces

$$\frac{A}{IJ} \cong \frac{A}{I} \times \frac{A}{J}.$$

Utilizando este teorema podemos ver que

$$\frac{k[X]}{(p)} \cong \frac{k[X]}{(X-\lambda_1)} \times \frac{k[X]}{(X-\lambda_2)} \tag{3}$$

ya que $X-\lambda_1$ y $X-\lambda_2$ son polinomios coprimos. Más precisamente,

$$1 = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(X-\lambda_1) + \frac{-1}{\lambda_2-\lambda_1}(X-\lambda_2).$$

Pero a la vez sabemos que cada sumando en (3) es isomorfo como anillo a k respectivamente. Por ejemplo para ver que

$$\frac{k[X]}{(X-\lambda_1)} \cong k$$

tomamos $f : k[X] \to k$, $p \mapsto p(\lambda_1)$, que es morfismo de anillos y se puede ver que
$kerf = ((X-\lambda_1))$, además f es sobreyectiva, por el teorema de isomorfismo, tenemos que

$$\frac{k[X]}{(X-\lambda_1)} \cong k.$$

Por lo tanto desde (1) podemos afirmar que

$$A \cong k \times k$$

en principio como anillos. Pero también como k-álgebras ya que $k \times k$ es también un k-espacio vectorial con el producto lugar a lugar que es bilineal, lo que lo convierte en k-álgebra. Además $k \times k$ es una k-álgebra unitaria con $1 := (1,1)$.

Como antes dijimos, el otro caso que podría ocurrir es que

$$A \cong \frac{k[X]}{((X-\lambda_0)^2)},$$

a través del isomorfismo de anillos dado por $X \mapsto \tilde{X} = X - \lambda_0$ podríamos decir directamente que

$$A \cong \frac{k[X]}{(X^2)}$$

por comodidad.
Observación: en la k-álgebra $\frac{k[X]}{(X^2)}$ el producto es: dados $p, q \in k[X]$

$$[p].[q] = [pq]$$

además para $\lambda \in k$,$p \in k[X]$

$$\lambda[p] = [\lambda p].$$

El 1 es $[1]$ y el producto entre clases antes mencionado cumple asociatividad.

Observamos que $A = k[X]/(X^2)$ y $B = k \times k$ son dos k-álgebras no isomorfas entre sí, pues por ejemplo si nos fijamos en los elementos nilpotentes, en B el único elemento nilpotente es el $(0,0)$. En cambio en el álgebra A tenemos por ejemplo el elemento $\overline{X}$ que es distinto del elemento nulo ya que $X \notin (X^2)$, para el mismo se tiene que

$$\overline{X}^2 = \overline{X^2} = \overline{0}.$$

Es decir en A tenemos un elemento no nulo $\overline{X}$ que es nilpotente, lo que no ocurre en B.

2.2.2. k-álgebras de dimensión 3

Ahora analizaremos las k-álgebras de dimensión 3 para k algebraicamente cerrado. Encabezaremos esta parte acudiendo a ciertas propiedades, pero éstas tienen que ver con una construcción similar que hicimos para el caso de k-álgebras de dimensión 2. Donde habíamos tomado un base de A como k-espacio vectorial de dimensión 2. De todas maneras al final haremos comentarios que tienen que ver con contrucciones similares a las ya hechas.

A continuación enunciaremos estas propiedades y algunas definiciones.

Definición 2.6. Un anillo A se llama **local** si se cumplen las siguientes propiedades que a la vez son equivalentes.

- A tiene un único ideal por izquierda maximal.
- A tiene un único ideal por derecha maximal.

Si se cumplen estas propiedades, el ideal a izquierda maximal coincide con el ideal a derecha maximal. En el caso en que A sea conmutativo no es necesario distinguir entre ideales a uno u otro lado, entonces un anillo conmutativo es local si y solo si tiene un único ideal maximal.

Esta misma definición puede trasladarse al caso de k-álgebras, entonces podemos hablar de k-álgebras locales.

Proposición 2.7.

- *Si A es una k-álgebra de dimensión finita, entonces*

$$A = A_1 \times \cdots \times A_r$$

  con A_i k-álgebra local y de dimensión finita.
- *Con la misma notación para A_i, podemos escribir además que*

$$A_i = L_i \oplus m_i$$

  con L_i extensión algebraica de k, $L_i \subset A_i$ y m_i el único ideal a izquierda (o a derecha) maximal de A_i que se lo puede ver también como un L_i-espacio vectorial.
- *Si el grado de la extensión $L_i|_k$ es r_i y la dimensión de m_i es d_i,*

$$\dim_k(A_i) = r_i(d_i + 1)$$

- *Los ideales m_i son nilpotentes.*
- *La única k-álgebra de dimensión 1 es k.*

Corolario 2.8. *Si asumimos $k = \overline{k}$, entonces lo anterior se simplifica un poco pues no hay extensiones finitas de k, y el enunciado queda:*

- *Si A es una k-álgebra de dimensión finita, entonces*

$$A = A_1 \times \cdots \times A_r$$

con A_i k-álgebra local y de dimensión finita.
- *Con la misma notación para A_i, podemos escribir además que*

$$A_i = k \oplus m_i$$

donde m_i es el único ideal a izquierda (o a derecha) maximal de A_i. Notar que la suma directa es como espacios vectoriales pero no como k-algebras.
- *Los ideales m_i son nilpotentes.*
- *La única k-álgebra de dimensión 1 es k.*

Vamos a hacer entonces una lista de las k-álgebras A (a menos de isomorfismo) de dimensión 3. Teniendo en cuenta las propiedades vistas, veremos que hay tres casos para A.

(a) A es suma de tres álgebras locales de dimensión 1
(b) A es suma de un álgebra local de dimensión 1 y un álgebra local de dimensión 2
(c) A es ella misma un álgebra local de dimensión 3.

Para el caso (a) obtendremos que

$$A \cong k \times k \times k$$

Para el caso (b) tenemos dos clases distintas.

$$A \cong k \times \frac{k[x]}{(x^2)}$$

o sino

$$A \cong k \oplus m_A \tag{4}$$

donde m_A es el único ideal maximal de A y

$$dim_k(m_A) = 2.$$

En (4) tenemos además dos subcasos: dado que m_A es nilpotente, existe $r \leq 3$ con $m_A^r = 0$.

Por un lado:
podría ocurrir que $m_A^2 = 0$, tomemos una base de m_A como k-espacio vectorial, sea $\{x, y\}$ dicha base, se cumple que

$$x^2 = y^2 = xy = 0 = yx$$

por lo tanto A resulta conmutativa y

$$A \cong \frac{k[x, y]}{(x^2, y^2, xy, yx)}$$

con el iso que envía $1, x, y$ a $1, [x], [y]$ respectivamente.

Por otro lado:

podría ocurrir que $m_A^3 = 0$ con $m_A^2 \neq 0$. Analicemos primero el caso conmutativo. Tomamos una base de $m_A, \{x, y\}$, si por ejemplo ocurre que $x^2, y^2 = 0$ entonces $xy \neq 0$, pues en caso contrario $m_A^2 = 0$. Entonces

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 2xy \neq 0.$$

Así, existe $h \in m_A$, $h^2 \neq 0$.

Ahora veamos que h, h^2 son linealmente independientes:

si $h^2 = \lambda h$ con $\lambda \in k$, entonces

$$h^3 = \lambda h^2 = \lambda^2 h$$

pero $h^3 \in m_A^3 = 0$, entonces $\lambda = 0$, por lo tanto $h^2 = 0$, lo cual no puede ser.

Por último 1 es base de k, así que $\{1, h, h^2\}$ es base de A con $h^3 = 0$, por lo tanto

$$A \cong \frac{k[x]}{(x^3)}$$

Entonces las k-álgebras conmutativas de dimensión 3 con k algebraicamente cerrado, no son todas de la forma $\frac{k[x]}{(f(x))}$ con $f(x) \in k[x]$ polinomio de grado 3, ya que son:

- $\dfrac{k[x, y]}{(x^2, y^2, xy, yx)}$
- $\dfrac{k[x]}{(f(x))}$ donde $f \in k[x]$ es un polinomio de grado 3, en este caso tenemos:

f tiene tres raíces distintas:

$$A \cong k \times k \times k$$

f tiene dos raíces distintas, una de ellas es doble:

$$A \cong k \times \frac{k[x]}{(x^2)}$$

f tiene una raíz triple:

$$A \cong \frac{k[x]}{(x^3)}.$$

Veamos ahora el caso no necesariamente conmutativo: Para esto introducimos la noción de sistema de idempotentes maximales:

Definición 2.9. Un subconjunto $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq A$ se dice un subconjuto de idempotentes que parten al 1 si

- $e_i \neq 0$ para todo i (i.e. no triviales),

- $e_i e_j = \delta_{ij} e_i \; \forall i, j$. Es decir, $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = e_j e_i = 0$ si $i \neq j$ (idempotentes ortogonales)
- $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$ (parten al uno).

Observación 2.10. Un subconjuto de idempotentes que parten al 1 es necesariamente l.i.

Demostración. En efecto: tomamos una combinación lineal

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

si multiplicamos por cualquier e_j a ambos miembros obtenemos que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i e_j = \alpha_j e_j = 0,$$

pero estamos asumiendo que $e_j \neq 0$, por lo tanto $\alpha_j = 0$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. □

Volviendo al caso de k-álgebras de dimension 3, si A admitiera un subconjunto de idempotentes que parten al 1 de 3 elementos $\{e_1, e_2, e_3\}$, entonces $A \cong k \times k \times k$ (en particular A es conmutativa, y ya la hemos descrito antes).

Si A admitiera un subconjunto de idempotentes que parten al 1 de dos elementos e_1, e_2, tendríamos

$$1 = e_1 + e_2$$

y que A contiene a $ke_1 \oplus ke_2 \cong k \times k$ como subálgebra. También es claro que a partir de $1 = e_1 + e_2$ tenemos la siguiente descomposición como suma de espacios vectoriales

$$A = 1 \cdot A \cdot 1 = (e_1 + e_2) A (e_1 + e_2) = e_1 A e_1 + e_1 A e_2 + e_2 A e_1 + e_2 A e_2$$

donde, en general, $xAy = \{xay : a \in A\}$. Observar que esta suma es directa, para ello podemos ver que $e_i A e_j \cap (\sum_{(k,l) \neq (i,j)} e_k A e_l) = 0$ para cada $e_i A e_j$. Sea entonces $e_i a e_j \in e_i A e_j$ tal que

$$e_i a e_j = \sum_{(k,l) \neq (i,j)} e_k a_{kl} e_l \qquad a_{kl} \in A$$

pero si multiplicamos a izquierda por e_i, obtenemos que

$$e_i a e_j = e_i a_{il} e_l \qquad l \neq j$$

y si ahora multiplicamos a derecha por e_j y obtenemos que

$$e_i a e_j = 0$$

También, como los e_i son idempotentes, $e_i = e_i e_i e_i \in e_i A e_i$, por lo tanto $e_1 A e_1$ y $e_2 A e_2$ son subespacios no nulos. Por otra parte, no puede ser que tanto $e_1 A e_2$ y $e_2 A e_1$ sean no nulos pues la dimension de A es tres. Cambiando eventualmente los nombres, asumimos que $e_2 A e_1 = 0$.

Si $e_1Ae_2 = 0$, entonces $A = e_1Ae_1 \times e_2Ae_2$ daría un isomorfismo entre A y un producto cartesiano (con producto coordenada a coordenada), y por lo tanto cada e_iAe_i sería de dimensión 1 o 2, y esas ya las hemos calculado, asi que supondremos $e_1Ae_2 \neq 0$. En este caso, como $\dim A = 3$ y $A = e_1Ae_1 \oplus e_1Ae_2 \oplus e_2Ae_2$ necesariamente cada una de las dimensiones es 1. Tomamos una base de la forma $\mathcal{B} = \{e_1, \alpha, e_2\}$ con $0 \neq \alpha \in e_1Ae_2$. A partir de la propiedad de idempotencia de los e_i tenemos la siguiente tabla de multiplicación:

$$e_1^2 = e_1,\ e_2^2 = e_2,\ e_1e_2 = 0 = e_2e_1$$

$$e_1\alpha = \alpha = \alpha e_2$$
$$\alpha^2 = 0 = e_2\alpha = \alpha e_1$$

Pues, en efecto, si escribimos $\alpha = e_1ae_2$ para cierto $a \in A$, tenemos

$$e_1\alpha = e_1e_1ae_2 = e_1ae_2 = \alpha$$

por el otro

$$\alpha e_2 = e_1ae_2e_2 = e_1ae_2 = \alpha$$

Además

$$\alpha^2 = e_1ae_2e_1ae_2 = 0$$

pues $e_2e_1 = 0$ y

$$e_2\alpha = e_2e_1ae_2 = 0 = e_1ae_2e_1 = \alpha e_1.$$

Observación 2.11. Una manera de realizar este álgebra es considerando el álgebra de matrices triangulares superiores. Más precisamente, si

$$T_2(k) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in k \right\}$$

entonces $A = ke_1 \oplus k\alpha \oplus ke_2 \cong T_2(k)$ via

$$e_1 \leftrightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \alpha \leftrightarrow M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 \leftrightarrow E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Acá observemos que

$$E_1{}^2 = E_1$$
$$E_2{}^2 = E_2$$

y que por ejemplo

$$M_\alpha = E_1M_\alpha E_2$$

es decir $M_\alpha \in E_1T_2(k)E_2$

Para ver que con el ejemplo anterior hemos agotado todas las posibilidades,razonamos de la siguiente forma:

Como k es algebraicamente cerrado y $\dim_k A = 3 < \infty$, A no puede ser un anillo de división porque si no, para cualquier $z \in A$, si $k[z] \subset A$ es la subalgebra generada por z, entonces $k[z]$ deberia ser una extensión de cuerpo de k. Por lo tanto A debe tener algún ideal (a izquierda) propio, y por lo tanto algun ideal (a izquierda) maximal M. Escribimos $A = k \oplus M$. Tomemos $0 \neq x \in M$ arbitrario. Si $x^2 \neq 0$, entonces

1. o bien x^2 no es combinación lineal de 1 y x, en ese caso $A = k \oplus kx \oplus kx^2$ y A es conmutativa,
2. o bien x^2 es combinación de 1 y x. En ese caso $k[x] \subset A$, la subalgebra generada por x en A, es isomorfa a
   a) $k[x]/((x-\lambda)^2)$
   b) $k \times k$.

Habiendo descartado que A sea conmutativa, no consideramos el caso 1. Habiendo descartado que contenga por lo menos dos idempotentes ortogonales que suman 1, tambien descartamos el caso 2(b). Queda entonces el caso 2(a): pero si $\lambda \neq 0$ y $(x-\lambda)^2 = 0$, entonces

$$x^2 = 2\lambda x + \lambda^2$$

o bien

$$\frac{1}{\lambda^2}(x^2 - 2\lambda x) = 1$$

y por lo tanto el ideal (tanto a izquierda como a derecha) generado por x contendría al 1, lo cual es absurdo porque no sería propio. Concluimos entonces que

$$A = k \oplus M$$

con $x^2 = 0 \forall x \in M$.

Tomamos una base $\mathcal{B} = \{1, x, y\}$ con x, y en M dos elementos k-linealmente independientes. Sabemos $x^2 = 0 = y^2$. También $(x+y)^2 = 0$. Pero entonces valdría $xy = -yx$ ya que

$$(x+y)^2 = (x+y).(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = 0,$$

pero a la vez como $x^2 = 0 = y^2$, se tiene que $xy = -yx$.

Se dan los siguentes casos:

- $xy = 0$, luego $yx = 0$ y A sería conmutativa.
- $xy \neq 0$. En este caso podría ser
  - xy es un múltiplo no nulo de x. Tomamos como base $\{1, xy, y\}$, resulta $\{xy, y\}$ una base de M. Pero en esta nueva base

    $$xy \cdot y = xy^2 = 0$$

    $$y \cdot xy = (yx)y = -(xy)y = -xy^2 = 0$$

    y A es conmutativa.

- $xy \neq 0$ pero xy no es un multiplo de x. En este caso $\{x, xy\}$ es una base de M y también $x(xy) = 0 = (xy)x$, ya que

$$x(xy) = x^2 y = 0$$

$$(xy)x = (-yx)x = -yx^2 = 0$$

luego A es conmutativa.

En resumen, tenemos la siguiente lista,

Proposición 2.12. *Existen 4 clases de isomorfismo de k-algebras de dimensión 3:*

$$A_1 = k \times k \times k, \;\; A_2 = k \times k[x]/x^2, \;\; A_3 = k[x]/x^3,$$

$$A_4 = T_2(k) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in k \right\}$$

2.3. Coálgebras

Definición 2.13. Una k-coálgebra (counitaria) es un par (C, Δ) donde C es un espacio vectorial y $\Delta : C \to C \otimes C$ es una transformación lineal tal que cumple coasociatividad, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{Id}"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

Además tenemos una counidad que es una transformación lineal $\epsilon : C \to k$ tal que el diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[r, "\epsilon\otimes\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\epsilon"'] & k \otimes C \arrow[d, "\cong"] \\ C \otimes k \arrow[r, "\cong"] & C \arrow[ul, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

2.4. Ejemplos de k-coálgebras

Ejemplo 2.14. Sea X un conjunto y consideremos $k[X] = \oplus_{x \in X} kx$ el espacio vectorial con base X. Definimos

$$\Delta(\sum_{x \in X} \lambda_x x) = \sum_{x \in X} \lambda_x x \otimes x.$$

Es decir, se define $\Delta(x) = x \otimes x$ para todo x en X y se extiende por linealidad. Se define la counidad por $\epsilon(x) = 1$ para todo x en X. O bien $\epsilon(\sum_{x \in X} \lambda_x x) = \sum_{x \in X} \lambda_x$. De esta manera, $k[X]$ resulta una coálgebra coasociativa.

Lema 2.15. *Sea $c \in k[X]$ un elemento arbitrario. Es decir, una combinación lineal de elementos de X con coeficientes en k. Si $c \neq 0$ y $\Delta(c) = c \otimes c$, entonces $c \in X$.*

Demostración. Tenemos que

$$c = \sum_{x \in X} \lambda_x x \tag{5}$$

y que

$$\Delta(c) = \sum_{x \in X} \lambda_x x \otimes x. \tag{6}$$

Además tenemos que

$$\Delta(c) = c \otimes c.$$

Pero usando (5), podemos escribir

$$\Delta(c) = (\sum_{x \in X} \lambda_x x) \otimes (\sum_{x \in X} \lambda_x x),$$

pero esta igualdad la podemos escribir como

$$\Delta(c) = \sum_{x,y \in X} \lambda_x \lambda_y x \otimes y.$$

Comparando esto último con (6) y teniendo en cuenta que $\{x \otimes y\}_{x,y \in X}$ es una base de $k[X] \otimes k[X]$ se tiene que

$$\lambda_x = \lambda_x^2 \qquad \forall x \in X \tag{7}$$

y que

$$\lambda_x \lambda_y = 0 \qquad \forall x \neq y. \tag{8}$$

De (7) se obtiene que, para cada $x \in X$, $\lambda_x = 0$ ó $\lambda_x = 1$. Pero a la vez sabemos que $c \neq 0$, entonces existe $\lambda_{x_0} = 1$ para algún $x_0 \in X$, por lo tanto por (8) $\lambda_y = 0$ para todo $y \neq x_0$, con lo cual obtenemos que

$$c = \sum_{x \in X} \lambda_x x = 1 x_0 = x_0,$$

por lo tanto $c \in X$. Notar que x_0 es arbitrario en el sentido de que como $c \neq 0$, siempre existirá $\lambda_x = 1$ para algún $x \in X$. □

2.4.1. Dual de un álgebra de dimensión finita

Ejemplo 2.16. A modo de motivación de dual de un álgebra de dimensión finita exhibiremos el siguiente ejemplo. Tenemos el álgebra de matrices $A = M_n(k)$ con la multiplicación usual y unidad Id, entonces su dual $A^* = (M_n(k))^*$ resulta una coálgebra con comultiplicación

$$\Delta : A^* \to A^* \otimes A^* \cong (A \otimes A)^*$$

$$\Delta(f)(A \otimes B) = f(A \cdot B) \qquad A, B \in M_n(k)$$

y counidad $\epsilon : A^* \to k$

$$\epsilon(f) = f(\mathrm{Id})$$

Observación 2.17. Tenemos que $\{E_i^j\}$ es una base para $M_n(k)$ como k-espacio vectorial, donde E_i^j es la matriz con coeficientes en k que tiene un 1 en la fila i y columna j, el resto de los coeficientes es cero. Por lo tanto tenemos automáticamente una base $\{e_i^j\}$ para $(M_n(k))^*$ que es la base dual de $\{E_i^j\}$, donde

$$e_i^j(E_k^l) = \begin{cases} 1 & i = k \text{ y } j = l \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

En esta base, resulta

$$\Delta(e_i^j) = \sum_{k=1}^{n} e_i^k \otimes e_k^j$$

pues, dados i, j fijos se tiene que

$$\Delta(e_i^j) = \sum_{k,l,p,s} \alpha_{ij}^{klps} e_k^l \otimes e_p^s,$$

por lo tanto

$$\Delta(e_i^j)(E_\lambda^\alpha \otimes E_{\lambda'}^{\alpha'}) = \sum \alpha_{ij}^{klps} e_k^l(E_\lambda^\alpha) e_p^s(E_{\lambda'}^{\alpha'})$$

para todo $\lambda, \alpha, \lambda', \alpha'$, con lo que obtenemos $\Delta(e_i^j)(E_\lambda^\alpha \otimes E_{\lambda'}^{\alpha'}) = 1$ si $\alpha = \lambda', \alpha' = j, \lambda = i$ y es igual cero en caso contrario. Por otra parte $\sum \alpha_{ij}^{klps} e_k^l(E_\lambda^\alpha) e_p^s(E_{\lambda'}^{\alpha'}) = \alpha_{ij}^{\lambda\alpha\lambda'\alpha'}$, es decir los términos de esta sumatoria se anulan todos salvo para el término en el que $k = \lambda, l = \alpha, p = \lambda', s = \alpha'$. De todo esto se concluye que $\alpha_{ij}^{\lambda\alpha\lambda'\alpha'} = 1$ si $\alpha = \lambda', \alpha' = j, \lambda = i$ y es igual a cero en caso contrario. Como $\lambda, \alpha, \lambda', \alpha'$ son arbitrarios se tiene que

$$\Delta(e_i^j) = \sum \alpha_{ij}^{klps} e_k^l \otimes e_p^s = \sum_{k=1}^{n} e_i^k \otimes e_k^j$$

haciendo un cambio de índices.

La counidad esta dada por

$$\epsilon(e_i^j) = \delta_i^j$$

Con la motivación del ejemplo anterior, establecemos las siguientes proposiciones:

Proposición 2.18. *Si A es una álgebra de dimensión finita, entonces $C := A^*$ es siempre una coálgebra con comultiplicación $\Delta : C \to C \otimes C$ donde $C \otimes C = A^* \otimes A^* \cong (A \otimes A)^*$, entonces tiene sentido definir*

$$\Delta(f)(a \otimes b) = f(ab) \qquad a, b \in A$$

con counidad $\epsilon : C \to k$ dada por

$$\epsilon(f) = f(1)$$

donde 1 es la unidad en A.

Demostración. El isomorfismo $A^* \otimes A^* \cong (A \otimes A)^*$ dado por $\phi \otimes \psi \mapsto \Big((a \otimes b) \mapsto \phi(a)\psi(b)\Big)$(en dimension finita) es lo suficientemente natural, este hecho hace que dualizando el diagrama de asociatividad para el álgebra A se llegue al diagrama de coasociatividad de $C = A^*$ $\square$

Proposición 2.19. *Si C es una coálgebra (puede ser de dimensión finita o infinita), entonces $A := C^*$ es siempre un álgebra con la multiplicación*

$$(\phi \star \psi)(c) := \phi(c_{(1)})\psi(c_{(2)}),$$

donde $\phi, \psi \in C^*$, $c \in C$, $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$.

La multiplicación $\star$ suele llamarse producto de convolución.

Corolario 2.20. *En dimensión finita, existe una correspondencia biyectiva entre álgebras y coálgebras. Más precisamente, si C es coálgebra, C^* es un álgebra con la convolución, y $(C^*)^*$ es una coálgebra por ser dual de un álgebra, y la aplicación canónica $C \to C^{**}$ es un isomorfismo de coálgebras. Similarmente para $A \to A^{**}$.*

Más generalente, es válido lo siguiente:

Proposición 2.21. *Sea A un álgebra y C una coálgebra, entonces*

$$\mathrm{Hom}_k(C, A)$$

resulta un álgebra asociativa con la operación

$$\phi \star \psi = m_A \circ (\phi \otimes \psi) \circ \Delta_C.$$

En elementos,

$$(\phi \star \psi)(c) = \phi(c_1)\psi(c_2).$$

En particular, para $A = k$ tenemos la estructura de álgebra en C^*.

Demostración. Queremos ver la asociatividad, es decir

$$(\phi \star \psi) \star \delta = \phi \star (\psi \star \delta)$$

para $\phi, \psi, \delta \in \mathrm{Hom}(C, A)$.

Sea $c \in C$, por un lado

$$((\phi \star \psi) \star \delta)(c) = (\phi \star \psi)(c_1)\delta(c_2) = (\phi(c_{1_1})\psi(c_{1_2}))\delta(c_2)$$

por el otro

$$(\phi \star (\psi \star \delta))(c) = \phi(c_1)(\psi \star \delta)(c_2) = \phi(c_1)(\psi(c_{2_1})\delta(c_{2_2})).$$

Pero por la asociatividad del álgebra A, podemos escribir directamente que

$$(\phi(c_{1_1})\psi(c_{1_2}))\delta(c_2) = \phi(c_{1_1})\psi(c_{1_2})\delta(c_2) \tag{9}$$

y que

$$\phi(c_1)(\psi(c_{2_1})\delta(c_{2_2})) = \phi(c_1)\psi(c_{2_1})\delta(c_{2_2}) \tag{10}$$

Aquí hemos utilizamos que

$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$$

$$\Delta(c_1) = c_{1_1} \otimes c_{1_2}$$
$$\Delta(c_2) = c_{2_1} \otimes c_{2_2}$$

y aplicando la coasociatividad de Δ, podemos ver que

$$c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2}.$$

Si pensamos que tenemos la aplicación $(\phi \otimes \psi \otimes \delta)$ tal que

$$(\phi \otimes \psi \otimes \delta)(c \otimes c' \otimes c'') = \phi(c)\psi(c')\delta(c'')$$

los segundos miembros en (9) y (10) se pueden escribir como $(\phi \otimes \psi \otimes \delta)(c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2)$ y como $(\phi \otimes \psi \otimes \delta)(c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2})$ respectivamente, pero entonces ambos miembros son en realidad iguales. Así se cumple la asociatividad para $\mathrm{Hom}(C, A)$. □

Un ejemplo que no es necesariamente de dimensión finita es el siguiente:

Ejemplo 2.22. Sea X un conjunto y $C = k[X]$ la coálgebra como en el Ejemplo 2.14, entonces $(k[X])^* \cong k^X$, el álgebra de funciones de X en k con la suma y producto punto a punto.

Algunos ejemplos ilustrativos de dimensión finita son los siguientes:

2.4.2. Coálgebras de dimensión 2

Teniendo en cuenta las proposición (2.18), podemos afirmar que habrá dos clases de isomorfismo para las coálgebras de dimensión 2. Cada clase proveniente de cada clase de k-álgebra exhibidas en la sección anterior. Observemos además que si el álgebra A tiene dimensión 2 la correspondiente coálgebra A^* tendrá también dimensión 2.

Por lo tanto tenemos las siguientes k-coálgebras:

$$C \cong (k \times k)^* \tag{11}$$

o bien

$$D \cong \left(\frac{k[X]}{(X^2)} \right)^* . \tag{12}$$

Si en (11) llamamos $A = k \times k$, tenemos entonces el coproducto

$$\Delta : A^* \to A^* \otimes A^* \cong (A \otimes A)^*$$

definido por

$$\Delta(f)((a, b) \otimes (c, d)) = f((ac, bd))$$

y la counidad definida por

$$\epsilon(f) = f((1, 1)).$$

Si tomamos como base $\{e_1, e_2\}$ de $C = A^*$ a la dual de la base $\{(1,0),(0,1)\}$, nos permitirá encontrar las constantes de estructura para $\Delta(e_1)$ y $\Delta(e_2)$. Recordemos que $\{e_i \otimes e_j\}_{i,j\in\{1,2\}}$ es una base de $C \otimes C$ que tiene dimensión 4 como k-espacio vectorial, entonces

$$\Delta(e_1) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(1)} e_i \otimes e_j$$

y

$$\Delta(e_2) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(2)} e_i \otimes e_j$$

pero evaluando cada miembro de estas ecuaciones en los elementos de la base de $A \otimes A$ y utilizando la fórmula (2.18) antes citada, obtenemos que $\alpha_{11}^{(1)} = 1$ y las demás constantes de estructura nulas. Análogamente para $\Delta(e_2)$, encontramos que $\alpha_{22}^{(2)} = 1$ y todas las otras constantes nulas. Por lo tanto concluimos que

$$\Delta(e_1) = e_1 \otimes e_1$$

y que

$$\Delta(e_2) = e_2 \otimes e_2$$

Además

$$\begin{aligned}\epsilon(e_1) &= e_1(1,1)\\ &= e_1(1,0) + e_1(0,1)\\ &= 1\end{aligned}$$

por ser $\{e_1, e_2\}$ la base dual de $\{(1,0),(0,1)\}$.

Análogamente se puede ver que

$$\epsilon(e_2) = 1$$

Generalizando, podemos escribir que

Proposición 2.23. *Si C es una coálgebra y $g \in C$ es tal que $g \neq 0$ y $\Delta g = g \otimes g$ (en ese caso g se llama un elemento de tipo grupo, o group-like), entonces necesariamente $\epsilon(g) = 1$*

Para probar esta proposición, utilicemos la counitariedad. Como el diagrama correspondiente conmuta, tenemos que

$$(\epsilon \otimes \mathrm{Id})\Delta(g) = \epsilon(g)g = g$$

Similarmente utilizando $(\mathrm{Id} \otimes \epsilon)\Delta(g)$.

Entonces obtuvimos que

$$\epsilon(g)g = g$$

Equivalentemente,

$$(\epsilon(g) - 1)g = 0$$

Pero sabemos que g es no nulo en el espacio vectorial C, por lo tanto es linealmente independiente, con lo cual $\epsilon(g) - 1 = 0$, es decir $\epsilon(g) = 1$.

En (12) el coproducto es

$$\Delta(f)([p] \otimes [q]) = f([pq])$$

y la counidad es

$$\epsilon(f) = f([1])$$

Nuevamente tomamos como base de D a $\{u, X\}$ a la base dual de $\{1, x\}$ de $k[x]/(x^2)$, en esta base, la comultiplicación y la counidad están dadas por

$$\Delta(u) = u \otimes u \tag{13}$$

aquí hacemos una pequeña observación, si evaluamos $\Delta(u)(x \otimes x)$, obtenemos que

$$\Delta(u)(x \otimes x) = u(x^2) = u(0) = 0,$$

lo que dice que la constante de estructura correspondiente al elemento $X \otimes X$ de la base de $D \otimes D$ es nulo. Esta es una de las cuentas que se hacen para obtener (13).

Por otro lado

$$\Delta(X) = u \otimes X + X \otimes u$$

y

$$\epsilon(u) = u(1) = 1$$
$$\epsilon(X) = X(1) = 0$$

Generalizando,

Proposición 2.24. *Sea C una coálgebra, g y h dos elementos de tipo grupo (que podrían ser iguales entre sí). Si $X \in C$ es tal que $\Delta X = g \otimes X + X \otimes h$ entonces X se dirá g-h-primitivo. En tal caso, necesariamente $\epsilon(X) = 0$.*

Hagamos su demostración, por counitariedad tenemos que

$$(\epsilon \otimes \mathrm{Id})\Delta(X) = \epsilon(g) \otimes X + \epsilon(X) \otimes h \cong \epsilon(g)X + \epsilon(X)h = X.$$

Obtuvimos,

$$\epsilon(g)X + \epsilon(X)h = X$$

pero como g es un elemento group-like, se tiene que $\epsilon(g) = 1$, por lo tanto

$$\epsilon(X)h = 0,$$

pero estamos asumiendo que h es no nulo, entonces es linealmente independiente, con lo cual $\epsilon(X) = 0$.

2.4.3. Coálgebras de dimensión 3

Teníamos 4 clases de isomorfismo de k-álgebras de dimensión 3:

$$A_1 = k \times k \times k, \;\; A_2 = k \times k[x]/x^2, \;\; A_3 = k[x]/x^3, \;\; A_4 = T_2(k).$$

En consecuencia, existen 4 clases de isomorfismo de k-coalgebras de dimensión 3, que llamamos $C_i := A_i^*$, $i = 1, 2, 3, 4$. Tomando bases

1. $\{e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)\}$ para A_1,
2. $\{e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $X = (0, x)\}$ para A_2,
3. $\{1, x, x^2\}$ para A_3,
4. $\{e_1$,e_2,$\alpha\}$ para T_2.

Ahora calcularemos la formula de la comultiplicación y la counidad, en bases duales, para C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Análogamente a lo hecho antes, para hallar las constantes de estructura que tienen que ver con la comultiplicación Δ evaluaremos en los elementos de la base de $A_i \otimes A_i$, ya que la imagen de Δ está contenida en $A_i^* \otimes A_i^* \cong (A_i \otimes A_i)^*$. Obtenemos lo siguiente

$$\Delta(e_j^*) = e_j^* \otimes e_j^*$$

$$\Delta(X^*) = e_2^* \otimes X^* + X^* \otimes e_2^*$$

$$\Delta(1^*) = 1^* \otimes 1^*$$

$$\Delta(x^*) = 1^* \otimes x^* + x^* \otimes 1^*$$

$$\Delta((x^2)^*) = x^* \otimes x^* + 1^* \otimes (x^2)^* + (x^2)^* \otimes 1^*$$

$$\Delta(\alpha^*) = e_1^* \otimes \alpha^* + \alpha^* \otimes e_2^*.$$

Para la counidad tenemos (necesariamente)

$$\epsilon(e_j^*) = 1$$

$$\epsilon(X^*) = 0$$

$$\epsilon(1^*) = 1$$

$$\epsilon(x^*) = 0$$

$$\epsilon((x^2)^*) = 0$$

$$\epsilon(\alpha^*) = 0.$$

Observación 2.25. Duales de objetos idempotentes suelen dar group-likes, y duales de objetos nilpotentes suelen dar primitivos, si se toman bases adecuadas.

Observación 2.26. Podemos aquí introducir una notación de utilidad para las coálgebras en general, que es la “notación de M. Sweedler”.

La comultiplicación con esta notación se escribe como

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_{1i} \otimes c_{2i}$$

para algún n natural y $c_{ji} \in C$. Pero también se suele escribir (Sweedler)

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Esta notación se debe a M. Sweedler. Más tarde, se suprimió el símbolo (c) e incluso el símbolo de sumatoria, utilizando la notación

$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$$

y la sumatoria queda sobre-entendida. Hacemos igualmente un llamado de atención de que esto es sólamente una notación, en general, casi nunca la comultiplicación de un elemento es un tensor elemental.

Por ejemplo, para expresar la coasociatividad en esta notación escribimos, por un lado

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta(c) = (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(c_1 \otimes c_2) = c_1 \otimes \Delta(c_2) = c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2},$$

por otro lado

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta(c) = (\Delta \otimes \mathrm{Id})(c_1 \otimes c_2) = \Delta(c_1) \otimes c_2 = c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2.$$

Los dos últimos miembros de cada cadena de igualdades respectivamente, deben coincidir. La notación standard utilizada es

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})(\Delta(c)) = (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(\Delta(c)) = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.$$

Para la counitariedad, en esta notación, nos quedaría que

$$\sum_{(c)} \epsilon(c_1)c_2 = \sum_{(c)} c_1\epsilon(c_2) = c$$

que la escribimos como

$$\epsilon(c_1)c_2 = c_1\epsilon(c_2) = c$$

2.5. Un par de ejemplos de coálgebras duales

2.5.1. Co-matrices

Proposición 2.27. *Sea C un k-espacio vectorial de dimensión n^2, con base $\{t_i^j\}_{\{i,j=1,\dots,n\}}$, se define $\Delta : C \to C \otimes C$ por*

$$\Delta t_i^j := \sum_{k=1}^{n} t_i^k \otimes t_k^j$$

y $\epsilon : C \to k$ por

$$\epsilon(t_i^j) = \delta_i^j.$$

Entonces $(C, \Delta, \epsilon) \cong (M_n(k))^*$ como coálgebras.

Demostración. Para ver esto, basta ver que para la coálgebra $(M_n(k))^*$ se tiene que

$$\Delta(e_i^j) = \sum_{k=1}^{n} e_i^k \otimes e_k^j$$

y que

$$\epsilon(e_i^j) = \delta_i^j,$$

pero esto es justo lo que se probó en el ejemplo 2.16 visto anteriormente. □

2.5.2. El álgebra de grupo y funciones sobre un grupo

Sean G grupo finito y k^G considerado como álgebra, $(f_1.f_2)(g) = f_1(g)f_2(g)$, k^G es coálgebra identificando

$$k^{G\times G} \cong k^G \otimes k^G$$

vía $(f_1 \otimes f_2)(g_1, g_2) := f_1(g_1)f_2(g_2)$ y comultiplicación definida por

$$(\Delta f)(x, y) := f(xy) \qquad (x, y \in G), \Delta f \in \ k^{G\times G} \cong k^G \otimes k^G.$$

Además

$$\epsilon(f) := f(1)$$

así, $\Delta : k^G \to k^G \otimes k^G$ resulta coasociativa y counitaria, y es morfismo de álgebras.Para ver que Δ es coasociativa, debemos ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} k^G & \xrightarrow{\Delta} & k^G \otimes k^G \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle I\otimes\Delta} \\ k^G \otimes k^G & \xrightarrow{\Delta\otimes I} & k^G \otimes k^G \otimes k^G \end{array}$$

conmuta. Es decir debemos ver que

$$(I \otimes \Delta)(\Delta f) = (\Delta \otimes I)(\Delta f) \qquad \forall f \in k^G.$$

Notemos que $(I \otimes \Delta)(\Delta f) \in k^G \otimes (k^G \otimes k^G)$ y que $(\Delta \otimes I)(\Delta f) \in (k^G \otimes k^G) \otimes k^G$. Entonces para poder ver la igualdad podemos ver que dados $f \in k^G, x, y, z \in G$, se tiene que

$$(I \otimes \Delta)(\Delta f)(x \otimes (y \otimes z)) = (\Delta \otimes I)(\Delta f)((x \otimes y) \otimes z).$$

Esta igualdad que pedimos es en virtud de

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z,$$

notemos además que dada $f \in k^G$,

$$\Delta f = \sum f_i \otimes f_j$$

para ciertas $f_i, f_j \in k^G$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
(I \otimes \Delta)(\Delta f)(x \otimes (y \otimes z)) &= (I \otimes \Delta)(\sum f_i \otimes f_j)(x \otimes (y \otimes z)) \\
&= (\sum f_i \otimes \Delta f_j)(x \otimes (y \otimes z)) \\
&= \sum f_i(x)((\Delta f_j)(y \otimes z)) \\
&= \sum f_i(x) f_j(yz),
\end{aligned}$$

por otra parte:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I)(\Delta f)((x \otimes y) \otimes z) &= (\Delta \otimes I)(\sum f_i \otimes f_j)((x \otimes y) \otimes z) \\
&= (\sum \Delta f_i \otimes f_j)((x \otimes y) \otimes z) \\
&= \sum ((\Delta f_i)(x \otimes y)) f_j(z) \\
&= \sum f_i(xy) f_j(z).
\end{aligned}$$

Para probar la igualdad que muestra que Δ es coasociativa basta ver que

$$\sum f_i(x) f_j(yz) = \sum f_i(xy) f_j(z).$$

Esto es cierto, pues para cualquier par $a, b \in G$ vale

$$\begin{aligned}
\sum f_i(a) f_j(b) &= \sum (f_i \otimes f_j)(a, b) \\
&= (\Delta f)(a, b) \\
&= f(ab)
\end{aligned}$$

y por lo tanto la igualdad anterior se traduce en

$$\begin{aligned}
\sum f_i(x) f_j(yz) &= \sum (f_i \otimes f_j)(x, yz) \\
&= (\Delta f)(x, yz) \\
&= f(xyz) \\
&= \sum f_i(xy) f_j(z).
\end{aligned}$$

Ahora veamos que Δ es counitaria, para esto debemos considerar la transformación lineal $\epsilon : k^G \to k$ y probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
k^G \otimes k^G \arrow[r, "\epsilon \otimes I"] \arrow[d, "I \otimes \epsilon"'] & k \otimes k^G \arrow[d, "\cong"] \\
k^G \otimes k \arrow[r, "\cong"] & k^G. \arrow[ul, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

En otras palabras debemos probar que:

$$(I \otimes \epsilon)\Delta = I = (\epsilon \otimes I)\Delta,$$

en primera medida notemos que podemos escribir

$$\Delta f = \sum f_i \otimes f_j$$

para ciertas $f_i, f_j \in k^G$; por lo tanto

$$\begin{aligned}(I \otimes \epsilon)\Delta f &= (I \otimes \epsilon)(\sum f_i \otimes f_j) \\ &= \sum f_i \otimes \epsilon(f_j) \\ &= \sum f_i \epsilon(f_j) \\ &= \sum f_i f_j(1) \\ &= f,\end{aligned}$$

si seguimos las definiciones del enunciado podemos observar que la igualdad

$$\sum f_i f_j(1) = f$$

es en virtud de

$$\begin{aligned}f(ab) &= (\Delta f)(a, b) \\ &= (\sum f_i \otimes f_j)(a, b) \\ &= \sum f_i(a) f_j(b)\end{aligned}$$

para todo $a, b \in G$.

Por lo tanto la igualdad anterior se obtiene para $b = 1$ y a arbitrario.

De manera análoga se obtiene que:

$$\begin{aligned}(\epsilon \otimes I)\Delta f &= (\epsilon \otimes I)(\sum f_i \otimes f_j) \\ &= \sum \epsilon(f_i) \otimes f_j \\ &= \sum \epsilon(f_i) f_j \\ &= \sum f_i(1) f_j = f.\end{aligned}$$

Veamos por último que Δ es morfismo de álgebras.

Para ver esto debemos ver que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
k^G \otimes k^G \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[d, "m"'] & (k^G \otimes k^G) \otimes (k^G \otimes k^G) \arrow[d, "m_{k^G\otimes k^G}"] \\
k^G \arrow[r, "\Delta"] & k^G \otimes k^G
\end{tikzcd} \tag{14}$$

$$\begin{tikzcd}
k^G \arrow[r, "\Delta"] & k^G \otimes k^G \\
k \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "u_{k^G\otimes k^G}"'] &
\end{tikzcd} \tag{15}$$

Observación 2.28. Aquí $m_{k^G\otimes k^G}$ se puede definir como

$$m_{k^G\otimes k^G} = (m \otimes m)(\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id})$$

donde

$$m(f_1 \otimes f_2) = f_1.f_2$$

$\mathrm{Id} : k^G \to k^G$ es la identidad y $\tau : k^G \otimes k^G \to k^G \otimes k^G$ es la aplicación definida por

$$\tau(f_1 \otimes f_2) = f_2 \otimes f_1.$$

Además:

$$u_{k^G\otimes k^G}(\lambda) = (u \otimes u)\phi(\lambda)$$

donde $\phi : k \to k \otimes k$ es la aplicación definida por

$$\phi(\lambda) = \lambda(1 \otimes 1) \qquad (\forall \lambda \in k).$$

Para el diagrama (14),

$$\begin{aligned}
m_{k^G\otimes k^G}(\Delta \otimes \Delta)(f \otimes h) &= m_{k^G\otimes k^G}(\Delta(f) \otimes \Delta(h)) \\
&= m_{k^G\otimes k^G}((\sum f_i \otimes f_j) \otimes (\sum h_r \otimes h_s)) \\
&= m_{k^G\otimes k^G}(\sum f_i \otimes f_j \otimes h_r \otimes h_s) \\
&= (m \otimes m)(\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id})(\sum f_i \otimes f_j \otimes h_r \otimes h_s) \\
&= (m \otimes m)(\sum \mathrm{Id}(f_i) \otimes \tau(f_j \otimes h_r) \otimes \mathrm{Id}(h_s)) \\
&= (m \otimes m)(\sum f_i \otimes h_r \otimes f_j \otimes h_s) \\
&= \sum m(f_i \otimes h_r) \otimes m(f_j \otimes h_s) \\
&= \sum f_i.h_r \otimes f_j.h_s.
\end{aligned}$$

Para ver que este diagrama conmuta necesitamos que

$$\sum f_i.h_r \otimes f_j.h_s = \Delta m(f \otimes h)$$

Probemos la siguiente igualdad que usaremos en lo que sigue, veamos que

Proposición 2.29.

$$\Delta(f.h) = \Delta f.\Delta h$$

donde la operación $\Delta f.\Delta h$ es la operación en $k^G \otimes k^G$ como álgebra.

Demostración.

$$\begin{aligned} \Delta(f.h)(x,y) &= f.h(xy) \\ &= f(xy)h(xy) \\ &= \Delta f(x,y)\Delta h(x,y) \\ &= (\Delta f.\Delta h)(x,y). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Delta(f.h) = \Delta f.\Delta h$. □

Veamos entonces las igualdades que completan la conmutatividad del diagrama (14),

$$\begin{aligned} \Delta m(f \otimes h) &= \Delta(f.h) \\ &= \Delta f.\Delta h \\ &= (\sum f_i \otimes f_j).(\sum h_r \otimes h_s) \\ &= \sum f_i.h_r \otimes f_j.h_s \end{aligned}$$

Veamos ahora que el diagrama (15) conmuta:

$$\Delta u(\lambda) = \lambda \Delta u(1) = \lambda(u(1) \otimes u(1)),$$

por otro lado

$$\begin{aligned} u_{k^G \otimes k^G}(\lambda) &= (u \otimes u)\phi(\lambda) \\ &= (u \otimes u)(\lambda(1 \otimes 1)) \\ &= \lambda(u(1) \otimes u(1)). \end{aligned}$$

Lo que prueba que este diagrama conmuta. De esta manera $\Delta : k^G \to k^G \otimes k^G$ resulta morfismo de álgebras.

2.6. Módulos y comódulos

Fijemos una k-álgebra A.

Definición 2.30. Dado un par (M, λ) donde M es un espacio vectorial y

$$\lambda : A \otimes M \to M$$

es una transformación lineal, que denotamos

$$\lambda(a \otimes m) = a \cdot m$$

o simplemente $a \cdot m = am$ si el contexto es claro. Diremos que $\lambda : A \otimes M \to M$ es una estructura de A-módulo (a izquierda) en M si

$$a(a'm) = (aa')m,\ \forall a, a' \in A, m \in M$$

y

$$1_A m = m,\ \forall m \in M.$$

En términos diagramáticos, esto equivale a que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "m\otimes \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\lambda"'] & A \otimes M \arrow[d, "\lambda"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\lambda"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \otimes M \arrow[r, "\eta\otimes \mathrm{Id}"] \arrow[dr] & A \otimes M \arrow[d, "\lambda"] \\ & M \end{tikzcd}$$

donde $\eta : k \to A$ es la transformación lineal denominada unidad, que está definida por $\eta(1_k) = 1_A$.

Análogamente se define un A-módulo a derecha, es decir los siguientes diagramas deben conmutar

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes m"] \arrow[d, "\alpha\otimes\mathrm{Id}"'] & M \otimes A \arrow[d, "\alpha"] \\ M \otimes A \arrow[r, "\alpha"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \otimes k \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\eta"] \arrow[dr] & M \otimes A \arrow[d, "\alpha"] \\ & M \end{tikzcd}$$

donde $\alpha : M \otimes A \to M$ es una estructura de A-módulo (a derecha) en M.

Definición 2.31. Si M y N son dos A-módulos a izquierda y $f : M \to N$ es una transformación k-lineal, diremos que f es un morfismo de A-módulos, o A-lineal, si $f(am) = af(m)$ para todo a en A y m en M. En términos diagramáticos, pediremos que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} A \otimes M \arrow[r, "\lambda_M"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes f"'] & M \arrow[d, "f"] \\ A \otimes N \arrow[r, "\lambda_N"] & N \end{tikzcd}$$

Denotamos $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ al conjunto de los morfismos A-lineales de M en N.

Fijada una k-coalgebra C, se definen los comódulos de la siguiente forma:

Definición 2.32. Un C-comódulo a izquierda es un par (M, λ) donde M es un espacio vectorial y $\lambda : M \to C \otimes M$ es una transformación lineal tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & C \otimes M \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{Id}"] \\ C \otimes M \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\lambda"] & C \otimes C \otimes M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr] & C \otimes M \arrow[d, "\epsilon\otimes\mathrm{Id}"] \\ & k \otimes M \end{tikzcd}$$

Definición 2.33. Un C-comódulo a derecha es un par (M, ρ) donde M es un espacio vectorial y $\rho : M \to M \otimes C$ es una transformación lineal tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho\otimes\mathrm{Id}"] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr] & M \otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\epsilon"] \\ & M \otimes k \end{tikzcd}$$

Observación 2.34. (Notacion tipo Sweedler) Podemos escribir $\lambda(m) \in C \otimes M$ como una combinación lineal de elementos de C tensor elementos de M, similarmente para $\rho(m) \in M \otimes C$ si M es comódulo a derecha. De manera análoga a la notación de Sweedler para la comultiplicación, escribiremos,

$$\lambda(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)} \in C \otimes M,$$

$$\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} \in M \otimes C,$$

donde $m_{(i)} \in C$ para todo $i \neq 0$, $m_{(0)} \in M$, sobre-entendiendo un símbolo de sumatoria.

El primer diagrama de la definición de C-comódulo a izquierda nos decía que

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})\lambda(m) = (\mathrm{Id} \otimes \lambda)\lambda(m)$$

En notación typo Sweedler queda que

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})(m_{(-1)} \otimes m_{(0)}) = (\mathrm{Id} \otimes \lambda)(m_{(-1)} \otimes m_{(0)})$$

entonces

$$m_{(-1)_{(-2)}} \otimes m_{(-1)_{(-1)}} \otimes m_{(0)} = m_{(-1)} \otimes m_{(0)_{(-1)}} \otimes m_{(0)_{(0)}}.$$

Esto permite introducir la notación

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})\lambda(m) = (\mathrm{Id} \otimes \lambda)\lambda(m) = m_{(-2)} \otimes m_{(-1)} \otimes m_{(0)}.$$

Para el segundo diagrama de esta misma definición queda

$$\epsilon(m_{(-1)})m_{(0)} = m.$$

Todo esto de manera análoga se puede hacer para C-comódulos a derecha.

El siguiente lema (debe compararse con el Lema 2.15)nos ayudará a comprender la relación entre los comódulos y las acciones de grupo para el caso de grupos finitos y conjuntos finitos:

Lema 2.35. *Sean X e Y dos conjuntos finitos y consideramos los anillos $k^X = \{f : X \to k\}$ y $k^Y = \{f : Y \to k\}$ con suma y producto punto a punto.*

- *Si $\phi : X \to Y$ es una función (arbitraria), entonces $\phi^* : k^Y \to k^X$ dada por $\phi^*(f) = f \circ \phi$ es un morfismo de algebras unitarias.*
- *Si $\Phi : k^Y \to k^X$ es un morfismo de álgebras unitarias, entonces existe $\phi : X \to Y$ una función entre los conjuntos tal que $\Phi = \phi^*$.*

Ejemplo 2.36. Sean G un grupo finito, X un conjunto finito con la identificación $k^{G\times X} \cong k^G \otimes k^X$ via, dados $f \in k^G, h \in k^X$, $g \in G, x \in X$,

$$(f \otimes h)(g, x) = f(g)h(x) \tag{16}$$

además consideremos a k^G como coálgebra, como lo hemos visto antes (subsección 2.5.2).

a) Dada una acción $G \times X \to X$, entonces la aplicación $\lambda : k^X \to k^G \otimes k^X \cong k^{G\times X}$ proveniente de la acción $G \times X \to X$, que ya sabemos que es un morfismo de álgebras, también es una estructura de k^G-comódulo.

b) Supongamos ahora que $\lambda : k^X \to k^G \otimes k^X$ es una estructura de comódulo (counitario) y que además es un morfismo de álgebras. Entonces, existe una acción $G \times X \to X$ que le corresponde a esa estrucura de comódulo.

Demostración. a) Asumimos dada una acción $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$. Recordamos que $\lambda : k^X \to k^G \otimes k^X \cong k^{G\times X}$ está definida vía

$$\lambda(f)(g, x) := f(g \cdot x).$$

Por ejemplo si $f = \delta_x$, la función que vale 1 en x y cero en $X \setminus \{x\}$,

$$\lambda(\delta_x)(g, y) := \delta_x(g \cdot y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \cdot y = x \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

O sea, si g es arbitrario, y debe ser $g^{-1} \cdot x$ para que no dé cero. Por lo tanto

$$\lambda(\delta_x) = \sum_{g\in G} \delta_g \otimes \delta_{g^{-1}\cdot x}$$

Para una $f : X \to k$ arbitraria podemos escribir $f = \sum_{x\in X} f(x)\delta_x$, y extender por linealidad la fórmula anterior, y así dar sentido a la notación

$$\lambda(f) = f_{-1} \otimes f_0 \in k^G \otimes k^X$$

Veremos que el formato de las siguientes cuentas son similares a la demostración hecha de que k^G es coálgebra, si bien ahora estamos demostrando que k^X es un k^G-comódulo. Para ver esto, tenemos que probar que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} k^X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & k^G \otimes k^X \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{Id}"] \\ k^G \otimes k^X \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\lambda"] & k^G \otimes k^G \otimes k^X \end{tikzcd} \tag{17}$$

$$\begin{tikzcd} k^X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr] & k^G \otimes k^X \arrow[d, "\epsilon\otimes\mathrm{Id}"] \\ & k \otimes k^X \end{tikzcd} \tag{18}$$

Veamos el diagrama (17), sea $h \in k^X$, por un lado

$$\begin{aligned}
\Big((\Delta \otimes \mathrm{Id})\lambda(h)\Big)((g \otimes g') \otimes x) &= \Big((\Delta \otimes \mathrm{Id})(h_{-1} \otimes h_0)\Big)((g \otimes g') \otimes x) \\
&= (\Delta(h_{-1}) \otimes h_0)((g \otimes g') \otimes x) \\
&= \Delta(h_{-1})(g \otimes g')h_0(x) \\
&= h_{-1}(gg')h_0(x) \\
&= \lambda(h)(gg' \otimes x) \\
&= h((gg') \cdot x)
\end{aligned}$$

por el otro

$$\begin{aligned}
\Big((\mathrm{Id} \otimes \lambda)\lambda(h)\Big)(g \otimes (g' \otimes x)) &= \Big((\mathrm{Id} \otimes \lambda)(h_{-1} \otimes h_0)\Big)(g \otimes (g' \otimes x)) \\
&= \Big(h_{-1} \otimes \lambda(h_0)\Big)(g \otimes (g' \otimes x)) \\
&= h_{-1}(g)\lambda(h_0)(g' \otimes x) \\
&= h_{-1}(g)h_0(g' \cdot x) \\
&= \lambda(h)(g \otimes g' \cdot x) \\
&= h(g \cdot (g' \cdot x)).
\end{aligned}$$

es decir, la coasociatividad de λ se sigue de la asociatividad de la acción. Ahora veamos que el diagrama (18) conmuta, sea $h \in k^X$

$$\begin{aligned}(\epsilon \otimes \mathrm{Id})\lambda(h)(x) &= (\epsilon \otimes \mathrm{Id})(h_{-1} \otimes h_0)(x)\\ &= (\epsilon(h_{-1})h_0)(x)\\ &= (h_{-1}(1)h_0)(x)\\ &= h_{-1}(1)h_0(x)\\ &= (h_{-1} \otimes h_0)(1, x)\\ &= \lambda(h)(1, x)\\ &= h(1 \cdot x) = h(x)\end{aligned}$$

o sea, la counitariedad de λ se sigue de la unitariedad de la acción.

b) Dada una coacción $\lambda : k^X \to k^G \otimes k^X \cong k^{G\times X}$, que asumimos counitaria, coasociativa y morfismo de álgebras, podemos hacer uso del lema 2.35, para este caso el mismo afirma que existe $\phi : G \times X \to X$ una función tal que $\lambda = \phi^*$. De esta manera podemos definir una acción de G sobre X dada por,

$$g \cdot x := \phi(g, x).$$

Veamos que efectivamente con esta definición se cumplen los axiomas de acción. En términos de ϕ tenemos que ver que, dados $g, g' \in G$, $x \in X$

$$\phi(gg', x) = \phi(g, \phi(g', x))$$

y que

$$\phi(1_G, x) = x.$$

Probar estas igualdades es equivalente a probar que

$$f(\phi(gg', x)) = f(\phi(g, \phi(g', x)))$$

y que

$$f(\phi(1_G, x)) = f(x)$$

para toda $f \in k^X$. Esto es pues, tenemos que X es un conjunto finito de manera que podemos escribir que $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ y podemos considerar las funciones $\delta_i : X \to k$, dadas por

$\delta_i(x) = 1$ si $x = x_i$, en caso contrario $\delta_i(x) = 0$. Entonces si tenemos que, dado $x \in X$

$$f(x) = f(x') \qquad \forall f \in k^X$$

suponiendo que $x = x_j$ y que $x' = x_k$, podemos tomar $f = \delta_j$, entonces se debe cumplir que

$$\delta_j(x_j) = \delta_j(x_k)$$

pero entonces $1 = \delta_j(x_k)$, lo cual dice que $x_k = x_j$. Con esto ya establecido probemos lo dicho anteriormente. Sea $f \in k^X$,

$$\begin{aligned}
f(\phi(gg', x)) &= \phi^*(f)(gg', x) \\
&= \lambda(f)(gg', x) \\
&= f_{-1}(gg')f_0(x) \\
&= f_{-1}(g)\lambda(f_0)(g', x) \qquad \text{por coasociatividad de} \quad \lambda \\
&= f_{-1}(g)f_0(\phi(g', x)) \\
&= (f_{-1} \otimes f_0)(g, \phi(g', x)) \\
&= \lambda(f)(g, \phi(g', x)) \\
&= f(\phi(g, \phi(g', x))).
\end{aligned}$$

Ahora probemos la unitariedad. Esto será un resultado inmediato de la counitariedad de λ, queremos ver que $f(\phi(1_G, x)) = f(x)$. Recordando la hecho en el item a), nos queda que

$$\begin{aligned}
f(\phi(1_G, x)) &= \lambda(f)(1_G, x) \\
&= f(x) \qquad \text{por counitariedad.}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.37. Sea G un grupo y $C = k[G]$ con la comultiplicación definida en la base $\Delta(g) = g \otimes g$ para todo $g \in G$. Si M es un k-espacio vectorial, entonces el dato de una estructura de C-comódulo equivale al dato de una descomposición de M en suma directa indexada por los elementos de G:

$$M = \oplus_{g \in G} M_g$$

Demostración. Si se tiene el dato de esa descomposición, entonces para cada $m \in M$ se puede escribir de manera única

$$m = \sum_{g \in G} m_g$$

con cada $m_g \in M_g$, y la suma anterior tiene soporte finito. De esta manera está bien definida la aplicación

$$\lambda : M \to k[G] \otimes M$$

dada por

$$\lambda(m) = \sum_{g \in G} g \otimes m_g.$$

Esta flecha resulta una estructura de comódulo coasociativo y counitario pues los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & k[G] \otimes M \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{Id}"] \\
k[G] \otimes M \arrow[r, "\mathrm{Id} \otimes \lambda"] & k[G] \otimes k[G] \otimes M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr] & k[G] \otimes M \arrow[d, "\epsilon \otimes \mathrm{Id}"] \\
& k \otimes M
\end{tikzcd}$$

pues, dado $m \in M$,

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{Id})\lambda(m) &= (\Delta \otimes \mathrm{Id})(\sum_{g \in G} g \otimes m_g) \\ &= \sum_{g \in G} (g \otimes g \otimes m_g)\end{aligned}$$

y esto es igual a $(\mathrm{Id} \otimes \lambda)\lambda(m)$, puesto que $m_g \in M_g$ y $\lambda(m_g) = g \otimes m_g$. Por otro lado, si $\lambda : M \to k[G] \otimes M = \oplus_{g \in G} kg \otimes M$, para cada $m \in M$, $\lambda(m) \in \oplus_{g \in G} kg \otimes M$. Escribimos

$$\lambda(m) = \sum_{g \in G} g \otimes m_g$$

donde $m_g \in M$, y sabemos que esta suma tiene soporte finito. De la coasociatividad, tenemos que

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id} \otimes \lambda)\lambda(m) &= (\mathrm{Id} \otimes \lambda)(\sum_{g \in G} g \otimes m_g) \\ &= \sum_{g \in G} g \otimes (\sum_{h \in G} h \otimes (m_g)_h) \\ &= \sum_{g,h \in G} (g \otimes h \otimes (m_g)_h)\end{aligned}$$

debe coincidir con

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{Id})\lambda(m) &= (\Delta \otimes \mathrm{Id})(\sum_{g \in G} g \otimes m_g) \\ &= \sum_{g \in G} g \otimes g \otimes m_g\end{aligned}$$

y por lo tanto $(m_g)_h = 0$ si $g \neq h$ y $(m_g)_g = m_g$. De estas igualdades tenemos que, para cada $g \in G$, la aplicacion $M \to M$ definida por $m \mapsto m_g$ es un proyector, y que son ortogonales entre sí. Además, de la counitariedad tenemos que

$$\begin{aligned}m = (\epsilon \otimes \mathrm{Id})\lambda(m) &= \sum_{g \in G} \epsilon(g) m_g \\ &= \sum_{g \in G} m_g\end{aligned}$$

Lo que muestra que $M = \oplus_{g \in G} M_g$ donde M_g es la imagen de la aplicación $m \mapsto m_g$. $\square$

Definición 2.38. Si M y N son dos C-comódulos a derecha y $f : M \to N$ es una transformación k-lineal, diremos que f es un morfismo de C-comódulos, o C-colineal, si el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes C \arrow[d, "f\otimes \mathrm{Id}"] \\
N \arrow[r, "\rho_N"] & N \otimes C
\end{tikzcd}
$$

Denotaremos $\mathrm{Hom}^C(M,N)$ al conjunto de los morfismos de comódulos de M en N.

Teorema 2.39. *Sea C una coálgebra, M un C-comódulo a derecha, y consideremos $A := C^*$. Entonces, para $\phi \in A = C^*$, la aplicación*

$$\phi \otimes m \mapsto \phi \cdot m := \phi(m_1)m_0$$

(donde $\rho(m) = m_0 \otimes m_1$) define una estructura de A-módulo a izquierda en M. Más aún, con esta estructura de A-módulo, resulta

$$\mathrm{Hom}^C(M,N) = \mathrm{Hom}_{C^*}(M,N)$$

Demostración. Veamos que la acción es asociativa, es decir

$$\phi \cdot (\psi \cdot m) = (\phi \star \psi) \cdot m.$$

Por un lado

$$
\begin{aligned}
\phi \cdot (\psi \cdot m) &= \phi \cdot (\psi(m_1)m_0) \\
&= \phi(m_{0_{(1)}})(\psi(m_1)m_{0_{(0)}}) \\
&= \phi(m_{0_{(1)}})\psi(m_1)m_{0_{(0)}}
\end{aligned} \tag{19}
$$

donde

$$\rho(\psi(m_1)m_0) = \psi(m_1)\rho(m_0) = (\psi(m_1)m_{0_{(0)}}) \otimes m_{0_{(1)}}$$

$$
\begin{aligned}
(\phi \star \psi) \cdot m &= ((\phi \star \psi)(m_1))m_0 \\
&= \phi(m_{1_{(1)}})\psi(m_{1_{(2)}})m_0
\end{aligned} \tag{20}
$$

y hemos denotado $\Delta(m_1) = m_{1_{(1)}} \otimes m_{1_{(2)}}$. Para probar asociatividad debemos ver que (19) y (20) coinciden, pero esto ocurrirá gracias a la coasociatividad del C-comódulo M, es decir,

$$(\rho \otimes \mathrm{Id})\rho(m) = (\mathrm{Id} \otimes \Delta)\rho(m)$$

lo que lleva a

$$m_{0_{(0)}} \otimes m_{0_{(1)}} \otimes m_1 = m_0 \otimes m_{1_{(1)}} \otimes m_{1_{(2)}}.$$

Pero si tomamos la aplicación $F(m\otimes c\otimes c') = \phi(c)\psi(c')m$ (para $m \in M, c, c' \in C$), las expresiones en (19) y (20) se las pueden ver como F evaluada en $m_{0_{(0)}} \otimes m_{0_{(1)}} \otimes m_1$ y en $m_0 \otimes m_{1_{(1)}} \otimes m_{1_{(2)}}$ respectivamente, con cual se tiene que

$$\phi(m_{0_{(1)}})\psi(m_1)m_{0_{(0)}} = \phi(m_{1_{(1)}})\psi(m_{1_{(2)}})m_0.$$

De esta manera queda probado que la acción del enunciado es asociativa.

Ahora veamos que $1_{C^*} \cdot m = m$. Observemos que $1_{C^*} := \epsilon$ donde ϵ es la counidad de la coálgebra C, ya que

$$\begin{aligned}(\epsilon \star \phi)(c) &= \epsilon(c_{(1)})\phi(c_{(2)}) \\ &= \phi(\epsilon(c_{(1)})c_{(2)})\end{aligned}$$

donde $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$. Pero utilizando la counitariedad de C sabemos que $\epsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c$, luego

$$(\epsilon \star \phi)(c) = \phi(c).$$

Como $c \in C$ es arbitrario tenemos que $\epsilon \star \phi = \phi$. Análogamente se puede ver que $\phi \star \epsilon = \phi$. Ahora sí veamos $1_{C^*} \cdot m = m$, tenemos

$$1_{C^*} \cdot m = \epsilon(m_1)m_0$$

donde $\rho(m) = m_0 \otimes m_1$. Pero el axioma de counitariedad del C-comódulo M dice

$$\epsilon(m_1)m_0 = m.$$

Es decir,

$$1_{C^*} \cdot m = m.$$

Por lo tanto concluimos que M es un A-módulo a izquierda. Veamos ahora que

$$\mathrm{Hom}^C(M, N) = \mathrm{Hom}_{C^*}(M, N)$$

Empecemos tomando $f \in \mathrm{Hom}^C(M, N)$, queremos ver que f es morfismo de C^*-módulos a izquierda, es decir que el diagrama

$$\begin{tikzcd} C^* \otimes M \arrow[r, "\lambda_M"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes f"'] & M \arrow[d, "f"] \\ C^* \otimes N \arrow[r, "\lambda_N"] & N \end{tikzcd}$$

conmuta, o sea que, dado $m \in M$ y $\phi \in C^*$, si $n = f(m)$,

$$\phi(n_1)n_0 = \phi(m_1)f(m_0) \tag{21}$$

donde $\rho_N(f(m)) = n_0 \otimes n_1$ y $\rho_M(m) = m_0 \otimes m_1$. Por hipótesis, tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes C \arrow[d, "f\otimes \mathrm{Id}"] \\ N \arrow[r, "\rho_N"] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

o sea,

$$n_0 \otimes n_1 = f(m_0) \otimes m_1. \tag{22}$$

Si construimos la aplicación $\mu_\phi : N \otimes C \to N$ definida por

$$\mu_\phi(n \otimes c) = \phi(c)n,$$

vemos que si aplicamos μ_ϕ a cada miembro de la igualdad (22) se obtiene la igualdad (21) como queríamos ver. Recíprocamente sea $f \in \mathrm{Hom}_{C^*}(M, N)$, queremos ver que

$$n_0 \otimes n_1 = f(m_0) \otimes m_1,$$

por hipótesis tenemos que

$$\phi(n_1)n_0 = \phi(m_1)f(m_0) \tag{23}$$

para todo $\phi \in C^*$, si consideramos $\{c_i\}_{i\in I}$ una base de C, podemos escribir

$$n_0 \otimes n_1 = \sum_{i\in I} n_i \otimes c_i$$

$$f(m_0) \otimes m_1 = \sum_{i\in I} n'_i \otimes c_i,$$

además podemos considerar la base dual, es decir tomamos $\phi = c^j$, la funcional lineal de C^* que vale 1 en c_j y cero en el resto de la base, y esto para $j \in I$ arbitrario. Similarmente a la primera parte de la demostración, para cada $\phi \in C^*$ arbitraria consideremos la aplicación δ_ϕ dada por

$$\delta_\phi(\sum_{i\in I} n_i \otimes c_i) = \sum_{i\in I} \phi(c_i)n_i$$

con lo cual

$$\delta_\phi(n_0 \otimes n_1) = \phi(n_1)n_0$$

y

$$\delta_\phi(f(m_0) \otimes m_1) = \phi(m_1)f(m_0)$$

ya que si escribimos $n_1 = \sum_{i \in I} \lambda_i c_i$, entonces

$$\begin{aligned}
\delta_\phi(n_0 \otimes n_1) &= \delta_\phi(n_0 \otimes \sum_{i \in I} \lambda_i c_i) \\
&= \delta_\phi(\sum_{i \in I} n_0 \otimes \lambda_i c_i) \\
&= \delta_\phi(\sum_{i \in I} \lambda_i n_0 \otimes c_i) \\
&= \sum_{i \in I} \phi(c_i)\lambda_i n_0 \\
&= (\sum_{i \in I} \phi(\lambda_i c_i)) n_0 \\
&= \phi(\sum_{i \in I} \lambda_i c_i) n_0 \\
&= \phi(n_1) n_0,
\end{aligned}$$

análogamente se puede ver que $\delta_\phi(f(m_0) \otimes m_1) = \phi(m_1) f(m_0)$. Si tomamos $\phi = c^j$ con $j \in I$ arbitario, tenemos por un lado,

$$\begin{aligned}
c^j(n_1)n_0 &= \delta_{c^j}(n_0 \otimes n_1) \\
&= \delta_{c^j}(\sum_{i \in I} n_i \otimes c_i) \\
&= \sum_{i \in I} c^j(c_i) n_i \\
&= n_j
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
c^j(m_1)f(m_0) &= \delta_{c^j}(f(m_0) \otimes m_1) \\
&= \delta_{c^j}(\sum_{i \in I} n'_i \otimes c_i) \\
&= \sum_{i \in I} c^j(c_i) n'_i \\
&= n'_j
\end{aligned}$$

pero por la igualdad (23) llegamos a que $n_j = n'_j$ con j arbitrario, se sigue que

$$n_0 \otimes n_1 = \sum_{i \in I} n_i \otimes c_i = \sum_{i \in I} n'_i \otimes c_i = f(m_0) \otimes m_1.$$

□

Como siempre, en dimensión finita se puede hacer una construcción recíproca:

Teorema 2.40. *Sea A un álgebra de dimensión finita, fijemos una base $\mathcal{B} = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Consideremos la coálgebra $C := A^*$ con la base dual $\mathcal{B}^* = \{a^1, \ldots, a^n\}$. Si M es un A-módulo a derecha, entonces la aplicación*

$$M \to M \otimes C$$

dada por

$$m \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m \otimes a^i$$

define una estructura de C-comódulo a derecha en M. Más aún, si identificamos $A \cong A^{**} = C^*$, partiendo de la estructura de C-comódulo a derecha anterior, la estructura de C^*-módulo que da el teorema anterior recupera la estructura de A-módulo original.

Ejemplo 2.41. Si G es grupo finito, entonces un k^G-comódulo = espacio vectorial con una acción de G, pues k^G-comodulo es lo mismo que $(k^G)^*$-módulo = $k[G]$-módulo.

2.7. Biálgebras y producto tensorial de módulos y comódulos

Observación 2.42. Si A y B son dos k-álgebras, entonces $A \otimes B$ es naturalmente una k-algebra unitaria definiendo

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := aa' \otimes bb'$$

y la unidad resulta ser $1_A \otimes 1_B$.

Análogamente, si C y D son dos k-coálgebras, entonces $C \otimes D$ es una k-coálgebra definiendo

$$\Delta_{C\otimes D} = (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id})(\Delta_C \otimes \Delta_D)$$

donde $\tau : C \otimes D \to D \otimes C$ es el isomorfismo dado por $\tau(c \otimes d) = d \otimes c$. En elementos y en notación de Sweedler,

si $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$ y si $\Delta(d) = d_1 \otimes d_2$, entonces

$$\Delta_{C\otimes D}(c \otimes d) = (c_1 \otimes d_1) \otimes (c_2 \otimes d_2).$$

Además, resulta counitaria: $\epsilon_{C\otimes D} = \epsilon_C \otimes \epsilon_D$. En tensores elementales: $\epsilon(c \otimes d) = \epsilon_C(c)\epsilon_D(d)$.

Definición 2.43. Una biálgebra sobre k es un espacio vectorial H tal que se cumplen las siguientes condiciones,

- H es álgebra
- H es coálgebra
- $\Delta : H \to H \otimes H$ y $\epsilon : H \to k$ son morfismos de álgebras.

Como axioma, o propiedad, que se le pide a una biálgebra, es que la comultiplicación

$\Delta : H \to H \otimes H$ sea morfismo de álgebras. Uno se podría preguntar porqué no considerar a la multiplicación $m : H \otimes H \to H$ como aplicación entre coálgebras y pedir que sea morfismo de coálgebras. La definición de biálgebra es simétrica en el siguiente sentido:

Teorema 2.44. *Sea H un espacio vectorial. Consideremos $m : H \otimes H \to H$, donde m es asociativa y $\Delta : H \to H \otimes H$, siendo ésta coasociativa. Son equivalentes:*

- *m es morfismo de coálgebras.*
- *Δ es morfismo de álgebras.*

Demostración. Primero veamos unas definiciones.

Sean $(A, m_A, u_A), (B, m_B, u_B)$ k-álgebras. Una aplicación k-lineal $f : A \to B$ es morfismo de álgebras si los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ k \arrow[u, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd}$$

Sean ahora $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$, $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ k-coálgebras. Una aplicación k-lineal $g : C \to D$ es un morfismo de coálgebras si los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "g \otimes g"] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D \arrow[r, "\epsilon_D"] & k \\ C \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "\epsilon_C"'] & \end{tikzcd}$$

Vamos a ver primero que m es morfismo de coálgebras. Aplicando las definiciones anteriores queremos ver que los siguientes digramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\Delta_{H \otimes H}"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "m \otimes m"] & H \otimes H \end{tikzcd} \tag{24}$$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\epsilon"] & k \\ H \otimes H \arrow[u, "m"] \arrow[ur, "\epsilon_{H \otimes H}"'] & \end{tikzcd} \tag{25}$$

Para ver que estos diagramas conmutan usaremos la hipótesis de que Δ es un morfismo de álgebras, esto implica que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\Delta \otimes \Delta"] \arrow[d, "m"'] & (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[d, "m_{H \otimes H}"] \\ H \arrow[r, "\Delta"] & H \otimes H \end{tikzcd} \tag{26}$$

Veamos que el diagrama (24) conmuta.

Hagamos primero una observación respecto a este diagrama: tenemos la aplicación $\Delta_{H\otimes H}$ y se la puede definir por

$$\Delta_{H\otimes H} = (\mathrm{Id}\otimes\tau\otimes\mathrm{Id})(\Delta\otimes\Delta)$$

donde $\mathrm{Id} : H \to H$ es la identidad y $\tau : H\otimes H \to H\otimes H$ es la aplicación definida por $\tau(a\otimes b) = b\otimes a$, entonces

$$\begin{aligned}
(m\otimes m)\Delta_{H\otimes H}(a\otimes b) &= (m\otimes m)(\mathrm{Id}\otimes\tau\otimes\mathrm{Id})(\Delta(a)\otimes\Delta(b))\\
&= (m\otimes m)(\mathrm{Id}\otimes\tau\otimes\mathrm{Id})((\sum a_1\otimes a_2)\otimes(\sum b_1\otimes b_2))\\
&= (m\otimes m)(\mathrm{Id}\otimes\tau\otimes\mathrm{Id})(\sum a_1\otimes a_2\otimes b_1\otimes b_2)\\
&= (m\otimes m)(\sum \mathrm{Id}(a_1)\otimes\tau(a_2\otimes b_1)\otimes\mathrm{Id}(b_2))\\
&= (m\otimes m)(\sum a_1\otimes b_1\otimes a_2\otimes b_2)\\
&= \sum m(a_1\otimes b_1)\otimes m(a_2\otimes b_2)\\
&= \sum a_1b_1\otimes a_2b_2.
\end{aligned}$$

Por otro lado, también en el diagrama (24) tenemos: $\Delta m(a\otimes b) = \Delta(ab)$, es decir tenemos que ver que $\sum a_1b_1\otimes a_2b_2 = \Delta(ab)$. Pero para esto recurrimos al diagrama (26), sabiendo por hipótesis que éste conmuta. Notemos que, análogamente a lo hecho antes, podemos definir

$$m_{H\otimes H} = (m\otimes m)(\mathrm{Id}\otimes\tau\otimes\mathrm{Id}).$$

Así, por el diagrama (26)

$$\begin{aligned}
m_{H\otimes H}(\Delta\otimes\Delta)(a\otimes b) &= m_{H\otimes H}(\Delta(a)\otimes\Delta(b))\\
&= m_{H\otimes H}(\sum a_1\otimes a_2\otimes\sum b_1\otimes b_2)\\
&= m_{H\otimes H}(\sum a_1\otimes a_2\otimes b_1\otimes b_2)\\
&= (m\otimes m)(I\otimes\tau\otimes\mathrm{Id})(\sum a_1\otimes a_2\otimes b_1\otimes b_2)\\
&= (m\otimes m)(\sum \mathrm{Id}(a_1)\otimes\tau(a_2\otimes b_1)\otimes\mathrm{Id}(b_2))\\
&= (m\otimes m)(\sum a_1\otimes b_1\otimes a_2\otimes b_2)\\
&= \sum m(a_1\otimes b_1)\otimes m(a_2\otimes b_2)\\
&= \sum a_1b_1\otimes a_2b_2\\
&= \Delta(ab).
\end{aligned}$$

Por lo tanto el diagrama (24) conmuta. Ahora lo veremos para el diagrama (25), observemos que $\epsilon_{H\otimes H} = \phi(\epsilon \otimes \epsilon)$, donde $\phi^{-1} : k \to k \otimes k$ es la aplicación definida por $\phi^{-1}(\lambda) = \lambda(1 \otimes 1) \forall \lambda \in k$. Veamos que el digrama conmuta,

$$\epsilon\, m(a \otimes b) = \epsilon(ab),$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
\epsilon_{H\otimes H}(a \otimes b) &= \phi(\epsilon \otimes \epsilon)(a \otimes b) \\
&= \phi(\epsilon(a) \otimes \epsilon(b)) \\
&= \epsilon(a)\epsilon(b)\phi(1 \otimes 1) \\
&= \epsilon(a)\epsilon(b).
\end{aligned}$$

Entonces resulta que el diagrama (25) conmuta ya que $\epsilon : H \to k$ es morfismo de álgebras, es decir se tiene que $\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b)$.

Ahora veamos la otra implicación. Tenemos que probar que $\Delta : H \to H \otimes H$ es morfismo de álgebras teniendo como hipótesis que $m : H \otimes H \to H$ es morfismo de coálgebras. Es decir debemos probar que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[d, "m"'] & (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[d, "m_{H\otimes H}"] \\
H \arrow[r, "\Delta"] & H \otimes H
\end{tikzcd}$$

y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] & H \otimes H \\
k \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "u_{H\otimes H}"'] &
\end{tikzcd}$$

Para el primer diagrama,

$$\begin{aligned}
m_{H\otimes H}(\Delta\otimes\Delta)(a\otimes b) &= m_{H\otimes H}(\Delta(a)\otimes\Delta(b))\\
&= m_{H\otimes H}(\sum a_1\otimes a_2\otimes\sum b_1\otimes b_2)\\
&= m_{H\otimes H}(\sum a_1\otimes a_2\otimes b_1\otimes b_2)\\
&= (m\otimes m)(\mathrm{Id}\otimes\tau\otimes\mathrm{Id})(\sum a_1\otimes a_2\otimes b_1\otimes b_2)\\
&= (m\otimes m)(\sum \mathrm{Id}(a_1)\otimes\tau(a_2\otimes b_1)\otimes\mathrm{Id}(b_2))\\
&= (m\, otm)(\sum a_1\otimes b_1\otimes a_2\otimes b_2)\\
&= \sum m(a_1\otimes b_1)\otimes m(a_2\otimes b_2)\\
&= \sum a_1b_1\otimes a_2b_2.
\end{aligned}$$

Para que este diagrama conmute tiene que ocurrir que $\sum a_1b_1\otimes a_2b_2 = \Delta(ab)$, pero esto es justamente lo que nos dice el diagrama (24), que ahora conmuta por hipótesis. Esto además muestra la equivalencia entre ambos diagramas.

Veamos por último que el segundo diagrama conmuta, aquí observemos que $u_{H\otimes H}(k) = (u\otimes u)\phi^{-1}(k)$, por lo tanto: $\Delta u(k) = k\Delta u(1) = k(u(1)\otimes u(1))$ y por otro lado

$$\begin{aligned}
u_{H\otimes H}(k) &= (u\otimes u)\phi^{-1}(k)\\
&= (u\otimes u)(k(1\otimes 1))\\
&= k(u(1)\otimes u(1)).
\end{aligned}$$

Así hemos probado que Δ es morfismo de álgebras. □

2.7.1. Producto tensorial de módulos

Si B es una biálgebra, M y N dos B-modulos, entonces $M\otimes N$ es un B-módulo via

$$b\cdot(m\otimes n) = b_{(1)}\cdot m\otimes b_{(2)}\cdot n$$

para todo $b\in B, m\in M, n\in N$. Podemos escribir esta fórmula en términos de morfismos, si $\phi_M : B\otimes M\to M$, $\phi_N : B\otimes N\to N$ son acciones de B sobre MyN respectivamente, entonces la acción de B sobre $M\otimes N$ está dado por

$$\phi_{M\otimes N} = (\phi_M\otimes\phi_N)\circ(\mathrm{Id}\otimes\tau_{B,M}\otimes\mathrm{Id})\circ(\Delta\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id})$$

Ejemplo 2.45. Sea G un grupo, entonces $H = k[G]$ es una biálgebra definiendo

$$\Delta(g) = g\otimes g$$

y extendiendo por k-linealidad. Si V y W son dos G-módulos, entonces $V\otimes W$ es naturalmente un G-módulo, y la estructura standard (anterior) esta dada por

$$g\cdot(v\otimes w) = g\cdot v\otimes g\cdot w,$$

por lo tanto, esta estructura se la suele denominar la *estructura diagonal.*

2.7.2. Producto tensorial de comódulos

Si B es una biálgebra, M yN dos B-comódulos, entonces $M \otimes N$ es un B-comódulo via:
si $\rho_M : M \to M \otimes B, \rho_N : N \to N \otimes B$ son coacciones de cada B-comódulo M, N respectivamente. Consideramos la transformación lineal

$$\rho_{M\otimes N} = (\mathrm{Id} \otimes m) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau_{B,N} \otimes \mathrm{Id}) \circ (\rho_M \otimes \rho_N)$$

la cual funciona como coacción, haciendo de $M \otimes N$ un B-comódulo. En notación de Sweedler,

$$\rho(m \otimes n) = m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1$$

para todo $m \in M, n \in N$.

Ejemplo 2.46. Sea $H = k[G]$, entonces la noción de $k[G]$-comódulo es lo mismo que una G-graduación (ver Ejemplo 2.37). Si M y N son dos $k[G]$-comódulos, $M = \oplus_{g\in G} M_g$ y $N = \oplus_{g\in G} N_g$, entonces $M \otimes N$ es (con la definición anterior) naturalmente un $k[G]$-comódulo, y la G-graduación correspondiente es

$$M \otimes N = \bigoplus_{g\in G} (M \otimes N)_g$$

donde

$$(M \otimes N)_g = \bigoplus_{xy=g} M_x \otimes N_y.$$

Demostración. En efecto, si $m \in M_x$ tiene grado x y $n \in N_y$ tiene grado y, entonces

$$\rho(m) = x \otimes m, \ \rho(n) = y \otimes n,$$

luego la coestructura en $m \otimes n$ es

$$\rho(m \otimes n) = xy \otimes m \otimes n$$

y por lo tanto $m \otimes n$ tiene grado xy. $\square$

3. Álgebras de Hopf: endomorfismos y automorfismos

3.1. La antípoda

Definición 3.1. Si H es una biálgebra, diremos que es un álgebra de Hopf si existe $S : H \to H$ una transformación lineal tal que

$$S(h_1)h_2 = \epsilon(h)1_H = h_1 S(h_2)$$

para todo $h \in H$, donde $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$. Una tal $S : H \to H$ se denominará una antípoda.

Ejemplo 3.2. Si G es un grupo y $H = k[G]$, entonces $S(g) = g^{-1}$ es una antípoda y por lo tanto $k[G]$ es Hopf.

Lema 3.3. *Si H es Hopf, entonces la antípoda S es única. Además verifica*

$$S(hk) = S(k)S(h), \ \forall h, k \in H$$

y

$$\Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \tau \circ \Delta$$

donde $\tau : H \otimes H \to H \otimes H$, está definida por $\tau(h \otimes k) = k \otimes h$. Es decir,

$$S(h)_1 \otimes S(h)_2 = S(h_2) \otimes S(h_1).$$

Demostración. Para probar la unicidad, consideramos a S como elemento de $\mathrm{Hom}_k(H, H)$. Como H es bialgebra, entonces es tanto algebra como coálgebra y por lo tanto $\mathrm{Hom}_k(H, H)$ tiene un producto (asociativo) de convolución asociado. Recordamos que está definido por

$$(f \star g)(h) = f(h_1)g(h_2).$$

El elemento neutro de la convolucion para $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ donde A es algebra y C es coálgebra consiste del elemento $(c \mapsto \epsilon(c)1_A)$. En nuestro caso, $A = C = H$, y el axioma de antípoda

$$S(h_1)h_2 = \epsilon(h)1_H = h_1 S(h_2)$$

se interpreta en términos de convolución como

$$S \star \mathrm{Id}_H = 1_\star = \mathrm{Id}_H \star S,$$

es decir, S es el inverso para la convolución de la transformación lineal $\mathrm{Id}_H : H \to H$. Por lo tanto, si una biálgebra B es tal que $\mathrm{Id}_B \in \mathrm{Hom}_k(B, B)$ admite inverso para el producto de convolución, entonces el inverso es único.

Por otra parte consideremos los maps $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$ definidos por

$\alpha(h \otimes k) = S(k)S(h)$ y $\beta(h \otimes k) = S(hk)$. Aquí $(\mathrm{Hom}(H \otimes H, H), \star, \epsilon_{H\otimes H}1_H)$ es un monoide con unidad a través del producto de convolución $\star$. Veamos que

$$\beta \star m = \epsilon_{H\otimes H}1_H = m \star \alpha,$$

es decir que tanto β como α son inversos de m en el monoide $\mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$, por lo tanto debe ocurrir que $\beta = \alpha$. Sean $h, k \in H$, entonces

$$\begin{aligned}(\beta \star m)(h \otimes k) &= \beta(h_1 \otimes k_1)m(h_2 \otimes k_2)\\ &= S(h_1k_1)h_2k_2\end{aligned}$$

donde $\Delta_{H\otimes H}(h \otimes k) = (h_1 \otimes k_1) \otimes (h_2 \otimes k_2)$. Como Δ es morfismo de álgebras, de $\Delta(hk) = \Delta(h)\Delta(k)$ se obtiene que

$$(hk)_1 \otimes (hk)_2 = h_1k_1 \otimes h_2k_2. \tag{27}$$

Además como ϵ también es morfismo de álgebras se obtiene que

$$\epsilon(hk) = \epsilon(h)\epsilon(k) = \epsilon_{H\otimes H}(h \otimes k).$$

Por otro lado si consideramos la aplicación $\phi : H \otimes H \to H$, definida por $\phi(h \otimes k) = S(h)k$ y aplicamos la misma a cada miembro de (27), obtenemos que

$$S((hk)_1)(hk)_2 = S(h_1k_1)h_2k_2,$$

por lo tanto por todo lo anterior podemos escribir que

$$\begin{aligned}(\beta \star m)(h \otimes k) &= S((hk)_1)(hk)_2\\ &= \epsilon(hk)1_H\\ &= \epsilon_{H\otimes H}(h \otimes k)1_H\end{aligned}$$

con lo cual

$$\beta \star m = \epsilon_{H\otimes H}1_H.$$

Ahora veamos que $m \star \alpha = \epsilon_{H\otimes H}1_H$,

$$\begin{aligned}(m \star \alpha)(h \otimes k) &= m(h_1 \otimes k_1)\alpha(h_2 \otimes k_2)\\ &= h_1k_1S(k_2)S(h_2)\\ &= h_1\epsilon(k)1_HS(h_2) \qquad (28)\\ &= h_1S(h_2)\epsilon(k)1_H\\ &= \epsilon(h)1_H\epsilon(k)1_H \qquad (29)\\ &= \epsilon(h)\epsilon(k)1_H\\ &= \epsilon_{H\otimes H}(h \otimes k)1_H\end{aligned}$$

donde para obtener (28) utilizamos la condición de antípoda en k y para obtener (29) utilizamos la condición de antípoda en h.

Para probar la última igualdad del lema, se procede de manera similar a lo anterior, en este caso consideremos el monoide con unidad $(\mathrm{Hom}(H, H \otimes H), \star, \epsilon 1_{H\otimes H})$ donde nuevamente $\star$ es el producto convolución. Probaremos que en este monoide $\Delta \circ S$ es inverso a izquierda de Δ y que

$(S \otimes S) \circ \tau \circ \Delta$ es inverso a derecha de Δ, con lo cual resultarán iguales. Para esto consideremos $\alpha := (S \otimes S) \circ \tau \circ \Delta$ y $\beta := \Delta \circ S$. Comencemos por $\beta \star \Delta$, sea $h \in H$,

$$\begin{aligned}
\beta \star \Delta(h) &= \beta(h_1)\Delta(h_2) \\
&= (\Delta \circ S)(h_1)\Delta(h_2) \\
&= \Delta(S(h_1))\Delta(h_2) \\
&= \Delta(S(h_1)h_2) \\
&= \Delta(\epsilon(h)1_H) \\
&= \epsilon(h)\Delta(1_H) \\
&= \epsilon(h)1_{H\otimes H}
\end{aligned}$$

por lo tanto $\beta \star \Delta = \epsilon 1_{H\otimes H}$. Ahora veamos $\Delta \star \alpha$ con $h \in H$:

$$\begin{aligned}
\Delta \star \alpha(h) &= \Delta(h_1)\alpha(h_2) \\
&= \Delta(h_1)((S \otimes S) \circ \tau \circ \Delta(h_2)) \\
&= \Delta(h_1)(S(h_4) \otimes S(h_3)) \\
&= (h_1 \otimes h_2)(S(h_4) \otimes S(h_3)) \\
&= h_1S(h_4) \otimes h_2S(h_3) \\
&= h_1S(h_3) \otimes \epsilon(h_2)1_H && \text{por definición de antípoda} \\
&= h_1\epsilon(h_2)S(h_3) \otimes 1_H \\
&= h_1S(\epsilon(h_2)h_3) \otimes 1_H && \text{por linealidad} \\
&= h_1S(h_2) \otimes 1_H && \text{por counitariedad} \\
&= (\epsilon(h)1_H) \otimes 1_H && \text{por definición de antípoda} \\
&= \epsilon(h)1_H \otimes 1_H \\
&= \epsilon(h)1_{H\otimes H}.
\end{aligned}$$

□

Observación 3.4. Si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita, entonces la biálgebra H^* es Hopf con antípoda $S_{H^*} = (S_H)^*$.

Ejemplo 3.5. G finito, $H = k^G$ es Hopf con $S(f)(g) = f(g^{-1})$.

3.2. Elementos de tipo grupo

Definición 3.6. Sea H una coálgebra, definimos $G(H) := \{0 \neq h \in H : \Delta(h) = h \otimes h\}$. Se denominan los elementos de tipo grupo en H (group-like elements).

Proposición 3.7. *Si H es una biálgebra entonces $G(H)$ es un semigrupo (con la multiplicación de H). Si además H es Hopf, entonces $G(H)$ es un grupo: si $g \in G(H)$ entonces $S(g) \in G(H)$ y $g^{-1} = S(g)$.*

Demostración. Dados $g, h \in G(H)$ queremos ver que $gh \in G(H)$, pero como H es biálgebra se tiene que $\Delta : H \to H \otimes H$ es morfismo de álgebras, con cual obtenemos que

$$\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h) = (g \otimes g)(h \otimes h) = (gh) \otimes (gh)$$

de esta manera hemos probado que $gh \in G(H)$. La propiedad asociativa entre elementos

$g_1, g_2, g_3 \in G(H)$ se verifica trivialmente ya que H es un álgebra. Además tomamos

$1_{G(H)} = 1_H$ como elemento neutro de $G(H)$, se verifica que $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ ya que al ser H una biálgebra se tiene que Δ es morfismo de álgebras unitarias. De esta manera se verificó que $G(H)$ es un semigrupo.

Veamos ahora que, si $g \in G(H)$, entonces $S(g) \in G(H)$. Para eso utilizaremos el Lema 3.3,que nos dice que S es un "anti"-morfismo:

$$S(h)_1 \otimes S(h)_2 = \Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1).$$

En el caso particular $\Delta(g) = g \otimes g$, esta fórmula implica $S(G(H)) \subseteq G(H)$, y como además

$$S(g)g = \epsilon(g)1_H = gS(g)$$

entonces necesariamente $g \in G(H)$ es inversible. □

Observación 3.8. Si $H = k[M]$ donde M es un semigrupo (i.e. un monoide asociativo con neutro), el Lema 2.15 nos asegura que $G(k[M]) = M$.

Corolario 3.9. *Sea M un semigrupo y $H = k[M]$ el álgebra de semigrupo con la estructura de biálgebra dada por $\Delta(g) = g \otimes g$ para todo $g \in M$. Entonces la biálgebra H es Hopf (i.e. admite una antípoda) si y sólo si M es grupo, es decir, si y sólo si todo elemento de M tiene un inverso (en M).*

3.3. Primitivos

Ejemplo 3.10. Sea V un espacio vectorial y $H = S(V)$ el álgebra simétrica en V. Entonces el único morfismo de álgebras $\Delta : S(V) \to S(V) \otimes S(V)$ determinado por

$$\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$$

es una estructura de biálgebra en $S(V)$ que de hecho es de Hopf, con antípoda el único morfismo de álgebras que verifica $S(v) = -v$.

Ejemplo 3.11. Si $H = k \oplus kg \oplus kx \oplus kgx$ el espacio vectorial de dimensión 4 con base $1, g, x, gx$, con estructura de álgebra dada por

$$H \cong k\{g, x\}/\{x^2 = 0, g^2 = 1, gx = -xg\}$$

y comultiplicación determinada por

$$\Delta(g) = g \otimes g$$

$$\Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x$$

es un álgebra de Hopf con antípoda

$$S(g) = g$$

$$S(x) = gx.$$

Además $\epsilon(g) = 1$ y $\epsilon(x) = 0$.

Para probar esto debemos ver que

$$S \star \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \star S = u \circ \epsilon, \tag{30}$$

donde $u : k \to H$ es la transformación lineal unidad correspondiente al álgebra H. Para probar estas igualdades bastará verlo en cada elemento de la base $1, g, x, gx$. Empecemos por el elemento 1.

$$S \star \mathrm{Id}(1) = m \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(1) = S(1)1 = 1$$

pero también ocurre

$$\mathrm{Id} \star S(1) = 1,$$

además

$$u \circ \epsilon(1) = u(1_k) = 1,$$

con lo cual se verifican las igualdades (30). Ahora para el elemento g,

$$S \star \mathrm{Id}(g) = gg$$

por otra parte

$$\mathrm{Id} \star S(g) = gg$$

y

$$u \circ \epsilon(g) = u(1_k) = 1,$$

pero por definición de H, se tiene que $gg = 1$, con lo cual las igualdades (30) se verifican para este elemento. Para x,

$$\begin{aligned} S \star \mathrm{Id}(x) &= m \circ (S \otimes \mathrm{Id})(x \otimes g + 1 \otimes x) \\ &= m(gx \otimes g) + m(1 \otimes x) \\ &= gxg + x \\ &= -xgg + x \\ &= -x + x = 0 \end{aligned}$$

y

$$\mathrm{Id} \star S(x) = xg + gx = 0$$

pero también

$$u \circ \epsilon(x) = u(0) = 0$$

así, las igualdades ya citadas se cumplen para x. Por último vamos a verlo para el elemento gx,

$$\begin{aligned}
S \star \mathrm{Id}(gx) &= m \circ (S \otimes \mathrm{Id})(\Delta(gx)) \\
&= m \circ (S \otimes \mathrm{Id})(\Delta(g)\Delta(x)) \\
&= m \circ (S \otimes \mathrm{Id})((g \otimes g)(x \otimes g + 1 \otimes x)) \\
&= m \circ (S \otimes \mathrm{Id})(gx \otimes gg + g \otimes gx) \\
&= m(S(x)S(g) \otimes gg) + m(g \otimes gx) \\
&= m(gxg \otimes gg) + m(g \otimes gx) \\
&= gxggg + ggx \\
&= -xgggg + ggx \\
&= -x + x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Análogamente se puede ver que

$$\mathrm{Id} \star S(gx) = 0.$$

Por otro lado

$$u \circ \epsilon(gx) = u(\epsilon(g)\epsilon(x)) = u(0) = 0,$$

de esta manera se cumplen las igualdades anteriores. Hemos probado que S definida más arriba es una antípoda para H.

4. Biálgebras universales: semigrupos cuánticos

4.1. Construcciones universales

4.1.1. Caso conmutativo: la biálgebra $\mathbb{S}(C)$

Sea C una coálgebra de dimensión finita, supongamos que tiene una base $x_1, \ldots, x_n$, y en esa base la comultiplicación está dada por $\Delta_C(x_i) = \sum_{k,l} c_i^{kl} x_k \otimes x_l$. Se considera

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}(C) = k[x_1, \ldots, x_n]$$

el anillo de polinomios en las variables $x_1 \ldots, x_n$. Se define Δ como el único morfismo de k-álgebras $\mathbb{S} \to \mathbb{S} \otimes_k \mathbb{S} \cong k[\{x_i \otimes x_j\}_{i,j=1\ldots,n}]$ determinado por

$$\Delta(x_i) = \sum_{k,l} c_i^{kl} x_k \otimes x_l \in \mathbb{S} \otimes \mathbb{S}.$$

Entonces $\mathbb{S}$ es una biálgebra coasociativa (conmutativa como álgebra). Si C es counitaria, entonces $\mathbb{S}$ también lo es.

Demostración. Empecemos con un Lema.

Lema 4.1. *Sea A un álgebra y $V \subseteq A$ un subespacio que genera a A como álgebra. Sea $\Delta : A \to A \otimes A$ un morfismo de álgebras. Entonces Δ es coasociativa si y sólo si $\Delta|_V$ lo es. Es decir, si el siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\Delta|_V"] \arrow[d, "\Delta|_V"'] & A \otimes A \arrow[d, "\Delta \otimes id"] \\
A \otimes A \arrow[r, "id \otimes \Delta"] & A \otimes A \otimes A.
\end{tikzcd}$$

Demostración. Si Δ es coasociativa se cumple trivialmente que $\Delta|_V$ también lo es. Veamos la vuelta, sea $a \in A$, tenemos que ver que $(\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta(a) = (\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta(a)$. Como V es un subespacio que genera A como álgebra se tiene que

$$a = \sum \lambda_{i_1,\ldots,i_n} v_{i_1} \cdots v_{i_n}$$

para ciertos $\lambda_{i_1,\ldots,i_n} \in k$, $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \in V$. Por linealidad basta ver que $(\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta(v_{i_1} \cdots v_{i_n}) = (\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta(v_{i_1} \cdots v_{i_n})$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta(v_{i_1} \cdots v_{i_n}) &= (\Delta \otimes \mathrm{Id})(\Delta|_V(v_{i_1}) \cdots \Delta|_V(v_{i_n})) && \Delta \text{ es morfismo de álgebras} \\
&= (\Delta \otimes \mathrm{Id})(\Delta|_V(v_{i_1})) \cdots (\Delta \otimes \mathrm{Id})(\Delta|_V(v_{i_n})) && \Delta \otimes \mathrm{Id} \text{ es morfismo de álgebras} \\
&= (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(\Delta|_V(v_{i_1})) \cdots (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(\Delta|_V(v_{i_n})) && \text{por hipótesis} \\
&= (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(\Delta|_V(v_{i_1}) \cdots \Delta|_V(v_{i_n})) \\
&= (\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta(v_{i_1} \cdots v_{i_n}).
\end{aligned}$$

□

Para ver que $\mathbb{S} = k[x_1, \ldots, x_n]$ es una biálgebra coasociativa (conmutativa como álgebra) debemos ver que $\mathbb{S}$ es:

- Álgebra (con multiplicación conmutativa y unidad)
- Coálgebra (con comultiplicación coasociativa)
- $\Delta : \mathbb{S} \to \mathbb{S} \otimes \mathbb{S}$ es morfismo de álgebras (esto nos lo garantiza el enunciado).

Observación 4.2. También veremos que existirá una aplicación lineal $\epsilon : \mathbb{S} \to k$ que será counidad para $\mathbb{S}$ como coálgebra, esto será gracias a que C es también counitaria. Además veremos finalmente que ϵ resultará también morfismo de álgebras.

En efecto, $\mathbb{S}$ es un álgebra con unidad pues es el álgebra de polinomios. Ahora veremos que $\mathbb{S}$ también tiene estructura de coálgebra. Teníamos en el enunciado la aplicación lineal Δ determinado por

$$\Delta(x_i) = \sum_{k,l} c_i^{kl} x_k \otimes x_l \in \mathbb{S} \otimes \mathbb{S}.$$

Debemos ver que esta aplicación lineal es coasociativa. Para ver que Δ es coasociativa, utilizaremos el lema provisto anteriormente. Nuestro álgebra aquí es $\mathbb{S} = k[x_1, \ldots, x_n]$, a su vez la coálgebra C es subespacio de $\mathbb{S}$ y genera a $\mathbb{S}$ como álgebra. Por lo tanto, por el lema para ver que Δ es coasociativa basta ver que $\Delta|_C$ es coasociativa, es decir que el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta|_C"] \arrow[d, "\Delta|_C"'] & \mathbb{S} \otimes \mathbb{S} \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{Id}"] \\ \mathbb{S} \otimes \mathbb{S} \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\Delta"] & \mathbb{S} \otimes \mathbb{S} \otimes \mathbb{S} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Por otra parte C como espacio vectorial tiene la base $\{x_1, \ldots, x_n\}$, por lo tanto como $\Delta|_C$, $\Delta \otimes \mathrm{Id}$ y $\mathrm{Id} \otimes \Delta$ son k-lineales, para ver que el diagrama conmuta, basta verlo para cada elemento x_i.

Entonces

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(\Delta|_C(x_i)) &= (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(\sum_{k,l} c_i^{kl} x_k \otimes x_l) \\ &= \sum_{k,l} c_i^{kl} x_k \otimes \Delta(x_l) \\ &= \sum_{k,l} c_i^{kl} x_k \otimes \Delta_C(x_l). \end{aligned} \tag{31}$$

Ahora miremos que nos decía la hipótesis del enunciado, tenemos C una coálgebra, su comultiplicación Δ_C es coasociativa, esto dice que el diagrama correspondiente conmuta, en otras palabras:

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta_C)(\Delta_C(x_j)) = (\Delta_C \otimes \mathrm{Id})(\Delta_C(x_j)) \qquad \forall j = 1 \ldots n,$$

entonces
$$(\mathrm{Id}\otimes\Delta_C)(\sum_{p,q}c_j^{pq}x_p\otimes x_q)=(\Delta_C\otimes\mathrm{Id})(\sum_{p,q}c_j^{pq}x_p\otimes x_q),$$
por lo tanto
$$\sum_{p,q}c_j^{pq}x_p\otimes\Delta_C(x_q)=\sum_{p,q}c_j^{pq}\Delta_C(x_p)\otimes x_q \qquad \forall.j=1\ldots n$$
Volviendo al diagrama original, usando lo reciente, el último miembro (31) lo podemos escribir como:
$$\begin{aligned}\sum_{k,l}c_i^{kl}\Delta_C(x_k)\otimes x_l &= \sum_{k,l}c_i^{kl}\Delta(x_k)\otimes x_l\\ &=(\Delta\otimes\mathrm{Id})(\sum_{k,l}c_i^{kl}x_k\otimes x_l)\\ &=(\Delta\otimes\mathrm{Id})(\Delta|_C(x_i)).\end{aligned}$$
Esto prueba que $\Delta|_C$ es coasociativa, por lo tanto Δ también lo es.

Ahora veamos que existe una aplicación lineal ϵ que hace de $\mathbb{S}$ una coálgebra counitaria.
Tenemos para C una counidad $\epsilon_C : C\to k$ que hace que el siguiente diagrama conmute:
$$\begin{tikzcd} C\otimes C \arrow[r, "\epsilon_C\otimes\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\epsilon_C"'] & k\otimes C \arrow[d, "\cong"] \\ C\otimes k \arrow[r, "\cong"] & C \arrow[ul, "\Delta_C"'] \end{tikzcd}$$
Es decir
para cada $i=1\ldots n$, por un lado tenemos:
$$(\epsilon_C\otimes\mathrm{Id})(\Delta_C(x_i))=x_i, \tag{32}$$
por el otro:
$$(\mathrm{Id}\otimes\epsilon_C)(\Delta_C(x_i))=x_i. \tag{33}$$
En búsqueda de una counidad para $\mathbb{S}$, notemos que la aplicación ϵ_C induce sobre $\mathbb{S}$ la siguiente aplicación:
determinamos $\epsilon:\mathbb{S}\to k$ por:
$$\epsilon(x_i)=\epsilon_C(x_i).$$
Así determinada ϵ resulta lineal y además será morfismo de álgebras.
Veamos que ϵ es counidad para $\mathbb{S}$: tenemos que ver que el diagrama
$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}\otimes \mathbb{S} \arrow[r, "\epsilon\otimes\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\epsilon"'] & k\otimes \mathbb{S} \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{S}\otimes k \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{S} \arrow[ul, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. De manera análoga a lo hecho antes, bastará verlo para cada elemento $x_i \in \mathbb{S}$. Usando (32),

$$\begin{aligned}
(\epsilon \otimes \mathrm{Id})(\Delta(x_i)) &= (\epsilon \otimes \mathrm{Id})(\sum_{k,l} c_i^{kl} x_k \otimes x_l) \\
&= \sum_{k,l} c_i^{kl} \epsilon(x_k) x_l \\
&= \sum_{k,l} c_i^{kl} \epsilon_C(x_k) x_l \\
&= (\epsilon_C \otimes \mathrm{Id})(\sum_{k,l} c_i^{kl} x_k \otimes x_l) \\
&= (\epsilon_C \otimes \mathrm{Id})(\Delta_C(x_i)) = x_i.
\end{aligned}$$

Así también, usando (33) se prueba que

$$(\mathrm{Id} \otimes \epsilon)(\Delta(x_i)) = x_i,$$

lo que prueba que $\mathbb{S}$ es counitaria como coálgebra. Recordamos que la propiedad de compatibilidad, es decir, que Δ es morfismo de álgebras, está garantizada por la definición misma de Δ. $\square$

Teorema 4.3. *(Propiedad universal) Sea B una biálgebra asociativa que es* **conmutativa** *como álgebra. Si $f : C \to B$ es un morfismo de coálgebras, entonces existe un único morfismo de biálgebras $\widehat{f} : \mathbb{S}(C) \to B$ que extiende a f, es decir, que $\widehat{f}|_C = f$.*

Demostración. Dado $a \in \mathbb{S}$, podemos escribir $a = \sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r}$ para ciertos $\lambda_{i_1,\ldots,i_r} \in k$, $x_{i_j} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ para todo $j = 1, \ldots, r$. Entonces definimos la transformación lineal $\widehat{f}(a) = \sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r} f(x_{i_1}) \ldots f(x_{i_r})$. En esta definición está implícito que $\widehat{f}(\lambda \cdot 1_{\mathbb{S}}) = \lambda \cdot 1_B$.

Notemos que $\widehat{f}|_C = f$, ya que por la misma definición establecida $\widehat{f}$ y f coinciden en cada x_k para todo $k = 1, \ldots, n$.

Para ver que $\widehat{f}$ es morfismo de biálgebras debemos probar que es morfismo de álgebras y morfismo de coálgebras. Para ver que es morfismo de álgebras debemos probar que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S} \otimes \mathbb{S} \arrow[r, "\widehat{f} \otimes \widehat{f}"] \arrow[d, "m_{\mathbb{S}}"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
\mathbb{S} \arrow[r, "\widehat{f}"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{S} \arrow[r, "\widehat{f}"] & B \\
k \arrow[u, "u_{\mathbb{S}}"] \arrow[ur, "u_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que el primer diagrama conmuta,

$$\begin{aligned}
& m_B(\widehat{f} \otimes \widehat{f})(\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r} x_{i_1} \ldots x_{i_r} \otimes \sum \mu_{j_1,\ldots,j_s} x_{j_1} \ldots x_{j_s}) = \\
&= m_B(\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r} f(x_{i_1}) \ldots f(x_{i_r}) \otimes \sum \mu_{j_1,\ldots,j_s} f(x_{j_1}) \ldots f(x_{j_s})) \\
&= \sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r} \mu_{j_1,\ldots,j_s} f(x_{i_1}) \ldots f(x_{i_r}) f(x_{j_1}) \ldots f(x_{j_s}),
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
&\widehat{f}m_{\mathbb{S}}(\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r}x_{i_1}\ldots x_{i_r}\otimes \sum \mu_{j_1,\ldots,j_s}x_{j_1}\ldots x_{j_s}) =\\
&=\widehat{f}(\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r}\mu_{j_1,\ldots,j_s}x_{i_1}\ldots x_{i_r}x_{j_1}\ldots x_{j_s})\\
&=\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r}\mu_{j_1,\ldots,j_s}f(x_{i_1})\ldots f(x_{i_r})f(x_{j_1})\ldots f(x_{j_s}),
\end{aligned}$$

lo que prueba que el diagrama conmuta.

Veamos que el segundo conmuta. Sea $\lambda\in k$, por un lado

$$\begin{aligned}
\widehat{f}u_{\mathbb{S}}(\lambda) &= \widehat{f}(\lambda\cdot 1_{\mathbb{S}})\\
&=\lambda\cdot 1_B
\end{aligned}$$

, por otro

$$u_B(\lambda)=\lambda\cdot 1_B,$$

así el segundo diagrama conmuta.

Para ver que $\widehat{f}$ es morfismo de coálgebras debemos ver que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S} \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "\Delta"'] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\
\mathbb{S}\otimes\mathbb{S} \arrow[r, "\widehat{f}\otimes\widehat{f}"] & B\otimes B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\epsilon_B"] & k \\
\mathbb{S} \arrow[u, "\widehat{f}"] \arrow[ur, "\epsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Para ver la conmutatividad del primer diagrama lo haremos en dos etapas. Similarmente a lo hecho antes, primero vamos a ver que, probar la conmutatividad de este diagrama es equivalente a probar la de este otro

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta|_C"'] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\
\mathbb{S}\otimes\mathbb{S} \arrow[r, "\widehat{f}\otimes\widehat{f}"] & B\otimes B
\end{tikzcd} \tag{34}$$

Aquí utilizaremos que Δ_B y Δ son morfismos de álgebras ya que B y $\mathbb{S}$ son biálgebras, además que $\widehat{f}\otimes\widehat{f}$ es morfismo de álgebras ya que $\widehat{f}$ lo es,

$$\begin{aligned}
\Delta_B\widehat{f}(\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r}x_{i_1}\ldots x_{i_r}) &= \Delta_B(\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r}f(x_{i_1})\ldots f(x_{i_r}))\\
&=\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r}\Delta_B(f(x_{i_1}))\ldots \Delta_B(f(x_{i_r}))\\
\text{como el diagrama auxiliar conmuta} &=\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r}(\widehat{f}\otimes\widehat{f})(\Delta|_C(x_{i_1}))\ldots(\widehat{f}\otimes\widehat{f})(\Delta|_C(x_{i_r}))\\
&=\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r}(\widehat{f}\otimes\widehat{f})(\Delta|_C(x_{i_1})\ldots \Delta|_C(x_{i_r}))\\
&=\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r}(\widehat{f}\otimes\widehat{f})\Delta(x_{i_1}\ldots x_{i_r})\\
&=(\widehat{f}\otimes\widehat{f})\Delta(\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r}x_{i_1}\ldots x_{i_r}).
\end{aligned}$$

Una vez visto esto, resta probar que efectivamente el diagrama (34) conmuta, esto saldrá de las hipótesis, teníamos que $f : C \to B$ es morfismo de coálgebras, esto significa que el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"] & B \otimes B \end{tikzcd}$$

conmuta, pero entonces también lo hace el diagrama (34), ya que $\Delta|_C(x_k) = \Delta_C(x_k)$ y $(\widehat{f} \otimes \widehat{f})(\Delta|_C(x_k)) = (f \otimes f)(\Delta|_C(x_k))$ para todo $k = 1, \ldots n$.

Queda ver que el diagrama de counitariedad conmuta, para esto utilizaremos que tanto $\epsilon : \mathbb{S} \to k$ y $\epsilon_B : B \to k$ son morfismos de álgebras ya que $\mathbb{S}$ y B son biálgebras, además tenámos que $f : C \to B$ era morfismo de coálgebras, entonces también el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\epsilon_B"] & k \\ C \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\epsilon_C"'] & \end{tikzcd}$$

Probemos lo que queremos,

$$\begin{aligned} \epsilon_B \widehat{f}(\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r} x_{i_1} \ldots x_{i_r}) &= \epsilon_B(\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r} f(x_{i_1}) \ldots f(x_{i_r})) \\ &= \sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r} \epsilon_B(f(x_{i_1})) \ldots \epsilon_B(f(x_{i_r})) \\ &= \sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r} \epsilon_C(x_{i_1}) \ldots \epsilon_C(x_{i_r}) \\ &= \sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r} \epsilon(x_{i_1}) \ldots \epsilon(x_{i_r}) \quad \text{por definición de } \epsilon \\ &= \sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r} \epsilon(x_{i_1} \ldots x_{i_r}) \\ &= \epsilon(\sum \lambda_{i_1,\ldots,i_r} x_{i_1} \ldots x_{i_r}). \end{aligned}$$

Por todo lo hecho podemos afirmar que $\widehat{f} : \mathbb{S} \to B$ es morfismo de biálgebras. Para ver su unicidad, supongamos que existe $g : \mathbb{S} \to B$ morfismo de biálgebras tal que $g|_C = f$, veamos que $g = \widehat{f}$,

$$\begin{aligned} g(\sum \lambda_{i_1,\ldots.i_r} x_{i_1} \ldots x_{i_r}) &= \sum \lambda_{i_1,\ldots.i_r} g(x_{i_1}) \ldots g(x_{i_r}) \quad \text{pues } g \text{ es morfismo de álgebras} \\ &= \sum \lambda_{i_1,\ldots.i_r} f(x_{i_1}) \ldots f(x_{i_r}) \\ &= \widehat{f}(\sum \lambda_{i_1,\ldots.i_r} x_{i_1} \ldots x_{i_r}). \end{aligned}$$

Luego $g = \widehat{f}$. $\square$

4.1.2. El álgebra Tensorial $T(V)$

Sea V un $k-$espacio vectorial. Definimos $T(V)$ el espacio vectorial (de dimensión infinita,salvo que $V = 0$):

$$T(V) = \bigoplus_{n\geq 0} T^n = \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n} = k \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots$$

En este espacio vectorial definimos una estructura de álgebra graduada dada por, en sus componente homogéneas:

$$T^n \times T^m = V^{\otimes n} \times V^{\otimes m} \to V^{\otimes(n+m)} = T^{n+m}$$

$$((x_1 \otimes \ldots \otimes x_n), (y_1 \otimes \ldots \otimes y_m)) \mapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_m$$

y en caso de que n o m sean cero, $V^0 = k$ (por definición), y la multiplicación en este caso está dada por la estructura de k-espacio vectorial

$$\lambda \cdot (x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \lambda x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$$

y

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \cdot \lambda = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \lambda.$$

Esta aplicación es k-bilineal y se extiende a la multiplicación sobre $T(V)$. Veamos que es asociativa: Sean $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in V^{\otimes n}$, $y = y_1 \otimes \ldots \otimes y_m \in V^{\otimes m}$, $z = z_1 \otimes \ldots \otimes z_k \in C^{\otimes k}$. Queremos ver que

$$((x, y), z) = (x, (y, z)).$$

En efecto

$$\begin{aligned}
((x, y), z) &= ((x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_m), (z_1 \otimes \ldots \otimes z_k)) \\
&= x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_m \otimes z_1 \otimes \ldots \otimes z_k \\
&= ((x_1 \otimes \ldots \otimes x_n), (y_1 \otimes \ldots \otimes y_m \otimes z_1 \otimes \ldots \otimes z_k)) \\
&= ((x_1 \otimes \ldots \otimes x_n), ((y_1 \otimes \ldots \otimes y_m), (z_1 \otimes \ldots \otimes z_k))) \\
&= (x, (y, z)).
\end{aligned}$$

Esta prueba se extiende a la multiplicación sobre $T(V)$, la cual resulta asociativa. El elemento neutro de la multiplicación es claramente $1_k \in k \subseteq T(V)$. El álgebra así definida tiene la siguiente propiedad universal:

Proposición 4.4. *Si A es una k-algebra, V un k-espacio vectorial, y $f : V \to A$ es una transformación lineal, entonces existe un único morfismo de k-algebras*

$$\widetilde{f} : T(V) \to A$$

tal que $\widetilde{f}|_V = f$

Demostración. Al igual que antes tomamos $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n \in V^{\otimes n}$ y definimos $\widetilde{f} : T(V) \to A$ por

$$\widetilde{f}(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots f(x_n),$$

esta aplicación resulta un morfismo de álgebras que cumple $\widetilde{f}|_V = f$ por la misma definición de $\widetilde{f}$.

Veamos ahora la unicidad. Sea $g : T(V) \to A$ otro morfismo de álgebras con $g|_V = f$ y sea $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n \in V^{\otimes n}$. Entonces

$$\begin{aligned} g(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n) &= g(x_1) \cdot g(x_2) \ldots g(x_n) \quad \text{pues } g \text{ es morfismo de álgebras} \\ &= f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots f(x_n) \quad \text{pues} g|_V = f \\ &= \widetilde{f}(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n), \end{aligned}$$

lo cual prueba la unicidad de $\widetilde{f}$. □

4.2. La biálgebra $T(C)$

Sea ahora C una k-coálgebra. Definimos $T = T(C)$ el álgebra tensorial en C:

$$T(C) = \bigoplus_{n \geq 0} C^{\otimes n} = k \oplus C \oplus C^{\otimes 2} \oplus \cdots .$$

A partir de $\Delta : C \to C \otimes C \subset T(C) \otimes T(C)$ se define una comultiplicación en T:

$$\begin{tikzcd}
& C \otimes C \arrow[dr, "i \otimes i"] & \\
C \arrow[ur, "\Delta_C"] \arrow[rr, "(i\otimes i)\circ\Delta_C"] \arrow[d, "i"] & & TC \otimes TC \\
TC \arrow[urr, dashed, "\exists!", "\Delta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Veremos que $T(C)$ resulta una biálgebra coasociativa.

Demostración. Para ver que T es biálgebra coasociativa, basta ver que:

- T es coálgebra (con multiplicación coasociativa).
- $\Delta : T \to T \otimes T$ es morfismo de álgebras.

Acá volveremos a aplicar el mismo lema del principio, para ver que $\Delta : T \to T \otimes T$ es coasociativa, bastará ver que $\Delta|_C$ es coasociativa.

Pero por la propiedad universal citada en la proposición 4.4, si consideramos la transformación lineal $(i \otimes i) \circ \Delta_C : C \to T \otimes T$ donde, como sabemos $T \otimes T$ es una k-álgebra, existe un único morfismo de álgebras al que llamaremos convenientemente $\Delta : T \to T \otimes T$ tal que

$\Delta|_C = (i \otimes i)\Delta_C$.

Como Δ_C es coasociativa ya que C es una coálgebra, resulta que $\Delta : T \to T \otimes T$ es coasociativa. Además como se establece en la propiedad universal a la vez $\Delta : T \to T \otimes T$ es morfismo de álgebras. Así $T = T(C)$ resulta una biálgebra coasociativa. □

Teorema 4.5. *(Propiedad universal) Sea B una biálgebra asociativa. Si $f : C \to B$ es un morfismo de coálgebras, entonces existe un único morfismo de biálgebras $\widehat{f} : T(C) \to B$ que extiende a f, es decir, que $\widehat{f}|_C = f$.*

Demostración. Similarmente a lo hecho anteriormente para $x_1, \ldots, x_n \in C$ definimos la transformación lineal $\widehat{f}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = f(x_1) \ldots f(x_n)$. Acá también se cumple que $\widehat{f}(1_T) = 1_B$ y además $\widehat{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in C$. Tenemos que probar que los siguientes diagramas conmutan,

$$\begin{tikzcd} T \otimes T \arrow[r, "\widehat{f}\otimes\widehat{f}"] \arrow[d, "m_T"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ T \arrow[r, "\widehat{f}"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "\widehat{f}"] & B \\ k \arrow[u, "u_T"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd} \tag{35}$$

y por otro lado

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "\Delta"'] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\ T \otimes T \arrow[r, "\widehat{f}\otimes\widehat{f}"] & B \otimes B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\epsilon_B"] & k \\ T \arrow[u, "\widehat{f}"] \arrow[ur, "\epsilon"'] & \end{tikzcd} \tag{36}$$

donde $\epsilon : T \to k$, siendo $x_1, \ldots x_n \in C$, está dada por $\epsilon(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \epsilon_C(x_1) \ldots \epsilon_C(x_n)$.

Veamos entonces que cada diagrama conmuta, para los diagramas (35):

$$\begin{aligned} m_B(\widehat{f} \otimes \widehat{f})((x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \otimes (y_1 \otimes \ldots \otimes y_m)) &= m_B(f(x_1) \ldots f(x_n) \otimes f(y_1) \ldots f(y_m)) \\ &= f(x_1) \ldots f(x_n) \cdot f(y_1) \ldots f(y_m) \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \widehat{f} m_T((x_1 \otimes \ldots \otimes x_{i_n}) \otimes (y_1 \ldots y_m)) &= \widehat{f}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_m) \\ &= f(x_1) \ldots f(x_n) \cdot f(y_1) \ldots f(y_m), \end{aligned}$$

así este diagrama conmuta. Veamos que el segundo diagrama conmuta. Por un lado,

$$\begin{aligned} \widehat{f} u_T(1) &= \widehat{f}(1_T) \\ &= 1_B, \end{aligned}$$

por otro

$$u_B(1) = 1_B,$$

así el segundo diagrama conmuta. Veamos ahora que los diagramas (36) conmutan, para el primero, al igual a lo hecho anteriormente vamos a utilizar un diagrama auxiliar, basta ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta|_C"'] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\ T \otimes T \arrow[r, "\widehat{f}\otimes\widehat{f}"] & B \otimes B, \end{tikzcd}$$

probaremos que la conmutatitividad de este diagrama implica la la conmutatividad del diagrama original. Utilizaremos que $\Delta : T \to T \otimes T, \Delta_B, \widehat{f} \otimes \widehat{f}$ son morfismos de álgebras como lo hicimos anteriormente con la biálgebra $\mathbb{S}$.

$$\begin{aligned}
\Delta_B \widehat{f}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) &= \Delta_B(f(x_1) \ldots f(x_n)) \\
&= \Delta_B(f(x_1)) \ldots \Delta_B(f(x_n)) \\
\text{como el diagrama auxiliar conmuta} &= (\widehat{f} \otimes \widehat{f})(\Delta|_C(x_1)) \ldots (\widehat{f} \otimes \widehat{f})(\Delta|_C(x_n)) \\
&= (\widehat{f} \otimes \widehat{f})(\Delta|_C(x_1) \ldots \Delta|_C(x_n)) \\
&= (\widehat{f} \otimes \widehat{f})\Delta(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n).
\end{aligned}$$

Resta ver que efectivamente, con nuestras hipótesis, el diagrama auxiliar conmuta, sabíamos que $f : C \to B$ era morfismo de coálgebras, por lo tanto el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\
C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"] & B \otimes B
\end{tikzcd}$$

entonces también lo hace el diagrama auxiliar, ya que $\Delta|_C = (i \otimes i)\Delta_C$ donde i era la inclusión $i : C \to T(C) = T$ y además $(\widehat{f} \otimes \widehat{f})\Delta|_C(x) = (f \otimes f)\Delta_C(x)$ para todo $x \in C$.

Por último veamos que el diagrama de counitariedad para $\widehat{f}$ también conmuta. Para esto utilizaremos que ϵ_B es morfismo de álgebras ya B es una biálgebra y que el diagrama de counitariedad para f conmuta ya que f es morfismo de coálgebras, en efecto

$$\begin{aligned}
\epsilon_B \widehat{f}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) &= \epsilon_B(f(x_1) \ldots f(x_n)) \\
&= \epsilon_B(f(x_1)) \ldots \epsilon_B(f(x_n)) \\
&= \epsilon_C(x_1) \ldots \epsilon_C(x_n) \\
&= \epsilon(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n).
\end{aligned}$$

De esta manera se concluye que $\widehat{f}$ es morfismo de biálgebras. Veamos la unicidad. Supongamos existe $g : T \to B$ otro morfismo de biálgebras tal que $g|_C = f$, entonces

$$\begin{aligned}
g(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) &= g(x_1) \ldots g(x_n) \\
&= f(x_1) \ldots f(x_n) \\
&= \widehat{f}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n),
\end{aligned}$$

lo cual dice que $g = \widehat{f}$. $\square$

4.3. Generadores y relaciones: bi-ideales

Definición 4.6. Sea C una coálgebra, un subespacio I se dice **co-ideal** si $\Delta(I) \subseteq C \otimes I + I \otimes C$.

Ejemplo 4.7. Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras, entonces $I = \mathrm{Ker}(f)$ es un co-ideal.

Demostración. Citaremos y demostraremos el siguiente lema.

Lema 4.8. *Sean $f : V \to W$ y $g : V' \to W'$ dos aplicaciones k-lineales. Entonces*

$$Ker(f \otimes g) = Ker(f) \otimes V' + V \otimes Ker(g).$$

Demostración. Sea $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A_1}$ una base de $Ker(f)$, que completamos con $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A_2}$ para obtener una base de V. Afirmamos entonces que $\{f(v_\alpha)\}_{\alpha\in A_2}$ es un subconjunto linealmente independiente de W. En efecto, planteamos que

$$\sum_{\alpha\in A_2} c_\alpha f(v_\alpha) = 0$$

entonces

$$f(\sum_{\alpha\in A_2} c_\alpha v_\alpha) = 0.$$

Como $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A_2}$ por construción es linealmente independiente con los vectores de $Ker(f)$, se tiene que

$$\sum_{\alpha\in A_2} c_\alpha v_\alpha = 0.$$

Pero por el argumento de independencia lineal, se sigue que $c_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in A_2$. Análogamente sea $\{v'_\beta\}_{\beta\in B_1}$ una base de $Ker(g)$ que completamos con $\{v'_\beta\}_{\beta\in B_2}$ para formar una base de V'. Tenemos entonces que $\{g(v'_\beta)\}_{\beta\in B_2}$ es un subconjunto linealmente independiente de W'. Sea

$$v = \sum_{\alpha\in A_1\cup A_2, \beta\in B_1\cup B_2} c_{\alpha,\beta} v_\alpha \otimes v'_\beta \in Ker(f \otimes g),$$

entonces

$$\sum_{\alpha\in A_1\cup A_2, \beta\in B_1\cup B_2} c_{\alpha,\beta} f(v_\alpha) \otimes g(v'_\beta) = 0.$$

Como $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A_1} \subset Ker(f)$ y $\{v'_\beta\}_{\beta\in B_1} \subset Ker(g)$, de la última suma se tiene que

$$\sum_{\alpha\in A_2, \beta\in B_2} c_{\alpha,\beta} f(v_\alpha) \otimes g(v'_\beta) = 0.$$

Por la independencia lineal de la familia $\{f(v_\alpha) \otimes g(v'_\beta)\}_{\alpha\in A_2,\beta\in B_2}$ se sigue que $c_{\alpha,\beta} = 0$, para todo $\alpha \in A_2$ y todo $\beta \in B_2$. Por lo tanto

$$v = \sum_{\alpha\in A_1, \beta\in B_1\cup B_2} c_{\alpha,\beta} v_\alpha \otimes v'_\beta + \sum_{\alpha\in A_1\cup A_2, \beta\in B_1} c_{\alpha,\beta} v_\alpha \otimes v'_\beta \in Ker(f) \otimes V' + V \otimes Ker(g)$$

o sea

$$Ker(f \otimes g) \subseteq Ker(f) \otimes V' + V \otimes Ker(g).$$

La otra inclusión es inmediata. □

Volviendo a la demostración original de este ejemplo, teníamos que $I = Ker(f)$, tenemos que ver que

$$\Delta(I) \subseteq C \otimes I + I \otimes C.$$

Por hipótesis $f : C \to D$ es morfismo de coálgebras, esto implica que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"] & D \otimes D \end{tikzcd}$$

Sea $c \in Ker(f)$, por la conmutatividad de este diagrama obtenemos que

$$0 = \Delta_D(f(c)) = (f \otimes f)(\Delta_C(c)),$$

es decir $\Delta_C(c) \in Ker(f \otimes f)$, pero por el lema (4.8), aplicándolo a $f \otimes f$ se tiene que

$\Delta_C(c) \in Ker(f \otimes f) = I \otimes C + C \otimes I = C \otimes I + I \otimes C$ como queríamos probar. □

Proposición 4.9. *Sea $I \subseteq C$ un coideal y supongamos que $I \subseteq \mathrm{Ker}\epsilon$, entonces $0 \neq C/I$ admite una única estructura de coálgebra counitaria tal que $\pi : C \to C/I$ es un morfismo de coálgebras counitarias. Más aún, si $f : C \to D$ es un morfismo de coálgebras, entonces $\mathrm{Im}(f) \subseteq D$ es una subcoálgebra e $\mathrm{Im}(f) \cong C/I$ como coálgebras, donde $I = \mathrm{Ker}(f)$.*

Demostración. Veamos la primera parte de esta proposición. Enuciaremos una teorema ya conocido para esto.

Teorema 4.10. *Propiedad universal del cociente para espacios vectoriales. Sean V, W k-espacios vectoriales, $S \subseteq V$ un subespacio y $f : V \to W$ una transformación lineal tales que $S \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, entonces existe una única transformación lineal $\overline{f} : V/S \to W$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/S \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

es decir $\overline{f}\pi = f$.

Como I es coideal se tiene que

$$(\pi \otimes \pi)\Delta(I) \subseteq (\pi \otimes \pi)(C \otimes I + I \otimes C) = \{0\}.$$

Es decir $I \subseteq \mathrm{Ker}((\pi \otimes \pi)\Delta)$, luego por el teorema 4.10 aplicado a la función $(\pi \otimes \pi)\Delta$, existe una única función k-lineal a la que llamamos $\overline{\Delta} : C/I \to C/I \otimes C/I$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "(\pi\otimes\pi)\Delta"] \arrow[d, "\pi"'] & C/I \otimes C/I \\ C/I \arrow[ur, "\overline{\Delta}"'] & \end{tikzcd}$$

Por la conmutatividad de este diagrama tenemos que

$$\overline{\Delta}(\overline{c}) = \overline{c_1} \otimes \overline{c_2},$$

donde $\overline{c} = \pi(c)$, $\overline{c_i} = \pi(c_i)$ para $i = 1, 2$. Tenemos que probar que $\overline{\Delta}$ es coasociativa, pero esto se cumplirá pues $\Delta : C \otimes C \to C$ es coasociativa, es decir, tenemos que

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta(c) = (\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta(c) = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3. \tag{37}$$

Para $\overline{\Delta} : C/I \to C/I \otimes C/I$ tenemos que

$$\begin{aligned} (\overline{\Delta} \otimes \mathrm{Id})\overline{\Delta}(\overline{c}) &= (\overline{\Delta} \otimes \mathrm{Id})(\overline{c_1} \otimes \overline{c_2}) \\ &= \overline{\Delta}(\overline{c_1}) \otimes \overline{c_2}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id} \otimes \overline{\Delta})\overline{\Delta}(\overline{c}) &= (\mathrm{Id} \otimes \overline{\Delta})(\overline{c_1} \otimes \overline{c_2}) \\ &= \overline{c_1} \otimes \overline{\Delta}(\overline{c_2}). \end{aligned}$$

Pero por la igualdad (37) podemos escribir directamente que

$$\overline{\Delta}(\overline{c_1}) \otimes \overline{c_2} = \overline{c_1} \otimes \overline{\Delta}(\overline{c_2}) = \overline{c_1} \otimes \overline{c_2} \otimes \overline{c_3}.$$

Ahora veamos la counitariedad. Como $I \subseteq \mathrm{Ker}\epsilon$, nuevamente por el teorema 4.10 existe una única transformación lineal $\overline{\epsilon} : C/I \to k$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\pi"'] & k \\ C/I \arrow[ur, "\overline{\epsilon}"'] & \end{tikzcd}$$

o sea

$$\overline{\epsilon}(\overline{c}) = \epsilon(c) \tag{38}$$

para todo $c \in C$. Tenemos que ver que

$$(\overline{\epsilon} \otimes \mathrm{Id})\overline{\Delta} = (\mathrm{Id} \otimes \overline{\Delta})\overline{\Delta}.$$

Como para C se cumple counitariedad, tenemos que, dado $c \in C$

$$\epsilon(c_1)c_2 = c = \epsilon(c_2)c_1. \tag{39}$$

Para C/I planteamos,

$$\begin{aligned}(\overline{\epsilon} \otimes \mathrm{Id})\overline{\Delta}(\overline{c}) &= (\overline{\epsilon} \otimes \mathrm{Id})(\overline{c_1} \otimes \overline{c_2}) \\ &= \overline{\epsilon}(\overline{c_1})\overline{c_2} \\ &= \epsilon(c_1)\overline{c_2} \quad \text{por} \quad (38),\end{aligned}$$

por otro lado escribimos

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id} \otimes \overline{\epsilon})\overline{\Delta}(\overline{c}) &= (\mathrm{Id} \otimes \overline{\epsilon})(\overline{c_1} \otimes \overline{c_2}) \\ &= \overline{\epsilon}(\overline{c_2})\overline{c_1} \\ &= \epsilon(c_2)\overline{c_1} \quad \text{por} \quad (38).\end{aligned}$$

Pero si aplicamos π, que es k-lineal, a cada miembro de (39), obtenemos las igualdades

$$\epsilon(c_1)\overline{c_2} = \overline{c} = \epsilon(c_2)\overline{c_1}$$

como queríamos probar. Así obtenemos que C/I es una coálgebra. Notemos además que los diagramas antes realizados provenientes del teorema 4.10 determinan que $\pi : C \to C/I$ es un morfismo de coálgebras. Así también la unicidad de $\overline{\Delta}$ y la de $\overline{\epsilon}$ se sigue de las funciones determinadas por este mismo teorema.

Probemos ahora la segunda parte de esta proposición. Veamos primero que si $f : C \to D$ es morfismo de coálgebras, se tiene que $Im(f) \subseteq D$ es una subcoálgebra. Para demostrar esto tenemos que probar que $\Delta_D(\mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathrm{Im}(f) \otimes \mathrm{Im}(f)$. Como f es morfismo de coálgebras se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"] & D \otimes D \end{tikzcd}$$

Entonces, por este hecho, podemos escribir

$$\begin{aligned}\Delta_D(\mathrm{Im}(f)) &= (\Delta_D f)(C) \\ &= (f \otimes f)\Delta_C(C) \\ &\subseteq (f \otimes f)(C \otimes C) \\ &= f(C) \otimes f(C) \\ &= \mathrm{Im}(f) \otimes \mathrm{Im}(f),\end{aligned}$$

así resulta que $\mathrm{Im}(f)$ es una subcoálgebra. Para terminar con la última parte de la proposición en cuestión, enuciaremos y probaremos el siguiente teorema.

Teorema 4.11. *Sea $f : C \to D$ morfismo de coálgebras, $I \subseteq C$ un coideal tales que $I \subseteq \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}\epsilon$, entonces existe un único morfismo de coálgebras $\overline{f} : C/I \to D$ tal que el siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & D \\ C/I \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

o sea $\overline{f}\pi = f$.

Demostración. Nuevamente por el teorema 4.10 existe una única transformación lineal $\overline{f} : C/I \to D$ tal que $\overline{f}\pi = f$. Queremos probar que $\overline{f}$ es morfismo de coálgebras, pero como f lo es, tenemos las siguientes igualdades, dado $c \in C$

$$\begin{aligned}
(\Delta_D\overline{f})(\overline{c}) &= \Delta_D(\overline{f}(\overline{c})) \\
&= \Delta_D(f(c)) \\
&= (f \otimes f)\Delta_C(c) \\
&= (f \otimes f)(c_1 \otimes c_2) \\
&= f(c_1) \otimes f(c_2) \\
&= \overline{f}(\overline{c_1}) \otimes \overline{f}(\overline{c_2}) \\
&= (\overline{f} \otimes \overline{f})(\overline{c_1} \otimes \overline{c_2}) \\
&= (\overline{f} \otimes \overline{f})(\overline{\Delta}(\overline{c})).
\end{aligned}$$

Por otro lado, como estamos asumiendo que $I \subseteq Ker\epsilon$ podemos volver a utilizar el teorema 4.10 y así obtener la aplicación lineal $\overline{\epsilon} : C/I \to k$ como antes y al ser f morfismo de coálgebras, se tienen también las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned}
\epsilon_D\overline{f}(\overline{c}) &= \epsilon_D(f(c)) \\
&= \epsilon_C(c) \\
&= \overline{\epsilon}(\overline{c}),
\end{aligned}$$

es decir hemos probado la conmutatividad de los diagramas de la definición de morfismo de coálgebras, en este caso aplicada a $\overline{f}$. $\square$

Así obtenemos la prueba final de la proposición como corolario del teorema 4.11, tomando $I = \mathrm{Ker}(f)$, ya que de esta manera, $\overline{f}$ resulta inyectiva, pues dados $c, c' \in C$, si planteamos

$$\overline{f}(\overline{c}) = \overline{f}(\overline{c'}),$$

tenemos que

$$f(c) = \overline{f}(\overline{c}) = \overline{f}(\overline{c'}) = f(c'),$$

es decir $c - c' \in \mathrm{Ker}(f)$, con lo cual $\overline{c - c'} = 0$ o sea $\overline{c} = \overline{c'}$. Esto dice que

$$C/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(\overline{f}) = \mathrm{Im}(f)$$

como coálgebras. $\square$

Definición 4.12. Sea B una biálgebra e $I \subset B$ un ideal bilátero. Decimos que es un **bi-ideal** si además I es un co-ideal e $I \subseteq \mathrm{Ker}\epsilon$.

Proposición 4.13. *Sea $I \subseteq B$ un bi-ideal, entonces B/I es naturalmente una biálgebra (unitaria y counitaria), y la proyección al cociente es un morfismo de biálgebras.*

Demostración. Para empezar, es claro que B/I es una k-álgebra unitaria pues I es un ideal bilátero propio. Por otra parte, como I también es coideal e $I \subseteq \mathrm{Ker}\epsilon$, por la proposición 4.9, se tiene que B/I es una k-coálgebra con comultiplicación $\overline{\Delta}$ y counidad $\overline{\epsilon}$ definidas anteriormente.

Para concluir que B/I es una biálgebra faltaría ver que la comultiplicación y la counidad son morfismos de álgebras. Para probar que $\overline{\Delta}$ es morfismo de álgebras tenemos que ver que los siguientes diagramas conmutan,

$$\begin{tikzcd}
B/I \otimes B/I \arrow[r, "\overline{\Delta}\otimes\overline{\Delta}"] \arrow[d, "\overline{m}"'] & (B/I \otimes B/I) \otimes (B/I \otimes B/I) \arrow[d, "m_{B/I\otimes B/I}"] \\
B/I \arrow[r, "\overline{\Delta}"] & B/I \otimes B/I
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
B/I \arrow[r, "\overline{\Delta}"] & B/I \otimes B/I \\
k \arrow[u, "\overline{u}"] \arrow[ur, "u_{B/I\otimes B/I}"'] &
\end{tikzcd}$$

Para el primer diagrama,

$$\begin{aligned} m_{B/I\otimes B/I}(\overline{\Delta} \otimes \overline{\Delta})(\overline{b} \otimes \overline{b'}) &= m_{B/I\otimes B/I}((\overline{b_1} \otimes \overline{b_2}) \otimes (\overline{b'_1} \otimes \overline{b'_2})) \\ &= \overline{b_1 b'_1} \otimes \overline{b_2 b'_2}, \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}\overline{m}(\overline{b} \otimes \overline{b'}) &= \overline{\Delta}(\overline{bb'}) \\ &= \overline{(bb')_1} \otimes \overline{(bb')_2}, \end{aligned}$$

pero tenemos que $\Delta : B \to B \otimes B$ es morfismo de álgebras, por lo tanto obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\overline{(bb')_1} \otimes \overline{(bb')_2} &= \overline{\Delta}(\overline{bb'}) \\
&= (\pi \otimes \pi)\Delta(bb') \\
&= (\pi \otimes \pi)(\Delta(b)\Delta(b')) \\
&= (\pi \otimes \pi)((b_1 \otimes b_2)(b'_1 \otimes b'_2)) \\
&= (\pi \otimes \pi)(b_1 b'_1 \otimes b_2 b'_2) \\
&= \overline{b_1 b'_1} \otimes \overline{b_2 b'_2}.
\end{aligned}$$

Esto último prueba que el primer diagrama conmuta. Veamosló para el segundo diagrama, aquí utilizaremos que $\Delta(1_B) = 1_B \otimes 1_B$ pues Δ es morfismo de álgebras:

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}(\overline{u}(r)) &= \overline{\Delta}(\overline{u(r)}) \\
&= \overline{\Delta}(r\overline{u(1)}) \\
&= r\overline{\Delta}(\overline{1_B}) \\
&= r(\pi \otimes \pi)\Delta(1_B) \\
&= r(\pi \otimes \pi)(1_B \otimes 1_B) \\
&= r\overline{1_B} \otimes \overline{1_B} \\
&= (r\overline{1_B}) \otimes \overline{1_B} \\
&= \overline{u(r)} \otimes \overline{1_B} \\
&= \overline{u}(r) \otimes 1_{B/I},
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
u_{B/I\otimes B/I}(r) &= ru_{B/I\otimes B/I}(1) \\
&= r1_{B/I\otimes B/I} \\
&= r1_{B/I} \otimes 1_{B/I} \\
&= r\overline{u}(1) \otimes 1_{B/I} \\
&= \overline{u}(r) \otimes 1_{B/I},
\end{aligned}$$

demostrando así que el segundo diagrama conmuta. De esta manera hemos probado que

$\overline{\Delta} : B/I \to B/I \otimes B/I$ es morfismo de álgebras.

Ahora probemos que $\overline{\epsilon} : B/I \to k$ también lo es. Debemos ver que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
B/I \otimes B/I \arrow[r, "\overline{\epsilon}\otimes\overline{\epsilon}"] \arrow[d, "\overline{m}"'] & k \otimes k \arrow[d, "m_k"] \\
B/I \arrow[r, "\overline{\epsilon}"] & k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B/I \arrow[r, "\overline{\epsilon}"] & k \\
k \arrow[u, "\overline{u}"] \arrow[ur, "u_k"'] &
\end{tikzcd}$$

Para demostrar la conmutatividad de ambos diagramas, como antes recurriremos a que $\epsilon : B \to k$ es morfismo de álgebras. Para el primer diagrama tenemos,

$$\begin{aligned}\overline{\epsilon}\,\overline{m}(\overline{c} \otimes \overline{d}) &= \overline{\epsilon}(\overline{cd}) \\ &= \epsilon(cd) \\ &= \epsilon(c)\epsilon(d) \\ &= m_k(\epsilon(c) \otimes \epsilon(d)) \\ &= m_k(\overline{\epsilon} \otimes \overline{\epsilon})(\overline{c} \otimes \overline{d}),\end{aligned}$$

para el segundo diagrama, dado $r \in k$

$$\begin{aligned}\overline{\epsilon}(\overline{u}(r)) &= \overline{\epsilon}(\overline{u(r)}) \\ &= \epsilon(u(r)) \\ &= u_k(r).\end{aligned}$$

Así hemos demostrado que estos diagramas conmutan. Es decir probamos que $\overline{\epsilon}$ es morfismo de álgebras. De esta manera concluimos que B/I es una biálgebra unitaria y counitaria. Por último probemos que la proyección al cociente $\pi : B \to B/I$ es morfismo de biálgebras. Es decir tenemos que probar que π es morfismo de álgebras y morfismo de coálgebras a la vez. Por la proposición 4.9 ya probamos que es morfismo de coálgebras, para probar que π es morfismo de álgebras debemos ver que los siguientes diagramas conmutan,

$$\begin{tikzcd} B \otimes B \arrow[r, "\pi\otimes\pi"] \arrow[d, "m_B"'] & B/I \otimes B/I \arrow[d, "\overline{m}"] \\ B \arrow[r, "\pi"] & B/I \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\pi"] & B/I \\ k \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "\overline{u}"'] & \end{tikzcd}$$

Pero la conmutatividad de estos diagramas se dan de forma natural, ya que para el primero es probar que, en notación ya establecida

$$\overline{b} \cdot \overline{b'} = \overline{bb'}$$

y para el segundo

$$\overline{u}(r) = \overline{u(r)}$$

que coinciden justamente con las definiciones que hemos dado para establecer que B/I es una k-álgebra anteriormente. De esta manera queda probado que $\pi : B \to B/I$ es morfismo de álgebras, con lo cual π resulta morfismo de biálgebras.

□

Ejemplo 4.14. Sea B una biálgebra y $x \in B$ un (skew)primitivo,es decir, existen $g, h \in G(B)$ elementos de tipo grupo tales que $\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes h$. Entonces I = el ideal bilátero generado por x es un ideal (propio y contenido en $\mathrm{Ker}\epsilon$) que a su vez es un co-ideal, es decir, un bi-ideal.

Ejemplo 4.15. Sean g y h elementos de tipo grupo en una biálgebra, entonces $p = g - h$ es un (skew)primitivo. Son los llamados primitivos triviales. Por ejemplo, si g es de tipo grupo, entonces $g - 1$ es primitivo.

La siguiente proposición es clara:

Proposición 4.16. *Sea H un álgebra de Hopf e $I \subset H$ un bi-ideal propio contenido en $Ker \epsilon$. Si $S(I) \subseteq I$ (donde S es la antípoda), entonces H/I es un álgebra de Hopf.Es decir, además de ser biálgebra, admite una antípoda.*

5. Semigrupos cuánticos

5.1. Corepresentación standar

Si $\dim V = n$, con base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $C = \mathrm{End}_k(V)^*$ con base t_i^j (dual de las matrices E_i^j), definimos $\rho : V \to C \otimes V$ dada por

$$\rho(v_i) := \sum_j t_i^j \otimes v_j,$$

entonces ρ es coasociativa y counitaria. En efecto, queremos ver que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C \otimes V \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\rho"] \\ C \otimes V \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{Id}"] & C \otimes C \otimes V \end{tikzcd}$$

conmuta:

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id} \otimes \rho)\rho(v_i) &= (\mathrm{Id} \otimes \rho)(\sum_j t_i^j \otimes v_j) \\ &= \sum_j t_i^j \otimes (\sum_k t_j^k \otimes v_k) \\ &= \sum_{j,k} t_i^j \otimes t_j^k \otimes v_k,\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{Id})\rho(v_i) &= (\Delta \otimes \mathrm{Id})(\sum_j t_i^j \otimes v_j) \\ &= \sum_j (\sum_k t_i^k \otimes t_k^j) \otimes v_j \\ &= \sum_{j,k} t_i^k \otimes t_k^j \otimes v_j.\end{aligned}$$

Luego, $(\mathrm{Id} \otimes \rho)\rho = (\Delta \otimes \mathrm{Id})\rho$.

Veamos ahora que ρ es counitaria, esto es que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\cong"] & C \otimes V \arrow[d, "\epsilon\otimes\mathrm{Id}"] \\ & k \otimes V \cong V \end{tikzcd}$$

conmuta.

$$
\begin{aligned}
(\epsilon \otimes \mathrm{Id})\rho(v_i) &= (\epsilon \otimes \mathrm{Id})(\sum_j t_i^j \otimes v_j) \\
&= \sum_j \epsilon(t_i^j) v_j \\
&= \sum_j \delta_i^j v_j = v_i.
\end{aligned}
$$

5.2. Construcción universal

Sea k un cuerpo, V un espacio de dimensión finita n, sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$, y

$$
f : V^{\otimes n_1} \to V^{\otimes n_2}
$$

una aplicación lineal. Fijemos $\{x_i\}_{i=1}^n$ una base de V y consideremos C la coalgebra con base $\{t_i^j\}_{i,j=1}^n$ y comultiplicación

$$
\Delta(t_i^j) = \sum_{k=1}^n t_i^k \otimes t_k^j.
$$

Consideramos V como C-comódulo via

$$
\rho(x_i) = \sum_j t_i^j \otimes x_j.
$$

Notamos TC el álgebra tensorial sobre C, con estructura de biálgebra extendiendo la comultiplicación de C. Como V es un C-comódulo, entonces es V es un TC-comódulo, y ya que TC es una biálgebra, se sigue que $V^{\otimes \ell}$ es un TC-comódulo para todo $\ell \in \mathbb{N}_0$. Más precisamente, el morfismo de estructura se construye de la siguiente manera: para multi-índices $I, J \in \{1, 2, \ldots, n\}^\ell$ (i.e. $I = (i_1, i_2, \cdots, i_\ell)$) notamos

$$
x_I := x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{i_\ell} \in V^{\otimes \ell}
$$

$$
t_I^J := t_{i_1}^{j_1} t_{i_2}^{j_2} \cdots t_{i_\ell}^{j_\ell} \in TC.
$$

En este notación, la estructura de TC-comódulo de $V^{\otimes \ell}$ está dada por

$$
\lambda(x_I) = \sum_{J \in \{1,\ldots,n\}^\ell} t_I^J \otimes x_J.
$$

Si $f(x_I)=\sum_J f_I^J x_J$, no necesariamente TC-colineal, la condición $\lambda(f(x_I))=(\mathrm{Id}\otimes f)\lambda(x_I)$ es precisamente la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
x_I \arrow[rrr, mapsto, bend left] \arrow[d, mapsto] & V^{\otimes n_1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda"] & V^{\otimes n_2} \arrow[d, "\lambda"] & \sum_J f_I^J x_J \arrow[d, mapsto] \\
\sum_J t_I^J \otimes x_J \arrow[rrrd, mapsto, bend right] & TC \otimes V^{\otimes n_1} \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes f"] & TC \otimes V^{\otimes n_2} & \sum_{J,K} f_I^J t_J^K \otimes x_K \\
 & & & \sum_{J,K} t_I^J f_J^K \otimes x_K
\end{tikzcd}$$

Esto es, para que el diagrama conmute, se debe dar la igualdad:

$$\sum_{J,K} t_I^J f_J^K \otimes x_K = \sum_{J,K} f_I^J t_J^K \otimes x_K \qquad (\forall I, K).$$

No sabemos si la anterior igualdad será válida o no, pero si definimos $\mathcal{I}_f$ el ideal bilátero de TC generado por

$$\mathcal{I}_f = \left\{ \sum_J t_I^J f_J^K - \sum_J f_I^J t_J^K \right\}_{I,K}$$

y $A(f)$ como el cociente

$$A(f) := TC/\mathcal{I}_f$$

entonces en $A(f)$ seguro que es válida.

Teorema 5.1. *$A(f)$ es una biálgebra.*

Demostración. Recordemos, para $t_I^J = t_{i_1}^{j_1}\cdots t_{i_a}^{j_a}$, la comultiplicación está dada por

$$\Delta(t_I^J) = \Delta(t_{i_1}^{j_1})\cdots\Delta(t_{i_a}^{j_a})$$

$$= (\sum_{\ell_1} t_{i_1}^{\ell_1}\otimes t_{\ell_1}^{j_1})\cdots(\sum_{\ell_a} t_{i_a}^{\ell_a}\otimes t_{\ell_a}^{j_a}) = \sum_{\ell_1,\dots,\ell_a} t_{i_1}^{\ell_1}\cdots t_{i_a}^{\ell_a}\otimes t_{\ell_1}^{j_1}\cdots t_{\ell_a}^{j_a} = \sum_{L\in\{1,\dots,n\}^a} t_I^L\otimes t_L^J.$$

Por lo tanto,

$$\Delta\left(\sum_J (t_I^J f_J^K - f_I^J t_J^K)\right) = \sum_{J,L}(t_I^L\otimes t_L^J f_J^K - f_I^J t_J^L \otimes t_L^K)$$

$$= \sum_{J,L}(t_I^L\otimes (t_L^J f_J^K - f_L^J t_J^K) + t_I^L f_L^J \otimes t_J^K - f_I^J t_J^L\otimes t_L^K)$$

$$= \sum_{J,L}(t_I^L\otimes (t_L^J f_J^K - f_L^J t_J^K) + t_I^L f_L^J \otimes t_J^K - f_I^L t_L^J\otimes t_J^K)$$

$$= \sum_L t_I^L \otimes (\sum_J t_L^J f_J^K - f_L^J t_J^K) + \sum_J(\sum_L t_I^L f_L^J - f_I^L t_L^J)\otimes t_J^K.$$

También

$$\epsilon\left(\sum_J t_L^J f_J^K - f_L^J t_J^K\right) = \sum_J \delta_L^J f_J^K - f_L^J \delta_J^K = f_L^K - f_L^K = 0,$$

concluimos que el ideal generado por $\sum_J t_L^J f_J^K - f_L^J t_J^K$ es también un coideal, contenido en $\mathrm{Ker}\epsilon$. Con lo cual por la proposición 4.13 se tiene que $A(f)$ es una biálgebra. $\square$

5.3. Propiedad universal

Proposición 5.2. *La construcción $A(f)$ satisface la siguiente propiedad univeral: Si V es un comódulo sobre una biálgebra B, con morfismo de estructura $\lambda_B : V \to B \otimes V$, y $f : V^{\otimes n} \to V^{\otimes m}$ es una aplicación B-colineal, entonces existe un único morfismo de biálgebras $\pi : A(f) \to B$ tal que la estructura de B-comódulo sobre V es la que proviene de $A(f)$ vía π, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\lambda_B"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & B \otimes V \\ & A(f) \otimes V \arrow[ur, dashed, "\pi\otimes\mathrm{Id}_V"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Fijada una base $x_1, \ldots x_n$ de V entonces $\lambda_B(x_i) = \sum_j b_i^j \otimes x_j$ para una única elección de elementos $\{b_i^j\}_{i,j}$ en B. Definimos la aplicación $\pi : A(f) \to B$ via $t_i^j \mapsto b_i^j$, como f es B-colineal se sigue que π está bien definida. $\square$

5.4. Familias de flechas

Generalicemos la construcción anterior para el siguiente caso: sea Λ una familia de índices, supongamos dados, para cada $i \in \Lambda$, $n_i^1, n_i^2 \in \mathbb{N}_0$ y una transformación lineal $f_i : V^{\otimes n_i^1} \to V^{\otimes n_i^2}$. Tenemos entonces una familia de transformaciones lineales

$$f_\Lambda := \{f_i : V^{\otimes n_i^1} \to V^{\otimes n_i^2}\}_{i\in\Lambda}.$$

Definimos

$$\mathcal{I}_{f_\Lambda} = \sum_{i\in\Lambda} \mathcal{I}_{f_i}$$

es decir, el ideal generado por todos los $\mathcal{I}_{f_i}$ con $i \in \Lambda$, y

$$A(f_\Lambda) := TC/\mathcal{I}_{f_\Lambda}.$$

Como la suma de bi-ideales es bi-ideal, $\mathcal{I}_{f_\Lambda}$ resulta un bi-ideal y $A := A(f_\Lambda)$ es una biálgebra. Además, A tiene la propiedad de que V es A-comódulo y todas las f_i son colineales, y más aún, es universal con respecto a esa propiedad.

5.4.1. El ejemplo $k[x]/(x^2)$

Ejemplo 5.3. Consideremos $V = k[x]/x^2 = k1 \oplus kx$ que tiene base $\{1, x\}$. Si la consideramos como álgebra unitaria, entonces se tienen dadas, dos flechas: la unidad

$$u : k = V^0 \to V$$

$$\lambda \mapsto \lambda 1$$

y la multiplicación

$$m : V^{\otimes 2} \to V$$

$$1 \otimes 1 \mapsto 1,$$

$$x \otimes 1 \mapsto x,$$

$$1 \otimes x \mapsto x,$$

$$x \otimes x \mapsto 0.$$

En este caso tenemos dos índices $I = \{1, 2\}$, $f_1 = u$, $f_2 = m$. La construcción universal nos da $C = (M_2(k))^*$, ya que la dimensión de C es 4 y hacemos uso de la proposición 2.27 vista anteriormente y $A = T(M_2(k))^*/\mathcal{I}_{f_I}$ donde $\mathcal{I}_{f_I} = \mathcal{I}_{f_1} + \mathcal{I}_{f_2}$, consideremos además la base dual de $M_2(k)$, que por comodidad llamaremos $a = e_1^1, b = e_1^2, c = e_2^1, d = e_2^2$.

Entonces

$$\mathcal{I}_{f_1} = (a = 1, b = 0),$$

es decir el ideal generado por $a = 1$ y $b = 0$, y el ideal $\mathcal{I}_{f_2}$ es el generado por

$$\mathcal{I}_{f_2} = \{a^2 - a, ba + ab - b, ca - c, da + cb - d, ac - c, bc + ad - d, c^2, dc + cd\}.$$

Por lo tanto, podemos escribir que

$$A = T(M_2(k))^*/(a = 1, b = 0, c^2 = 0, dc = -cd),$$

pero si ponemos $T(M_2(k)^*) = k\{a, b, c, d\}$, tenemos que

$k\{a, b, c, d\}/(a = 1, b = 0, c^2 = 0, dc = -cd) \cong k\{c, d\}/(c^2 = 0, dc = -cd)$ y la comultiplicación está dada por

$$\Delta c = c \otimes 1 + d \otimes c$$

$$\Delta d = d \otimes d,$$

o sea d es un group-like element y en consecuencia c es skew-primitivo. Además si tenemos un morfismo de biálgebras $f : A \to H$ con H Hopf, se tiene que $f(d)$ es también un group-like element y por lo tanto inversible.

5.4.2. El ejemplo $k \times k$

Ejemplo 5.4. Consideramos $V = k \times k$ que tiene la base $\{(1,0),(0,1)\}$, es a la vez una k-álgebra unitaria donde $1 := (1,1)$, así tenemos dos flechas $f_1 = u : k = V^0 \to V$, donde

$$\lambda \mapsto \lambda(1,1)$$

y $f_2 = m : V^{\otimes 2} \to V$, donde

$$(1,0)\otimes(1,0) \mapsto (1,0)$$
$$(1,0)\otimes(0,1) \mapsto (0,0)$$
$$(0,1)\otimes(1,0) \mapsto (0,0)$$
$$(0,1)\otimes(0,1) \mapsto (0,1).$$

Nuevamente por la construcción universal tenemos que $C = (M_2(k))^*$, además llamando a, b, c, d a los elementos de la base dual como antes, tenemos que los ideales $\mathcal{I}_{f_1}, \mathcal{I}_{f_2}$ están generados por

$$\mathcal{I}_{f_1} = (a + c = 1, b + d = 1)$$

$$\mathcal{I}_{f_2} = (a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c, d^2 = d, ac = 0, ca = 0, bd = 0, db = 0),$$

por lo tanto podemos escribir que

$$A = k\{a,b,c,d\}/(a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c, d^2 = d, ac = 0, ca = 0, bd = 0, db = 0, a+c = 1, b+d = 1).$$

A modo de verificación podemos remarcar que $f_1 = u$ y $f_2 = m$ resultan colineales en la biálgebra A que obtuvimos. Si se plantean los diagramas de la definición de colinealidad:

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\rho_k"] \arrow[d, "u"'] & TC \otimes k \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes u"] \\ V \arrow[r, "\rho_V"] & TC \otimes V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \otimes V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "m"'] & TC \otimes (V \otimes V) \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes m"] \\ V \arrow[r, "\rho_V"] & TC \otimes V \end{tikzcd}$$

y tomamos la bases $\{1\}$ y $\{(1,0)\otimes(1,0),(1,0)\otimes(0,1),(0,1)\otimes(1,0),(0,1)\otimes(0,1)\}$ para k y $V \otimes V$ respectivamente, las conmutatividad de estos diagramas en estos elementos equivale a las relaciones antes establecidas para los generadores. Continuando con la biálgebra A, si analizamos las relaciones, podemos establecer que

$$A \cong k\{a,b,c,d\}/(a^2 = a, b^2 = b, a + c = 1, b + d = 1)$$

y a la vez

$$k\{a,b,c,d\}/(a^2 = a, b^2 = b, a + c = 1, b + d = 1) \cong k\{a, b, 1-a, 1-b\}/(a^2 = a, b^2 = b),$$

donde a y $1-a$ en este cociente resultan idempotentes ortogonales, lo mismo ocurre con b y $1-b$.

Morfismos de álgebras $A \to k$

Puede ser interesante calcular los morfimos de álgebras $\phi : A \to k$ donde $A = TC/\mathcal{I}_{f_\Lambda}$ como siempre. Esto lo podemos hacer en particular para los dos últimos ejemplos que vimos.

Caso $k[x]/(x^2)$

Comencemos con $A = k\{a,b,c,d\}/(a = 1, b = 0, c^2 = 0, dc = -cd)$, teniendo en cuenta en este caso que los morfismos quedarán determinados por los valores de $\phi(a), \phi(b), \phi(c), \phi(d)$ y que para que los mismos estén bien definidos deberán anularse en el ideal de relaciones, podemos pensar cada morfismo definiéndolo como la evaluación en una matriz concreta: $\phi_0(a) = \pi_{11}(M), \phi_0(b) = \pi_{12}(M), \phi_0(c) = \pi_{21}(M), \phi_0(d) = \pi_{22}(M)$ donde π_{ij} es la función que toma el coeficiente m_{ij} de una matriz M de $k^{2\times 2}$. Por ejemplo para este primer morfismo ϕ_0 tomamos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que el morfismo de álgebras ϕ_0 que hemos definido se anula en el ideal de relaciones. Tenemos otro morfismo posible para esta k-álgebra A, al igual que antes difinimos ϕ_1 a través de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que estos dos morfismos que establecimos se diferencian en que $\phi_0(d) = 0$ y $\phi_1(d) = 1$. Además hemos agotado las posibilidades ya que si tenemos un morfismo de álgebras $\phi : A \to k$ y tenemos la relaciones $a = 1, b = 0, c^2 = 0, dc = -cd$ se debe cumplir que

$$\phi(a) = \phi(1) = 1,$$

$$\phi(b) = \phi(0) = 0,$$

$$\phi(c)\phi(c) = 0$$

como k es un cuerpo se tiene que $\phi(c) = 0$, por último

$$\phi(d)\phi(c) + \phi(c)\phi(d) = 0$$

pero como $\phi(c) = 0$ para $\phi(d)$ hay dos posibilidades, que valga 0 o 1.

Caso $k \times k$

Ahora consideremos el ejemplo $A = k\{a,b,c,d\}/(a^2 = a, b^2 = b, a + c = 1, b + d = 1)$, al igual que antes definimos los morfismos evaluando en las siguientes matrices M:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con esto hemos agotado las posibilidades, tomemos $\phi : A \to k$ morfismo de álgebras, debe cumplirse que

$$\phi(a)\phi(a) = \phi(a)$$

despejando y como k es un cuerpo obtenemos que $\phi(a) = 0$ o $\phi(a) = 1$, lo mismo ocurre para $\phi(b)$. Además el valor de $\phi(c)$ se lo puede ver como dependiente del valor de $\phi(a)$, se debe cumplir que

$$\phi(a) + \phi(c) = \phi(1) = 1$$

pero si $\phi(a) = 1$ entonces $\phi(c) = 0$ y si $\phi(a) = 0$ entonces $\phi(c) = 1$. Lo mismo ocurre para $\phi(b)$ y $\phi(d)$.

Ahora consideraremos algunas generalidades sobre la biálgebra $A = TC/\mathcal{I}_{f\Lambda}$ que tienen relación con lo anterior.

5.5. El abelianizado

Proposición 5.5. *Considerando ahora a A como biálgebra, podemos ver también que $I = ([A, A])$ es coideal y que $I \subseteq Ker(\epsilon)$. Por lo tanto A_{abel} hereda una estructura de biálgebra.*

Demostración. Tenemos que ver que $\Delta(I) \subseteq A \otimes I + I \otimes A$. Acá utilizaremos que Δ es morfismo de álgebras. Sean $a, b \in A$,

$$\begin{aligned}
\Delta(ab - ba) &= \Delta(a)\Delta(b) - \Delta(b)\Delta(a) \\
&= (a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) - (b_1 \otimes b_2)(a_1 \otimes a_2) \\
&= a_1b_1 \otimes a_2b_2 - b_1a_1 \otimes b_2a_2 \\
&= b_1a_1 \otimes (a_2b_2 - b_2a_2) + (a_1b_1 - b_1a_1) \otimes a_2b_2,
\end{aligned}$$

es decir $b_1a_1 \otimes (a_2b_2 - b_2a_2) + (a_1b_1 - b_1a_1) \otimes a_2b_2 \in A \otimes I + I \otimes A$.

Además se tiene que $I \subseteq Ker(\epsilon)$ ya que $\epsilon : A \to k$ es también morfismo de álgebras, en efecto

$$\epsilon(ab - ba) = \epsilon(a)\epsilon(b) - \epsilon(b)\epsilon(a) = 0.$$

Por lo tanto por la proposición 4.13 ya vista se tiene que A_{abel} hereda una estructura de biálgebra. □

Ahora consideremos la siguiente proposición.

Proposición 5.6. *Si A es Hopf entonces A_{abel} es Hopf.*

Demostración. Como A es Hopf tenemos una antípoda $S : A \to A$, es decir para todo $a \in A$ se tiene que

$$S(a_1)a_2 = \epsilon(a)1_A = a_1S(a_2)$$

Consideramos la transformación lineal $\pi \circ S : A \to A_{ab}$ y consideremos la propiedad universal del cociente

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi\circ S"] \arrow[d, "\pi"'] & A_{abel} \\
A_{abel} \arrow[ur, "\exists!\overline{S}"'] &
\end{tikzcd}$$

es decir existe $\overline{S}$ tal que el diagrama conmuta, o sea $\overline{S}\circ\pi = \pi\circ S$. Para que esto sea válido tiene que ocurrir que $I = ([A,A]) \subseteq Ker(\pi S)$. En efecto,

$$\pi S(ab - ba) = \pi(S(ab) - S(ba)) = \pi(S(b)S(a) - S(a)S(b)),$$

pero $S(b)S(a) - S(a)S(b) \in I$, por lo tanto $\pi(S(b)S(a) - S(a)S(b)) = 0$.

Entonces veremos que $\overline{S}$ será la antípoda para A_{abel}. Tenemos que probar que, dado $a \in A$ se tiene que

$$\overline{S}(\overline{a_1})\overline{a_2} = \overline{\epsilon}(\overline{a})1_{A_{abel}} = \overline{a_1}S(\overline{a_2}),$$

donde $\overline{\epsilon} : A_{abel} \to k$ es la counidad para la biálgebra A_{abel} que se la puede definir a partir de la propiedad universal del cociente, siendo que $I \subseteq Ker\epsilon$. Por lo tanto $\epsilon : A \to k$ se factoriza por $\epsilon = \overline{\epsilon}\pi$.

Entonces, por un lado,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(\overline{a_1})\overline{a_2} &= (\overline{S}\circ\pi(a_1))\overline{a_2} \\
&= (\pi\circ S(a_1))\pi(a_2) \\
&= \pi(S(a_1)a_2) \\
&= \pi(a_1 S(a_2)) \\
&= \pi(a_1)\pi(S(a_2)) \\
&= \pi(a_1)(\overline{S}\circ\pi(a_2)) \\
&= \overline{a_1}\overline{S}(\overline{a_2})
\end{aligned}$$

por otro,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(\overline{a_1})\overline{a_2} &= \pi(S(a_1)a_2) \\
&= \pi(\epsilon(a)1_A) \\
&= \epsilon(a)\pi(1_A) \\
&= (\overline{\epsilon}\circ\pi)(a)1_{A_{abel}} \\
&= \overline{\epsilon}(\overline{a})1_{A_{abel}}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 5.7. *Consideremos $\phi : A \to k$ un morfismo de álgebras, sea*
$[A,A] = \{ab - ba : a, b \in A\}$ *el conjunto de los corchetes. Consideremos además $I = ([A,A])$ el ideal bilátero de A generado por $[A,A]$. Se tiene que $I \subseteq ker(\phi)$.*

Demostración. Basta verlo para los generadores de I. Sean $a, b \in A$, como k es conmutativo se tiene que

$$\phi(ab - ba) = \phi(a)\phi(b) - \phi(b)\phi(a) = 0.$$

□

Lo hecho recién dice que ϕ se factoriza por el abelianizado que por definición es

$$A_{abel} := A/([A, A])$$

Es decir existe un único $\overline{\phi}$ morfismo de álgebras tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & k \\ A/([A, A]) \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

o sea $\phi = \overline{\phi}\pi$.

5.6. El abelianzado en $k[x]/(x^2)$ y en $k \times k$

Ahora podemos estudiar el abelianizado $A_{abel} = A/([A, A])$ para las dos biálgebras anteriores.

El caso $k[x]/(x^2)$

Empecemos con

$$A = k\{a, b, c, d\}/(a = 1, b = 0, c^2 = 0, dc = -cd) \cong k\{c, d\}/(c^2 = 0, dc = -cd).$$

El bi-ideal $([A, A])$ se puede escribir en términos de los generadores a, b, c, d. En consecuencia, en el abelianizado tenemos las siguientes ecuaciones:

$$ab - ba = 0, ac - ca = 0, ad - da = 0, bc - cb = 0, bd - db = 0, cd - dc = 0.$$

Por lo tanto considerando la relaciones ya existentes en A concluimos que

$$A_{abel} = A/(dc = 0) = k[c, d]/(dc = 0).$$

Acá podemos observar que si tenemos un morfismo de biálgebras $f : A_{abel} \to H$ con H Hopf, se tiene que $f(dc) = f(d)f(c) = 0$, pero ya habíamos visto que $f(d)$ era inversible, por lo tanto $f(c) = 0$. Concluimos que si buscamos álgebras de Hopf *conmutativas* que coactúen en $k[x]/x^2$, encontraremos $k[d^{\pm 1}]$, que nos dará solamente la graduación.

El caso $k \times k$

Considerando ahora la biálgebra

$$A = k\{a, b, c, d\}/(a^2 = a, b^2 = b, a + c = 1, b + d = 1) \cong k\{a, b\}/(a^2 = a, b^2 = b)$$

con el mismo razonamiento de antes, nos queda directamente que

$$A_{abel} = A/(ab = ba) = k[a, b]/(a^2 = a, b^2 = b).$$

Esta biálgebra como espacio vectorial tiene base $\{1, a, b, ab\}$, o sea tiene dimensión 4. Notar el contraste con A, que tiene dimensión infinita.

Veamos su estructura de biálgebra:

$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c = a \otimes a + b \otimes (1 - a)$$

$$\Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d = a \otimes b + b \otimes (1 - b).$$

Finalizaremos mostrando explícitamente el siguiente isomorfismo de biálgebras en este ejemplo, describiendo en particular el monoide (de 4 elementos) de morfismos de k-álgebra de $k \times k$:

Proposición 5.8. *Manteniendo las notaciones previas,*

$$A_{abel} \cong (k^M)^{cop} = k^{(M^{op})}$$

como biálgebras, donde M es el monoide:

$$M = \{f : k \times k \to k \times k, \textit{morfismos unitarios de álgebras}, \}$$

Demostración. buscaremos estos morfismos. Llamemos $1 = (1, 1)$, $0 = (0, 0)$, $e = (1, 0)$ y $e' = (0, 1)$, notemos que

$$e^2 = e$$

y

$$e' = 1 - e,$$

por lo tanto resulta

$$k \times k \cong k[e]/(e^2 = e).$$

Entonces vamos a dedicarnos a buscar los morfismos unitarios de álgebras

$$f : k[e]/(e^2 = e) \to k[e]/(e^2 = e).$$

Notemos que $A = k[e]/(e^2 = e)$ como espacio vectorial tiene base $\{1, e\}$. Además como $e^2 = e$, todo elemento de A se puede escribir de la forma $\alpha + \lambda e$, por lo tanto para definir los morfismos, lo podemos hacer en base a esto último, obtenemos los siguientes:

$$f_1(\alpha + \lambda e) = \alpha$$

$$f_2(\alpha + \lambda e) = \alpha + \lambda$$
$$f_3(\alpha + \lambda e) = \alpha + \lambda e$$
$$f_4(\alpha + \lambda e) = \alpha + \lambda(1 - e),$$

es decir hay cuatro morfismos de álgebras unitarios. Notemos además que los morfismos

$f = f_3 = \mathrm{Id}$, $g = f_4$ son isomorfismos y además se cumple que:

$$f(e) = e, f(1 - e) = 1 - e$$

$$g(e) = 1 - e, g(1 - e) = e.$$

Si ahora queremos ver estos cuatro morfismos de k-álgebras como morfismos de $k \times k$, hacemos lo que sigue:

$$k \times k \;\cong\; k[e]/(e^2 = e) = k \oplus ke.$$

Más precisamente tenemos el isomorfismo

$$(x, y) \longmapsto y + (x - y)e$$

con inversa

$$(\alpha + \lambda, \alpha) \longleftarrow \alpha + \lambda e,$$

así los morfismos $f_1, f_2, \mathrm{Id} = f_3, g = f_4$ inducen los correspondientes morfismos de $k \times k$

$\widetilde{f_1}(x, y)$:

$$f_1(y + (x - y)e) = y \leftrightarrow \widetilde{f_1}(x, y) = (y, y)$$

$\widetilde{f_2}(x, y)$:

$$f_2(y + (x - y)e) = x \leftrightarrow \widetilde{f_2}(x, y) = (x, x)$$

$\widetilde{f_3}(x, y)$:

$$f_3(y + (x - y)e) = y + (x - y)e \leftrightarrow (y, y) + (x - y)(1, 0) = (x, y),$$

es decir

$$\widetilde{f_3} = \mathrm{Id}_{k \times k}.$$

Notar que g se corresponde al intercambio de coordenadas:

$$g(e) = 1 - e$$

luego, el correspondiente $\widetilde{g}$ es un isomorfismo y se escribe como

$\widetilde{g}(x, y)$:

$$g(y + (x - y)e) = y + (x - y)(1 - e) \leftrightarrow (y, y) + (x - y)(0, 1) = (y, x).$$

Aparte, podemos calcular la "tabla de multiplicación" del monoide $M = \{\mathrm{Id}_{k \times k}, \widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}, \widetilde{g}\}$ calculando las composiciones. Simplificando un poco la notación de estas funciones tenemos que

$$g^2 = \mathrm{Id},$$
$$f_1 f_2 = f_2,\ f_2 f_1 = f_1,\ f_1 f_1 = f_1,\ f_2 f_2 = f_2,$$
$$f_1 g = f_2,\ f_2 g = f_1,\ g f_1 = f_1,\ g f_2 = f_2,$$

es decir

$$f_i f_j = f_j,\ f_i g = f_j (j \neq i),\ g f_i = f_i,\ g^2 = \mathrm{Id}.$$

Anteriormente habíamos descrito la estructura de biálgebra para k^G con G grupo finito, como dual de la estructura de biálgebra del álgebra de grupo $k[G]$. Pero si M es un monoide con unidad, el álgebra de semigrupo $k[M]$ sigue siendo una biálgebra con

$$\Delta m = m \otimes m,\ \ \forall m \in M$$

(corolario 3.9) que no es Hopf si M no es grupo pero sigue siendo biálgebra, y por lo tanto k^M también es biálgebra. Explícitamente, Δ en k^M está dada, en las funciones δ_m, por

$$\Delta(\delta_m) = \sum_{x,y \in M : xy = m} \delta_x \otimes \delta_y.$$

Para nuestro caso,

$$\Delta(\delta_{f_i}) = \sum_{f,h \in M : fh = f_i} \delta_f \otimes \delta_h,$$

es decir, llamando por comodidad $f_0 = \mathrm{Id}$,

$$\Delta(\delta_{f_1}) = \delta_{f_1} \otimes \delta_{f_0} + \delta_{f_0} \otimes \delta_{f_1} + \delta_{f_1} \otimes \delta_{f_1} + \delta_{f_2} \otimes \delta_{f_1} + \delta_g \otimes \delta_{f_1} + \delta_{f_2} \otimes \delta_g$$

$$\Delta(\delta_{f_2}) = \delta_{f_2} \otimes \delta_{f_0} + \delta_{f_0} \otimes \delta_{f_2} + \delta_{f_2} \otimes \delta_{f_2} + \delta_{f_1} \otimes \delta_{f_2} + \delta_g \otimes \delta_{f_2} + \delta_{f_1} \otimes \delta_g$$
$$\Delta(\delta_{f_0}) = \delta_{f_0} \otimes \delta_{f_0} + \delta_g \otimes \delta_g$$
$$\Delta(\delta_g) = \delta_{f_0} \otimes \delta_g + \delta_g \otimes \delta_{f_0}.$$

Las anteriores expresiones están calculadas en la base

$$B = \{\delta_{f_0}, \delta_{f_1}, \delta_{f_2}, \delta_g\},$$

recordamos ahora

$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c = a \otimes a + b \otimes (1 - a)$$
$$\Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d = a \otimes b + b \otimes (1 - b).$$

En vez de tomar en $k[a,b]/(a^2 = a, b^2 = b)$ la base $\{1, a, b, ab\}$, tomamos la base

$$\{e_1 = ab,\ e_2 = a(1-b),\ e_3 = (1-a)b,\ e_4 = (1-a)(1-b)\}.$$

La razón de hacer esto es que

$$e_i^2 = e_i$$

$$e_i e_j = 0 \; \forall i \neq j$$

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 1,$$

es un sistema completo de idempotentes ortogonales, y en toda álgebra del tipo k^X con X un conjunto finito, los elementos δ_x= la función que da 1 en x y 0 en otro caso, forman un sistema completo de idempotentes ortogonales, por eso es que se espera que estos idempotentes e_i se correspondan con los δ_{f_j}. Algunas relaciones que permiten relacionar la base de los e_i con la base $\{1, a, b, ab\}$ son por ejemplo

$$e_1 + e_2 = ab + a(1-b) = a,$$

$$e_1 + e_3 = ab + (1-a)b = b,$$

$$e_2 + e_4 = a(1-b) + (1-a)(1-b) = 1-b,$$

$$e_3 + e_4 = (1-a)b + (1-a)(1-b) = 1-a,$$

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 1.$$

Esto muestra por ejemplo que los e_i generan, y como son 4, son necesariamente l.i.

Con las relaciones anteriores y a partir de

$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c = a \otimes a + b \otimes (1-a)$$

$$\Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d = a \otimes b + b \otimes (1-b),$$

empezando por e_2 tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta(e_2) &= \Delta(a(1-b)) \\
&= \Delta(a)\Delta(1-b) \\
&= (a \otimes a + b \otimes (1-a))(1 \otimes 1 - a \otimes b - b \otimes (1-b)) \\
&= a \otimes a - a \otimes ab - ab \otimes a(1-b) \\
&+ b \otimes (1-a) - ba \otimes (1-a)b - b \otimes (1-a)(1-b) \\
&= (e_1 + e_2) \otimes (e_1 + e_2) - (e_1 + e_2) \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 \\
&+ (e_1 + e_3) \otimes (e_4 + e_3) - e_1 \otimes e_3 - (e_1 + e_3) \otimes e_4 \\
&= e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3
\end{aligned}$$

es decir identificamos

$$e_2 \leftrightarrow \delta_{f_0},$$

pensando en $(k^M)^{cop}$.

De manera similar podemos ver que

$$\begin{aligned}\Delta(e_3) &= \Delta(b(1-a))\\ &= \Delta(b)\Delta(1-a)\\ &= a\otimes b - a\otimes ab - ab\otimes b(1-a)\\ &+ b\otimes(1-b) - ab\otimes a(1-b) - b\otimes(1-a)(1-b)\\ &= e_3\otimes e_2 + e_2\otimes e_3,\end{aligned}$$

así

$$e_3 \leftrightarrow \delta_g,$$

además

$$\begin{aligned}\Delta(e_1) &= \Delta(ab)\\ &= (a\otimes a + b\otimes(1-a))(a\otimes b + b\otimes(1-b))\\ &= a^2\otimes ab + ab\otimes a(1-b) + ba\otimes(1-a)b + b^2\otimes(1-a)(1-b)\\ &= a\otimes ab + ab\otimes a(1-b) + ba\otimes(1-a)b + b\otimes(1-a)(1-b)\\ &= (e_1+e_2)\otimes e_1 + e_1\otimes e_2 + e_1\otimes e_3 + (e_3+e_1)\otimes e_4\\ &= e_2\otimes e_1 + e_1\otimes e_2 + e_1\otimes e_1 + e_1\otimes e_4 + e_1\otimes e_3 + e_3\otimes e_4,\end{aligned}$$

es decir podemos identificar

$$e_1 \leftrightarrow \delta_{f_1}$$

en $(k^M)^{cop}$.

Por último,

$$\begin{aligned}\Delta(e_4) &= \Delta((1-a)(1-b))\\ &= \Delta(1-a)\Delta(1-b)\\ &= (\sum_{i=1}^{4} e_i)\otimes(\sum_{i=1}^{4} e_i) - (e_1+e_2)\otimes(e_1+e_3) - (e_1+e_3)\otimes(e_4+e_2)\\ &- (e_1+e_2)\otimes(e_1+e_2) + (e_1+e_2)\otimes e_1 + e_1\otimes e_2\\ &- (e_1+e_3)\otimes(e_4+e_3) + e_1\otimes e_3 + (e_1+e_3)\otimes e_4\\ &= e_2\otimes e_4 + e_4\otimes e_2 + e_4\otimes e_4 + e_4\otimes e_1 + e_4\otimes e_3 + e_3\otimes e_1,\end{aligned}$$

es decir identificamos

$$e_4 \leftrightarrow \delta_{f_2}$$

en $(k^M)^{cop}$. Observando estas comultiplicaciones y considerando la biálgebra $(k^M)^{op}$, dejamos expuesto que

$$A_{abel} = k[a,b]/(a^2 = a, b^2 = b) \cong (k^M)^{cop} = k^{M^{op}}.$$

□

Referencias

[CWW] A. Chirvasitu, X. Wang, C. Walton, *On quantum groups associated to a pair of preregular forms.* Journal of Noncommutative Geometry 13, no. 1, (2019), pp. 115–159.

[DL] M. Dubois-Violette and G. Launer, *The quantum group of a non-degenerate bilinear form*, PHYSICS LETTERS B, Volume 245, number 2, 1990.

[K] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Vol 155 (1995) Springer.

[M] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics Vol. 82 (1993).

[S] M. Sweeder, *Hopf Algebras*, W. A. Benjamin (1969).