SOBRE EL PROBLEMA DE CLASIFICACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE HOPF SEMISIMPLES

SONIA NATALE

Índice General

1. Introducción

Desde hace algún tiempo, las álgebras de Hopf han aparecido en diversas áreas de la matemática. Los trabajos de V. Drinfeld y M. Jimbo sobre grupos cuánticos se aplicaron a la física matemática, proveyendo sistemáticamente soluciones de la Ecuación de Yang-Baxter. Ciertas álgebras de Hopf cuasitriangulares aparecen en aplicaciones a la topología: en la construcción de los así llamados invariantes cuánticos de nudos, eslabonamientos, variedades de dimensión 3, etc. La teoría de representaciones de álgebras de Hopf se aplica también al estudio de las funciones q-especiales.

En estas notas se estudian las álgebras de Hopf semisimples sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica 0. Se pretenden esbozar los principales resultados básicos sobre su estructura y algunos de los métodos de construcción conocidos: extensiones, biproductos, twisting. Se discuten también algunas herramientas que se han utilizado en problemas de clasificación.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 16W30; Secondary 17B37.

Versión de septiembre del 2001.
Parcialmente financiada por CONICET, CONICOR, SeCYT (UNC) y FAMAF (República Argentina).

Los ejemplos más sencillos que se conocen de álgebras de Hopf semisimples son las álgebras de grupo kG y sus duales $(kG)^*$, que coinciden con el álgebra k^G de funciones sobre G a valores en el cuerpo k. Éstos son los llamados ejemplos *triviales*. El concepto de álgebra de Hopf se puede pensar como una generalización del concepto de grupo. En este sentido, las álgebras de Hopf semisimples corresponderían a los grupos finitos.

A diferencia del caso de los grupos finitos, en el trabajo de clasificación de las álgebras de Hopf semisimples no se dispone de teoremas generales de estructura, como por ejemplo los Teoremas de Sylow y el Teorema de Frobenius sobre las dimensiones de los módulos irreducibles. En general, es un problema difícil, probar la existencia de subálgebras de Hopf propias en un álgebra de Hopf semisimple de dimensión dada.

No se cuenta tampoco con una definición satisfactoria de "órbita"de la acción de un álgebra de Hopf semisimple, incluyendo en particular la noción de "clase de conjugación".

En 1975 I. Kaplansky formuló una serie de conjeturas concernientes a las álgebras de Hopf [Kap]. Una de ellas dice que si H es un álgebra de Hopf semisimple sobre k, entonces las dimensiones de los módulos irreducibles sobre H dividen a la dimensión de H (es decir, que vale el Teorema de Frobenius para grupos finitos). Esta conjetura sigue siendo un problema abierto.

Un resultado debido a P. Etingof y S. Gelaki, afirma que si H es un álgebra de Hopf semisimple sobre k, entonces las dimensiones de los módulos irreducibles sobre el doble de Drinfeld de H dividen a la dimensión de H [EG]. Este resultado implica que el Teorema de Frobenius (para grupos finitos) vale para las álgebras de Hopf semisimples cuasitriangulares. La demostración del Teorema [EG] se basa en el hecho de que el doble de Drinfeld de H es un álgebra de Hopf *factorizable* y usa una famosa fórmula debida a Verlinde.

Sean p y q números primos distintos. Se sabe que las álgebras de Hopf semisimples de dimensión p, pq y p^2 son siempre triviales, es decir, isomorfas a un álgebra de grupo o al dual de un álgebra de grupo. Ver, [EG2], [GW], [Ma], [Ma4] y [Z]. En este trabajo se incluye una demostración alternativa, más corta, de este resultado para el caso de dimensión pq (ver [Na1]). Por otro lado, las álgebras de Hopf semisimples de dimensión p^3 se clasifican en [Ma4]; todas éstas se obtienen mediante extensiones a partir de álgebras de grupos. Por otro lado, álgebras de Hopf semisimples A de dimensión pq^2, tales que A y A^* son de tipo Frobenius se clasifican en [Na1], [Na2], [Na3]. También en [Na1] se da la clasificación en dimensión $2q^2$ y $3q^2$.

En cuanto a las álgebras de Hopf semisimples de dimensión baja, la clasificación completa se conoce hasta dimensión 23 inclusive. La clasificación en dimensión 12 aparece en [F], en dimensión 16 en [Ka], en dimensión 18 en [Ma5] y las de dimensión $pq^2 < 100$ en [Na3].

Una de las herramientas fundamentales en los trabajos citados es una *ecuación de clases*, debida a G. Kac y a Y. Zhu, que permite decidir, en ciertos casos, la existencia de elementos de tipo grupo centrales no triviales. La existencia de tales elementos de tipo grupo, a su vez, reduce el problema de la clasificación al problema de la clasificación de extensiones. Por ejemplo, se demuestra en [Ma2] usando esta ecuación de clases, que toda álgebra de Hopf semisimple de dimensión p^n, con p un número primo, contiene un elemento de tipo grupo central no trivial.

De hecho, para reducir el problema de la clasificación al problema de la clasificación de extensiones, es suficiente con que exista un elemento de tipo grupo central no trivial en el álgebra de Hopf o bien en su dual, ya que toda extensión de álgebras de Hopf da lugar a una extensión dual.

Si bien se cuenta con una teoría de extensiones de álgebras de Hopf (ver por ejemplo [AD], [A]), no es claro cómo atacar el problema de su clasificación en el caso general. Algo más puede decirse en el caso de las extensiones abelianas. Ver [Ma6], [Ma7].

Un método de obtención de álgebras de Hopf, introducido por Radford [R], es a partir de los *biproductos*. Sean H un álgebra de Hopf y sea R un álgebra de Hopf en la categoría trenzada de módulos de Yetter-Drinfeld sobre H. Bajo estas condiciones, el espacio vectorial $R \otimes H$ tiene una estructura de álgebra de Hopf, que se denomina biproducto.

Si A es un álgebra de Hopf munida de una proyección de álgebras de Hopf sobre H y si esta proyección admite una sección de álgebras de Hopf, entonces A resulta isomorfa a un biproducto $R\#H$, donde R es un álgebra de Hopf en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre H. Este otro concepto, también responde en alguna medida al concepto de extensión. Una de las diferencias en este caso, está dada por el hecho de que R no es en general un álgebra de Hopf en el sentido usual. No se dispone de muchos resultados generales de clasificación de álgebras de Hopf trenzadas, aún de aquéllas cuya dimensión es un número primo p. No se sabe tampoco si existen ejemplos no triviales de álgebras de Hopf semisimples que puedan obtenerse como biproductos y no mediante extensiones.

Otra construcción importante en la teoría de álgebras de Hopf es la conocida como *twisting*: si H es un álgebra de Hopf y $\phi \in H \otimes H$ es un pseudo cociclo, H_ϕ es una nueva estructura de álgebra de Hopf donde $H_\phi = H$ como álgebras y la comultiplicación se cambia por $\Delta_\phi(h) = \phi\Delta(h)\phi^{-1}$, para $h \in H$.

Se prueba en [EG] que si H es un álgebra de Hopf semisimple *triangular*, entonces H es isomorfa a un twisting de un álgebra de grupo por un cociclo: $H \simeq (kG)_\phi$, donde G es un grupo finito. Este resultado se basa en un profundo teorema debido a Deligne sobre categorías tannakianas.

La bibliografía que se sugiere es [Mo], [Sch] y [Sw] para las nociones más generales; los trabajos [Mo2] y [A2] sobre resultados de clasificación, y [Ma6], [Ma7] sobre extensiones.

Agradecimiento

Estas notas exponen básicamente los contenidos del mini-curso sobre clasificación de álgebras de Hopf semisimples, dictado por la autora en el "Encuentro Rioplatense de Álgebra y Geometría Algebraica" llevado a cabo en Montevideo, Uruguay, en junio del 2000. Agradezco a los organizadores de este encuentro, en especial a Walter Ferrer-Santos y a Andrés Abella, por la oportunidad de haber dado estas charlas y también por su cordial hospitalidad.

2. Resultados básicos

2.1. **Definiciones y notación.** En todo lo que sigue k denotará un cuerpo. Los símbolos $\otimes$ y Hom denotarán $\otimes_k$ y Hom_k, respectivamente. Si V es un espacio vectorial sobre k, el espacio vectorial dual se denotará por $V^* := \operatorname{Hom}(V, k)$. La evaluación $V^* \otimes V \to k$, $\alpha \otimes v \mapsto f(v)$, se denotará usualmente por $\langle\ ,\ \rangle$.

Para un álgebra de Hopf H sobre k se usa la notación Δ, ϵ y $\mathcal{S}$ para la comultiplicación, la counidad y la antípoda de H, respectivamente.

Dada una coálgebra C se usa la notación de Sweedler (suprimiendo además el símbolo de sumatoria y los paréntesis), para la comultiplicación $\Delta : C \to C \otimes C$; es decir que para $c \in C$, se denota $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$.

Análogamente, si V es un C-comódulo a izquierda (respectivamente, a derecha) vía $\rho : V \to C \otimes V$ (respectivamente, vía $\rho : V \to V \otimes C$), se usa la notación $\rho(v) = v_{-1} \otimes v_0$ (respectivamente, $\rho(v) = v_0 \otimes v_1$), para $v \in V$.

La aplicación $\Delta^{(2)} = (\Delta \otimes \operatorname{id})\Delta = (\operatorname{id} \otimes \Delta)\Delta : C \to C \otimes C$ se denota $\Delta^{(2)}(c) = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$, mientras que si $\rho : V \to C \otimes V$ es un C-comódulo a izquierda, la aplicación $(\Delta \otimes \operatorname{id})\rho = (\operatorname{id} \otimes \rho)\rho : V \to C \otimes C \otimes V$ se denota $v_{-2} \otimes v_{-1} \otimes v_0$, $\forall v \in V$, etc.

2.2. **Dualidad.** Dada un álgebra de Hopf de dimensión finita H, su dual H^* es también un álgebra de Hopf; la estructura de H^* está definida en dualidad con la de H en el sentido siguiente:

$$\langle \alpha\beta, h\rangle = \langle \alpha, h_1\rangle \langle \beta, h_2\rangle, \quad \langle \Delta(\alpha), h \otimes l\rangle = \langle \alpha_1, h\rangle \langle \alpha_2, l\rangle,$$
$$1_{H^*} = \epsilon, \quad \epsilon(\alpha) = \langle \alpha, 1\rangle,$$
$$\langle \mathcal{S}(\alpha), h\rangle = \langle \alpha, \mathcal{S}(h)\rangle,$$

para todo $\alpha, \beta \in H^*$, $h, l \in H$.

Dada un álgebra de Hopf H de dimensión finita sobre k, hay una equivalencia entre la categoría de comódulos a derecha sobre H y la categoría de módulos a izquierda sobre H^*. Esta equivalencia asigna al H-comódulo $\rho : V \to H \otimes V$, $\rho(v) = v_0 \otimes v_1$, el H^*-módulo $H^* \otimes V \to V$, $\alpha \otimes v \mapsto \alpha.v$, donde

$$\alpha.v = \langle \alpha, v_1\rangle v_0, \quad \forall \alpha \in H^*,\ v \in V.$$

Ejemplos de álgebras de Hopf semisimples son las álgebras de grupo, kG, donde G es un grupo finito tal que la característica de k no divide al orden de G. Otros ejemplos son los duales de álgebras de grupo, $(kG)^* = k^G$, donde k^G denota el álgebra de todas las funciones sobre G a valores en k; éstas son semisimples cualquiera sea la característica de k. Se observa que kG es siempre coconmutativa y por lo tanto que k^G es siempre conmutativa. Estos son los ejemplos llamados *triviales*.

Supongamos que k es algebraicamente cerrado de característica 0. Como caso particular de un teorema debido a P. Cartier, se tiene que si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita sobre k tal que H es coconmutativa, entonces H es isomorfa como álgebra de Hopf al álgebra de grupo kG, donde $G = G(H)$ es el grupo de elementos de tipo grupo en H:

$$G(H) = \{h \in H :\ h \neq 0,\ \Delta(h) = h \otimes h\}.$$

Luego las álgebras de Hopf no triviales son aquéllas que no son conmutativas ni coconmutativas. En general, si H es un álgebra de Hopf cualquiera, el subespacio generado por los elementos de tipo grupo es una subálgebra de Hopf de H isomorfa a $kG(H)$. Si la dimensión de H es finita, entonces $G(H^*) = \mathrm{Alg}(H, k)$ coincide con el conjunto de todos los homomorfismos de álgebras de H en el cuerpo de base k.

2.3. **Álgebras de Hopf semisimples: Integrales y el teorema de Maschke.** Un álgebra de Hopf H sobre k se dice *semisimple* si H es semisimple como álgebra. Como consecuencia del Teorema Fundamental para Módulos de Hopf [Mo, 1.9.4], si H es semisimple entonces H es de dimensión finita. (Ver [Sw, pp. 107]). De manera similar, H se dice *cosemisimple* si H es cosemisimple como coálgebra.

En dimensión finita la cosemisimplicidad de H es equivalente a la semisimplicidad de H^*.

Definición 2.3.1. Sea H un álgebra de Hopf. Una integral a izquierda –respectivamente, a derecha– en H es un elemento $t \in H$ tal que $ht = \epsilon(h)t$ –respectivamente, $th = \epsilon(h)t$–, $\forall h \in H$. H se dice unimodular si el espacio de integrales a izquierda coincide con el espacio de integrales a derecha.

Notar que si $t \in H$ es una integral a izquierda –respectivamente, a derecha– entonces $\mathcal{S}(t)$ es una integral a derecha –respectivamente, a izquierda.

Según un resultado de R. Larson y M. Sweedler [LS], se tiene que si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita, entonces el espacio de integrales a izquierda $I_l(H)$ –respectivamente, el espacio de integrales a derecha $I_r(H)$– en H tiene dimensión 1. Además $\mathcal{S}(I_l(H)) = I_r(H)$.

Recíprocamente, si H contiene una integral no nula, entonces la dimensión de H debe ser finita.

En el caso en que $H = kG$ es el álgebra de grupo de un grupo finito G, el espacio de integrales a izquierda, que coincide con el espacio de integrales a derecha, está generado como espacio vectorial por el elemento $t = \sum_{g\in G} g \in kG$. Por otro lado, el espacio de integrales a izquierda en k^G, que coincide con el espacio de integrales a derecha, está generado por δ_1, donde $\delta_1(g) = \delta_{1,g}$, para todo $g \in G$.

En analogía con el Teorema de Maschke para grupos finitos, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1). H es semisimple.

2). H es separable.

3). Existe una integral $t \in H$ tal que $\epsilon(t) \neq 0$.

Supongamos que H es de dimensión finita y sea $\int \in H^*$ una integral a derecha no nula. Existe entonces una integral a izquierda $0 \neq \Lambda \in H$ tal que $\langle \int, \Lambda \rangle = 1$, o equivalentemente $\Lambda \rightharpoonup \int = \epsilon$. El siguiente Teorema se demuestra en [Sch, Thm. 3.6].

Teorema 2.2. *$\int : H \to k$ es un homomorfismo de Frobenius con bases duales $(\Lambda_1, \mathcal{S}(\Lambda_2))$; es decir que se satisfacen las siguientes condiciones (equivalentes):*

i) $\Lambda_1 \,\langle \int, \mathcal{S}(\Lambda_2)h\rangle = h$, $\forall h \in H$,

ii) $\langle \int, h\Lambda_1\rangle \; \mathcal{S}(\Lambda_2) = h$, $\forall h \in H$.

De manera similar, si $\gamma \in H^*$ es una integral a izquierda no nula y $\Gamma \in H$ es una integral a derecha tal que $\langle \gamma, \Gamma \rangle = 1$, entonces $\gamma : H \to k$ es un homomorfismo de Frobenius con bases duales $(\mathcal{S}(\Gamma_1), \Gamma_2)$.

En general, se tiene que si H es semisimple, entonces H es unimodular. Más precisamente, en este caso el espacio de integrales (a izquierda y a derecha) en H está engendrado como espacio vectorial por el carácter de la representación regular de H^*, que se denota Tr_{H^*}.

Por 2.1, existe una única integral $\Lambda \in H$ que satisface $\epsilon(\Lambda) = 1$. Esta integral se llama la integral *normalizada* de H. Si k es algebraicamente cerrado de característica 0, se tiene que

$$\Lambda = \frac{1}{\dim H}\, \mathrm{Tr}_{H^*} = \frac{1}{\dim H} \sum_{c \in \widehat{H^*}} (\deg c)\, c,$$

donde $\widehat{H^*} \subseteq H$ denota el conjunto de caracteres de comódulos irreducibles de H y para cada $c \in \widehat{H^*}$, $\deg c$ es la dimensión del comódulo irreducible correspondiente a c.

2.4. **Teorema de Larson-Radford: álgebras de Hopf cosemisimples e involutorias.** Uno de los resultados básicos concernientes a las álgebras de Hopf semisimples es el siguiente Teorema, debido a Larson y Radford. [LR], [LR2].

Teorema 2.3. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica* 0. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita sobre k. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i). H es semisimple.

ii). H es cosemisimple.

iii). $\mathcal{S}^2 = \mathrm{id}$.

Un álgebra de Hopf que satisface la condición iii) del Teorema se dice involutoria.

En particular, se trasluce de este Teorema que toda subálgebra de Hopf de un álgebra de Hopf semisimple, es a su vez semisimple.

3. Extensiones

3.1. Teorema de Nichols-Zoeller y bases normales.

Definición 3.1.1. Sean H un álgebra de Hopf y sea $K \subseteq H$ una subálgebra de Hopf. Un (K, H)-módulo de Hopf a izquierda es un espacio vectorial V sobre k munido de

i). Una estructura de K-módulo a izquierda $K \otimes V \to V$, $a \otimes v \mapsto a.v$.

ii). Una estructura de H-comódulo a izquierda $V \to H \otimes V$, $v \mapsto v_{-1} \otimes v_0$.

ii). Una condición de compatibilidad $(a.v)_{-1} \otimes (a.v)_0 = a_1.v_{-1} \otimes a_2.v_0$, para todo $a \in K$, $v \in V$.

Uno de los resultados más relevantes de la teoría de álgebras de Hopf es el siguiente Teorema, debido a Nichols y Zoeller [NZ], que da una respuesta afirmativa a una conjetura hecha por I. Kaplansky [Kap] en 1975.

Teorema 3.1. *Sea $K \subseteq H$ una inclusión de álgebras de Hopf de dimensión finita y sea V un (K, H)-módulo de Hopf a izquierda. Entonces V es un K-módulo libre.*

A continuación se muestran algunas aplicaciones de este Teorema.

Ejemplo 3.1.2. 1). Consideremos al álgebra de Hopf de dimensión finita H como módulo sobre la subálgebra de Hopf K via la multiplicación a izquierda y como comódulo sobre sí misma con la coacción dada por la comultiplicación. Las condiciones de compatibilidad entre la multiplicación y la comultiplicación en H implican que H resulta un (K, H)-módulo de Hopf. El Teorema de Nichols–Zoeller implica entonces que H es libre como K-módulo a izquierda. De aquí se deduce inmediatamente que $\dim K$ divide a $\dim H$; en particular, el orden de $G(H)$ divide a $\dim H$.

El número $\frac{\dim H}{\dim K} \in \mathbb{Z}$ se llamará el índice de K en H y se denotará $[H : K]$.

2). Sea $p : H \to \overline{H}$ una proyección de álgebras de Hopf de dimensión finita y sea

$$R := H^{\mathrm{co}\, p} = \{h \in H : (\mathrm{id} \otimes p)\Delta(h) = h \otimes 1\}.$$

Entonces R es una subálgebra coideal a izquierda de H; esto es: R es una subálgebra y además $\Delta(R) \subseteq H \otimes R$. Por lo tanto, si K es una subálgebra de Hopf de H tal que $K \subseteq R$, entonces R es un (K, H)-módulo de Hopf a izquierda con la acción $K \otimes R \to R$ dada por la multiplicación a izquierda y la coacción $\Delta : R \to H \otimes R$. Por el Teorema de Nichols-Zoeller, $\dim K$ divide a $\dim R$.

3). Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y sea K una subálgebra de Hopf. Si C es una subcoálgebra de H tal que $aC = C$ (respectivamente, $Ca = C$), para todo $a \in K$, entonces C resulta un (K, H)-módulo de Hopf a izquierda (respectivamente, a derecha) con la acción dada por la multiplicación a izquierda (respectivamente, a derecha) por elementos de K y la coacción $\Delta_H : C \to C \otimes C$. Luego, el Teorema de Nichols-Zoeller implica que $\dim K$ divide a $\dim C$.

Como caso particular, si S es un subgrupo de $G(H)$ y C es una subcoálgebra tal que $sC = C$, $\forall s \in S$, (respectivamente, $Cs = C$, $\forall s \in S$) entonces el orden de S divide a la dimensión de C.

Sea $g \in G(H)$. Observar que tanto la multiplicación a izquierda como la multiplicación a derecha por g es un automorfismo de coálgebras de H, y en particular permuta las subcoálgebras simples.

Observación 3.2. Sea $K \subseteq H$ una inclusión de álgebras de Hopf de dimensión finita y sea H/HK^+ la correspondiente coálgebra módulo a izquierda cociente (respectivamente, sea H/K^+H la correspondiente coálgebra módulo a derecha cociente). Entonces $H \simeq H/HK^+ \otimes K$ como K-módulos a derecha y H/HK^+-comódulos a izquierda, donde K actúa en el segundo factor y H/HK^+ coactúa en el segundo factor de la manera natural; (respectivamente, $H \simeq K \otimes H/K^+H$ como K-módulos a izquierda y H/K^+H-comódulos a derecha). Este resultado, debido a H.-J. Schneider [Sch2], afirma la existencia de una *base normal* de H como K-módulo a derecha (respectivamente, a izquierda). Se deduce de aquí que $\dim H = \dim H/HK^+ \dim K$ y en particular, que $\dim H/HK^+ = [H : K]$. En el sentido dual, si $p : H \to \overline{H}$ es una proyección de álgebras de Hopf y $R := H^{\operatorname{co} p}$, también en este caso $\dim H = \dim \overline{H} \dim R$, así que $\dim R = [H^* : (\overline{H})^*]$.

Ejemplo 3.1.3. El ejemplo que se muestra a continuación, debido a A. Masuoka, es usado con frecuencia en argumentos de conteo en la clasificación de las álgebras de Hopf semisimples de dimensión baja.

Supongamos que H es isomorfa como coálgebra a una suma directa de coálgebras simples

$$H \simeq k^{(n)} \oplus \oplus_{d_i > 1} M_{d_i}(k)^{*(n_i)},$$

de modo que $n = |G(H)|$; en particular, $n / \dim H$, ya que $kG(H)$ es una subálgebra de Hopf de H. Dado que la multiplicación por un elemento $g \in G(H^*)$ es un isomorfismo de coálgebras, debe preservar la suma de coálgebras simples de la misma dimensión. Por lo tanto, sigue que n divide a $n_i d_i^2$, para todo i.

3.2. **Extensiones.** Denotemos $1 := k$ al álgebra de Hopf de dimensión 1.

Definición 3.2.1. Una sucesión de aplicaciones de álgebras de Hopf de dimensión finita

$$1 \to K \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H \to 1, \tag{3.2.2}$$

se dice *exacta*, o también que es una *extensión* de álgebras de Hopf, si se satisfacen las siguientes condiciones:

i). π es suryectiva y ι es inyectiva.

ii). $ker\pi = A\iota(K)^+$.

iii). $\iota(K) = \{a \in A : (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta(a) = 1 \otimes a\}$.

En tal caso, la sucesión dual $1 \to H^* \to A^* \to K^* \to 1$, también es exacta. Ver [A], [AD], [Ma6].

Definición 3.2.3. Sea A un álgebra de Hopf y sea K una subálgebra de Hopf de A. Se dice que K es una subálgebra de Hopf *normal* si es estable por las acciones adjuntas a izquierda y a derecha de A, definidas, respectivamente, por $\mathrm{ad}_l(h)a = h_1 a \mathcal{S}(h_2)$, y $\mathrm{ad}_r(h)a = \mathcal{S}(h_1) a h_2$, para todo $h, a \in A$. A se dice *simple* si no contiene subálgebras de Hopf normales propias.

Si A es de dimensión finita, entonces $\mathcal{S}$ es biyectiva. Esto implica que K es estable por ad_l si y sólo si es estable por ad_r.

Ejemplo 3.2.4. 1). Si G es un grupo finito simple, entonces kG y k^G son álgebras de Hopf simples. Más aún, k^G no contiene subálgebras de Hopf propias.

2). Más generalmente, si G es un grupo finito simple y $\phi \in kG \otimes kG$ es un elemento inversible que satisface ciertas condiciones de cociclo, entonces el álgebra de Hopf (semisimple) $(kG)_\phi$ torcida por ϕ es nuevamente un álgebra de Hopf simple. Este resultado es debido a D. Nikshych [Nik], quien además construye ejemplos no triviales de álgebras de Hopf simples torciendo la comultiplicación de ciertas familias de grupos finitos simples.

Supongamos que A no es simple, digamos que $K \subseteq A$ es una subálgebra de Hopf normal propia. Entonces se tiene que $AK^+ = K^+A =: I$ es un *ideal de Hopf* de A; esto es:

$$\Delta(I) \subseteq I \otimes A + A \otimes I, \quad \epsilon|_I = 0, \quad \mathcal{S}(I) \subseteq I.$$

Por lo tanto, el cociente A/AK^+ tiene una estructura natural de álgebra de Hopf. Si además la dimensión de A es finita, se tiene una extensión de álgebras de Hopf

$$1 \to K \to A \xrightarrow{\pi} A/AK^+ \to 1,$$

donde $\pi : A \to A/AK^+$ es la proyección canónica.

El siguiente Lema, debido a Masuoka, establece un criterio útil para decidir si una subálgebra de Hopf de un álgebra de Hopf semisimple es normal.

Lema 3.2.5. *Sea A un álgebra de Hopf semisimple. Sea $K \subseteq H$ una subálgebra de Hopf y sea $e \in K$ la integral normalizada. Entonces K es normal si y sólo si e es central en H.*

La extensión de álgebras de Hopf de dimensión finita (3.2.2) se dice *central* si $\iota(K) \subseteq Z(A)$. En este caso se usa la notación $0 \to K \to A \to H \to 1$. También se escribirá $1 \to K \to A \to H \to 0$ cuando la extensión dual sea central.

3.3. **Extensiones hendidas.** La extensión (3.2.2) se dice *hendida* si satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

a). Existe una aplicación lineal $\gamma : H \to A$, inversible para el producto de convolución, tal que $\gamma(1) = 1$ y $(\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta\gamma = (\gamma \otimes \mathrm{id})\Delta$.

b). Existe una aplicación lineal $\xi : A \to K$, inversible para el producto de convolución, tal que $\epsilon\xi = \epsilon$ y $\xi(xa) = x\xi(a)$, $\forall x \in K$, $a \in A$.

c). Existen una aplicación de K-módulos $\xi : A \to K$ y una aplicación de H-comódulos $\gamma : H \to A$, tales que $\xi\gamma = \epsilon_H 1_K$ y $(\iota\xi) \otimes (\gamma\pi) = \mathrm{id}_A$.

Una tal γ se dice una sección (inversible) para (3.2.2), y una tal ξ se dice una retracción (inversible). Como consecuencia de [Sch4], se tiene que toda extensión de álgebras de Hopf de dimensión finita es hendida.

Definición 3.3.1. Sean K y H biálgebras. Sean

$$\rightharpoonup : H \otimes K \to K, \quad \rho : H \to H \otimes K, \quad \sigma : H \otimes H \to K, \quad \tau : H \to K \otimes K,$$

aplicaciones lineales. La colección $(\rightharpoonup, \rho, \sigma, \tau)$ se dice una colección de *datos compatibles* si se verifican las condiciones en [AD, Thm. 2.20].

El siguiente Teorema se demuestra en [AD, Thm. 2.20], [A, Prop. 3.1.12].

Teorema 3.3. *Sea $(\rightharpoonup, \rho, \sigma, \tau)$ una colección de datos compatibles para el par (H, K). Entonces hay una biálgebra asociada, que se denota por $A = K^{\rho,\tau}\#_{\rightharpoonup,\sigma}H$ o simplemente $A = K^{\tau}\#_{\sigma}H$, cuyo espacio vectorial subyacente es $K \otimes H$, y cuya multiplicación y comultiplicación están dadas, respectivamente, por*

$$(a\#h)(b\#g) = a(h_1 \rightharpoonup b)\sigma(h_2, g_1)\#h_3g_2,$$
$$\Delta(a\#h) = a_1\tau(h_1)_j\#\rho(h_2)_i \otimes a_2\tau(h_1)^j\rho(h_2)^i\#h_3,$$

donde $a\#h$ denota el elemento $a \otimes h \in K \otimes H$, $\forall a \in K$, $h \in H$; la unidad y counidad son, respectivamente, $1 = 1_K\#1_H$ y $\epsilon = \epsilon_K \otimes \epsilon_H$.

Supongamos que K y H son álgebras de Hopf. Si además σ y τ son inversibles para el producto de convolución, entonces $K^{\rho,\tau}\#_{\rightharpoonup,\sigma}H$ es un álgebra de Hopf con antípoda

$$\mathcal{S}(a\#h) = \left(\sigma^{-1}(\mathcal{S}\rho(h_2)_h, \rho(h_3)_j\#\mathcal{S}\rho(h_1)_i\right), \left(\tau^{-1}(h_4)_k\mathcal{S}(a\rho(h_1)^i\rho(h_2)^h\rho(h_3)^j\tau^{-1}(h_4)^k)\#1\right),$$

donde $\sigma^{-1} : H \otimes H \to K$ y $\tau^{-1} : H \to K \otimes K$ denotan, respectivamente, los inversos de σ y τ con respecto al producto de convolución.

Se tiene en este caso una extensión de álgebras de Hopf (3.2.2), donde las aplicaciones ι y π son las naturales: $\iota(a) = a\#1$, $\pi(a\#h) = \epsilon(a)h$, $\forall a \in K$, $h \in H$. Más aún, esta extensión es hendida.

Por otro lado, si A es un álgebra de Hopf que admite una extensión como en (3.2.2), y si esta extensión es hendida, entonces existe un dato compatible $(\rightharpoonup, \rho, \sigma, \tau)$ tal que σ y τ son inversibles para el producto de convolución y $A \simeq K^{\rho,\tau}\#_{\rightharpoonup,\sigma}H$.

Supongamos que A es un álgebra de Hopf de dimensión finita y que A admite una extensión (3.2.2). Por [BM] se tiene entonces que A es semisimple si y sólo si K y H lo son.

3.4. **Extensiones abelianas: sucesión exacta de Kac.** Sea $1 \to K \to A \to H \to 1$ una extensión de álgebras de Hopf, tal que K es conmutativa y H es coconmutativa. Tales extensiones se llaman *abelianas*. En dimensión finita (si k es algebraicamente cerrado de característica 0), las extensiones abelianas toman la forma

$$1 \to k^{\Gamma} \to A \to kF \to 1, \tag{3.4.1}$$

para ciertos grupos finitos Γ y F. Notar que la extensión dual $1 \to k^F \to A^* \to k\Gamma \to 1$ es también abeliana. La acción débil $\rightharpoonup$: $kF \otimes k^{\Gamma} \to k^{\Gamma}$ y la coacción débil $\rho : kF \to kF \otimes k^{\Gamma}$ asociadas corresponden, respectivamente, a *acciones* por permutaciones

$$\triangleleft : \Gamma \times F \to \Gamma, \qquad \triangleright : \Gamma \times F \to F. \tag{3.4.2}$$

Las condiciones de compatibilidad entre $\triangleleft$, $\triangleright$, σ y τ se pueden encontrar en [Ma6]; en particular, se satisface que $1 \triangleleft x = 1$ y $s \triangleright 1 = 1$, para todo $s \in \Gamma$, $x \in F$.

Bajo esta correspondencia, el cociclo $\sigma : kF \otimes kF \to k^{\Gamma}$ corresponde a un 2-cociclo normalizado $\sigma : F \times F \to (k^{\Gamma})^{\times}$, con respecto a la acción por automorfismos de grupos $\rightharpoonup$ de F sobre el grupo multiplicativo $(k^{\Gamma})^{\times}$ de elementos inversibles del álgebra k^{Γ}.

De manera similar, el cociclo dual $\tau : kF \to k^{\Gamma} \otimes k^{\Gamma}$ corresponde a un 2-cociclo normalizado $\tau : \Gamma \times \Gamma \to (k^F)^{\times}$.

La correspondencia está dada como sigue: si $\delta_s \in k^{\Gamma}$ es el idempotente asociado a $s \in \Gamma$, entonces se tiene

$$x \rightharpoonup \delta_s = \delta_{s \triangleleft x^{-1}} \quad \text{y} \quad \rho(x) = \sum_{s \in \Gamma} (s \triangleright x) \otimes \delta_s,$$

para todo $s \in \Gamma$, $x \in F$.

Un par de grupos finitos (F, Γ) provistos de acciones por permutaciones como más arriba, se dice un par de grupos *apareados*. En particular, la extensión (3.4.1) se dice asociada al par de grupos apareados (F, Γ).

Las clases de equivalencia de extensiones abelianas (3.4.1) asociadas a un par de grupos apareados (F, Γ) están clasificadas por un grupo abeliano, que se denota $\operatorname{Opext}(kF, k^{\Gamma})$. Este es un resultado debido a a G. Kac [K2] para el caso $k = \mathbb{C}$, y a I. Hofstetter [Hf] en el caso más general de extensiones abelianas de dimensión arbitraria.

Sean $\triangleleft$ y $\triangleright$ acciones por permutaciones como en (3.4.2) (fijas) que hacen de (F, Γ) un par de grupos apareados. Si $(\triangleleft, \triangleright, \sigma, \tau)$ y $(\triangleleft, \triangleright, \sigma', \tau')$ son dos colecciones de datos compatibles, entonces $(\triangleleft, \triangleright, \sigma\sigma', \tau\tau')$ es una colección de datos compatibles.

Por otro lado, $\triangleleft$ y $\triangleright$, junto con el cociclo trivial y el cociclo dual trivial, forman una colección de datos compatibles, que dan lugar a un álgebra de Hopf $k^{\Gamma} \# kF$. Si $A = k^{\Gamma}{}^{\tau} \#_{\sigma} kF$ y $B = k^{\Gamma}{}^{\tau'} \#_{\sigma'} kF$, sea $A.B := k^{\Gamma}{}^{\tau\tau'} \#_{\sigma\sigma'} kF$; el producto en $\operatorname{Opext}(kF, k^{\Gamma})$ de las clases de equivalencia de extensiones con representantes A y B, denotadas respectivamente, por $[A]$ y $[B]$, está determinado por

$$[A][B] := [A.B],$$

mientras que el elemento identidad de $\operatorname{Opext}(kF, k^{\Gamma})$ es la clase de equivalencia de extensiones *escindidas* $[k^{\Gamma} \# kF]$.

El resultado siguiente es debido a G. I. Kac [K2].

Teorema 3.4. *Se tiene una sucesión exacta larga de grupos abelianos*

$$0 \to H^1(F \bowtie \Gamma, k^{\times}) \xrightarrow{\operatorname{res}^1} H^1(F, k^{\times}) \oplus H^1(\Gamma, k^{\times}) \to \operatorname{Aut}(k^{\Gamma} \# kF) \to H^2(F \bowtie \Gamma, k^{\times}) \xrightarrow{\operatorname{res}^2} H^2(F, k^{\times}) \oplus H^2(\Gamma, k^{\times})$$
$$\to \operatorname{Opext}(kF, k^{\Gamma}) \to H^3(F \bowtie \Gamma, k^{\times}) \xrightarrow{\operatorname{res}^3} H^3(F, k^{\times}) \oplus H^3(\Gamma, k^{\times}).$$

Aquí res denota el homomorfismo de restricción correspondiente a las inclusiones $F \subseteq F \bowtie \Gamma$ y $\Gamma \subseteq F \bowtie \Gamma$ y Aut denota el grupo de automorfismos de álgebras de Hopf. Una demostración de este resultado se puede encontrar también en [Ma6, 7.4].

Ejemplo 3.4.3. Sean $p \neq q$ números primos. Si H es un álgebra de Hopf de dimensión pq tal que H no es simple como álgebra de Hopf, entonces H es trivial.

Demostración. Supongamos que H admite una extensión $1 \to A \to H \to B \to 1$. (Notar que en vista de la clasificación en dimensión prima [Z], tanto A como B son semisimples y por lo tanto H también lo es.)

Dado que $\dim A \dim B = pq$, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $A = k\mathbb{Z}_p$ y $B = \mathbb{Z}_q$. Digamos que $p < q$. Entonces la acción inducida por la extensión es necesariamente trivial. Luego, como álgebra, A es isomorfa a un anillo de grupo torcido $A(\mathbb{Z}_q)$ y por lo tanto conmutativa. □

3.5. **Biproductos.** En esta sección se describe la correspondencia entre álgebras de Hopf trenzadas y álgebras de Hopf munidas de una proyección que admite una sección de álgebras de Hopf. Esta correspondencia es debida a D. Radford [R] y ha sido formulada en términos de categorías trenzadas por S. Majid (ver por ejemplo [Mj]).

Definición 3.5.1. Sea H un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva. Un *módulo de Yetter-Drinfeld* a izquierda sobre H es un espacio vectorial V munido de una estructura de H-módulo a izquierda $\rightharpoonup: H \otimes V \to V$ y de una estructura de H-comódulo a izquierda $\rho : V \to H \otimes V$, relacionadas por la condición de Yetter-Drinfeld:

$$\rho(h \rightharpoonup v) = h_1 v_{-1} \mathcal{S}(h_3) \otimes h_2 \rightharpoonup v_1, \tag{3.5.2}$$

para todo $h \in H$, $v \in V$.

Un morfismo entre dos módulos de Yetter-Drinfeld V y W es una aplicación lineal $V \to W$ que es a la vez un morfismo de H-módulos y de H-comódulos.

Con esta definición, la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre H resulta una categoría trenzada, que se denota ${}^H_H\mathcal{YD}$. La trenza c en ${}^H_H\mathcal{YD}$ está definida como sigue para cada par de objetos V y W:

$$c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V, \quad c_{V,W}(v \otimes w) = v_{-1} \rightharpoonup w \otimes v_0, \forall v \in V, w \in W. \tag{3.5.3}$$

Cuando H es de dimensión finita, la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre H coincide (como categoría trenzada) con la categoría de módulos sobre el doble de Drinfeld de H con la trenza canónica; notar que esta última es una categoría trenzada pues $D(H)$ es cuasitriangular. (Ver sección 5.)

Definición 3.5.4. Sea H un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva. Un álgebra de Hopf *trenzada* sobre H es un álgebra de Hopf R en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre H. Esto es, R satisface las siguientes condiciones:

1). R es un módulo de Yetter-Drinfeld sobre H.

2). R es a la vez tiene estructuras de álgebra y de coálgebra sobre k, de modo que la multiplicación $m_R : R \otimes R \to R$, la unidad $u_R : k \to R$, la comultiplicación $\Delta_R : R \to R \otimes R$ y la counidad $\epsilon_R : R \to k$ son morfismos en ${}^H_H\mathcal{YD}$.
Se usa la notación $\Delta_R(r) = r^1 \otimes r^2$ –en vez de $\Delta_R(r) = r_1 \otimes r_2$– para la comultiplicación de R.

3). $\Delta_R : R \to R \otimes R$ es compatible con el producto en el sentido siguiente:

$$\Delta_R(rs) = r^1((r^2)_{-1} \rightharpoonup s^1) \otimes (r^2)_0 s^2,$$

para todo $r, s \in R$.

4). Existe una aplicación lineal $\mathcal{S}_R : R \to R$ tal que $\mathcal{S}_R(r^1)r^2 = \epsilon_R(r)1_R = r^1\mathcal{S}_R(r^2)$, $\forall r \in R$. Una tal aplicación resulta necesariamente un morfismo de módulos de Yetter-Drinfeld.

La condición 2) dice que R es un álgebra y una coálgebra en la categoría ${}^H_H\mathcal{YD}$. Puesto que ${}^H_H\mathcal{YD}$ es una categoría monoidal trenzada, dada un álgebra R en ${}^H_H\mathcal{YD}$, usando la trenza $R \otimes R \to R \otimes R$ es posible definir una estructura de álgebra (también en la categoría) en el producto tensorial $R \otimes R$. Esto se consigue, definiendo el producto $(R \otimes R) \otimes (R \otimes R) \to R \otimes R$ como la composición

$$R \otimes R \otimes R \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes c \otimes \mathrm{id}} R \otimes R \otimes R \otimes R \xrightarrow{m_R \otimes m_R} R \otimes R.$$

De este modo, la condición 3) expresa que $\Delta_R : R \to R \otimes R$ es un morfismo de álgebras en ${}^H_H\mathcal{YD}$.

En general, un álgebra de Hopf trenzada no es un álgebra de Hopf en el sentido usual. No hay hasta el momento muchos resultados generales de clasificación de álgebras de Hopf trenzadas semisimples. Existen ejemplos de álgebras de Hopf trenzadas sobre el álgebra de grupo del grupo cíclico de orden p, con p un primo, que son conmutativas y no son álgebras de Hopf en el sentido usual; la estructura de éstas se caracteriza en [So].

Sean H un álgebra de Hopf y sea R un álgebra de Hopf trenzada sobre H. El par (H, R) da lugar a una nueva álgebra de Hopf mediante el proceso llamado *bosonización*. Sea $A := R \otimes H$. Se usará la notación $A := R\#H$ y $r\#g := r \otimes g \in A$, para $r \in R, g \in H$.

Se consideran en A las estructuras de álgebra y de coálgebra definidas como sigue:

$$(r\#g)(s\#h) = r(g_1 \rightharpoonup s)\#g_2h, \quad 1_A = 1_R\#1_H,$$
$$\Delta(r\#g) = r^1\#(r^2)_{-1}g_1 \otimes (r^2)_0\#g_2, \quad \epsilon_A = \epsilon_R \otimes \epsilon_H,$$

para todo para todo $g, h \in H$, $r, s \in R$. La antípoda $\mathcal{S}_A : A \to A$ está definida en la forma

$$\mathcal{S}_A(r\#g) = (1\#\mathcal{S}(r_{-1}g))(\mathcal{S}_R(r_0)\#1),$$

para todo $g \in H$, $r \in R$.

El álgebra de Hopf A esta provista de una proyección de álgebras de Hopf $\epsilon_R \otimes \mathrm{id} : A \to H$ junto con una sección de álgebras de Hopf de esta proyección $H \to A$, $h \mapsto 1 \otimes h$, de modo que R se identifica con $A^{\mathrm{co}\, H}$. Notar que R es una subálgebra coideal a izquierda de A *normal* de A, es decir que es estable por la acción adjunta de A. Por otro lado, también se puede ver que la aplicación $\mathrm{id} \otimes \epsilon : A \to R$ es una proyección de coálgebras.

Recíprocament, sean A y H álgebras de Hopf con antípodas biyectivas que admiten una proyección de álgebras de Hopf $\pi : A \to H$ con una sección de álgebras de Hopf $\xi : H \to A$ de π. Sea

$$R = A^{\mathrm{co}\, \pi} = \{a \in A : (\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\},$$

la subálgebra coideal a izquierda de coinvariantes a derecha de π. Entonces R es un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$, con la estructura siguiente:

1). La multiplicación y la unidad son las de A.

2). La comultiplicación está dada por $\Delta_R(r) = r_1\xi\pi(\mathcal{S}(r_2)) \otimes r_3$, mientras que la counidad es $\epsilon_R = \epsilon_A|_R$.

3). La acción $\rightharpoonup: H \otimes R \to R$ es la acción adjunta de A; más precisamente, $h \rightharpoonup r = \xi(h_1)r\mathcal{S}(\xi(h_2))$, para todo $h \in H$, $r \in R$.

4). La coacción $\rho : R \to H \otimes R$ es $\rho = (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta$.

Se puede por lo tanto considerar el biproducto $R\#H$. Se tiene entonces que la aplicación multiplicación $R\#H \to A$, $r\#h \mapsto r\xi(h)$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf.

Sigue de [AS, (4.5) y Thm. 7.3] que si A es de dimensión finita, entonces A es semisimple si y sólo si R y H lo son.

Ejemplo 3.5.5. Supongamos que $|G(A)| = |G(A^*)|$ y $(|G(A)|, [A : G(A)]) = 1$. Sea $\pi : A \to k^{G(A^*)}$ la proyección de álgebras de Hopf obtenida dualizando la inclusión $kG(A^*) \to A^*$.

Por el Teorema de Nichols-Zoeller $kG(A) \cap A^{\mathrm{co}\, \pi} = k1$; de modo que la restricción de π da lugar a un isomorphismo de álgebras de Hopf $kG(A) \to kG(A^*)$.

Resulta entonces que $G(A)$ y $G(A^*)$ son grupos *abelianos* isomorfos y se tiene que $A \simeq R\#kG(A)$ es un biproducto sobre $G(A)$.

Supongamos que A es semisimple. En este caso, dado que R no contiene elementos de tipo grupo de A, la descomposición de R como A-comódulo a izquierda es de la forma $R = k1 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, donde los V_i's son coideales a izquierda irreducibles de A de dimensión mayor que 1.

3.6. **Twisting.** Sea H un álgebra de Hopf. Un *pseudo cociclo* $\phi \in (H \otimes H)^\times$ es un elemento inversible ϕ que satisface las condiciones

$$\partial_2(\phi) := (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\phi^{-1})(1 \otimes \phi^{-1})(\Delta \otimes \mathrm{id})(\phi) \in (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(H)',$$
$$(\epsilon \otimes \mathrm{id})(\phi) = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)(\phi) = 1,$$

donde $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(H)'$ denota el conmutante de $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(H)$ en $H \otimes H \otimes H$. El pseudo cociclo ϕ se dice un cociclo si $\partial_2(\phi) = 1$.

Un *twisting* H_ϕ de H por un pseudo cociclo $\phi = \sum_i \phi_i \otimes \phi^i$, es una nueva estructura de álgebra de Hopf en el álgebra subyacente de H donde se cambian la comultiplicación y la antípoda por

$$\Delta_\phi(h) = \phi\Delta(h)\phi^{-1}, \quad \mathcal{S}_\phi(h) = uhu^{-1},$$

para todo $h \in H$, donde $u = \sum_i \phi_i \mathcal{S}(\phi^i)$. Notar que si H es semisimple entonces H_ϕ también lo es, pues la estructura de álgebra no es alterada por el twisting.

Este tipo de torcimiento se ha estudiado en diversos trabajos, ver por ejemplo [Nik], [Mv], [EG3]. Esta construcción es de especial importancia en el estudio de las álgebras de Hopf, en particular en el de las álgebras de Hopf semisimples.

De hecho, dos álgebras de Hopf H y H' son una un twisting de otra por un cociclo si y sólo si sus categorías de representaciones son monoidalmente equivalentes.

En su trabajo [EG], P. Etingof y S. Gelaki demuestran que si H es un álgebra de Hopf semisimple *triangular*, entonces H es isomorfa a un torcimiento de un álgebra de grupo: $H \simeq (kG)_\phi$, donde G es un grupo finito y $\phi \in (kG \otimes kG)^\times$ es un cociclo en el sentido anterior. Este resultado se basa en un profundo teorema debido a Deligne.

Si G es un grupo finito simple y $\phi \in kG \otimes kG$ es un pseudo-cociclo, entonces $(kG)_\phi$ es nuevamente un álgebra de Hopf simple. Este resultado es debido a D. Nikshych [Nik], quien además construye ejemplos no triviales de álgebras de Hopf simples torciendo la comultiplicación de ciertas familias de grupos finitos simples; la menor dimensión en la que se conoce un ejemplo de álgebra de Hopf simple es 60: este ejemplo es un twisting por un cociclo del grupo alternado $\mathbb{A}_5$.

No se sabe si existen ejemplos de álgebras de Hopf semisimples que sean simples como álgebras de Hopf y cuya dimensión sea menor que 60. Ver [Mo2]. Las dimensiones en que este problema permanece abierto son $24, 36, 40, 48, 54, 56$.

4. Álgebras de caracteres

4.1. **Álgebras de caracteres.** Sea H un álgebra de Hopf semisimple. Sea V un H-módulo de dimensión finita y sea $\rho : H \to \operatorname{End} V$ la correspondiente representación de H. El *carácter* de V es el elemento $\chi_V \in H^*$ definido por $\langle \chi_V, h\rangle = \operatorname{Tr}_V(h) = \operatorname{Tr}(\rho(h))$, para todo $h \in H$.

El carácter de V se dice irreducible si V es un módulo irreducible. El carácter irreducible *trivial* es el carácter del H-módulo k con la representación dada por la counidad $\epsilon : H \to k$.

Sean V y W dos H-módulos con respectivos caracteres χ_V y χ_W. Entonces la comultiplicación en H da lugar a una estructura de H-módulo en el producto tensorial $V \otimes W$, y se tiene que el carácter del módulo $V \otimes W$ es el producto $\chi_V\chi_W$ en H^*.

Por otro lado, si V es de dimensión finita, la antípoda de H da lugar a una estructura de H-módulo en el espacio dual V^*, y el carácter del módulo dual V^* es $\chi_{V^*} = \mathcal{S}(\chi_V)$. Se usará la notación $(\chi_V)^* := \chi_{V^*}$.

Se denotará por $\widehat{H} := \{\chi_1, \dots, \chi_l\}$ al conjunto de caracteres irreducibles de H. Sigue de las relaciones de ortogonalidad para caracteres [LS] que $\widehat{H}$ es un conjunto linealmente independiente de H^*.

Definición 4.1.1. El *álgebra de caracteres* de H es la subálgebra de H^* generada como espacio vectorial por $\widehat{H}$.

De este modo, $R(H)$ resulta un álgebra semisimple (ver por ejemplo [Sch]), que coincide con el subespacio de elementos coconmutativos de H^*:

$$R(H) = \{f \in H^* : \Delta(f) = \Delta^{\mathrm{cop}}(f)\} = \{f \in H^* : \langle f, hl\rangle = \langle f, lh\rangle,\ \forall h, l \in H\},$$

y está provista de una involución de álgebras, determinada por $\chi_i^* = \chi_{V_i^*}$.

4.2. **La ecuación de clases de G.I. Kac y Y. Zhu.** Uno de los principales ingredientes en el estudio de las álgebras de Hopf semisimples es el siguiente Teorema, debido a G. I. Kac y Y. Zhu. Ver [K], [Z].

Sea $\int \in H^*$ la única integral que satisface $< \int, 1 >= 1$. Esta integral se llama la integral normalizada de H^*. Sea $\mathrm{Tr}_H \in H^*$ el carácter de la representación regular de H. Se tiene entonces que $\int = \frac{1}{\dim H} \mathrm{Tr}_H$. En particular, $\int \in R(H)$. Por otro lado, $\int$ es el idempotente central primitivo de H^* (respectivamente, de $R(H)$) correspondiente a la representación trivial ϵ_{H^*} (respectivamente, $\epsilon_{H^*}|_{R(H)}$).

Teorema 4.1. *Sea e un idempotente primitivo de $R(H)$. Entonces $\dim H^*e$ divide a la dimensión de H. Por otro lado, $\dim H^*e = 1$ si y sólo si existe un elemento de tipo grupo central $g \in G(H)$ tal que $e = g \rightharpoonup \int$.*

Además $g = 1$ si y sólo si $e = \int$.

Una demostración alternativa de este Teorema es debida a M. Lorenz; se demuestra en [Lo] que $R(H)$ es un *álgebra simétrica* con bases duales $\{\chi_1, \dots, \chi_l\}$ y $\{\chi_1^*, \dots, \chi_l^*\}$; en particular, resulta que si e es un idempotente primitivo de $R(H)$ y $\widehat{e}$ es el idempotente central primitivo de $R(H)$ tal que $e\widehat{e} = e$, entonces

$$\widehat{e} = \frac{\dim H^*e}{\dim H} \sum_{\chi \in \widehat{H}} \mu(\chi^*)\chi,$$

donde μ es el carácter irreducible de $R(H)$ asociado a e.

Sea $\int = e_1, e_2, \dots, e_n$, un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos en $R(H)$. Se obtiene entonces la llamada *ecuación de clases*:

$$\dim H = \sum_{i=1}^{n} \dim(e_i H^*),$$

con $\dim(e_1 H^*) = 1$ y $\dim(e_i H^*) \,/\, \dim H$, $\forall 1 \leq i \leq n$.

4.3. **Aplicaciones.** El resultado siguiente, basado en la ecuación de clases, es debido a A. Masuoka [Ma5].

Teorema 4.2. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple de dimensión p^n sobre k. Entonces H contiene un elemento de tipo grupo central no trivial.*

Si $g \in H$ es un elemento de tipo grupo central no trivial, entonces $k\langle g\rangle$ es una subálgebra de Hopf central (luego normal) de H. La ecuación de clases, es por lo tanto una herramienta fundamental en los problemas de clasificación de álgebras de Hopf semisimples.

A continuación se muestra otra aplicación del Teorema de Kac-Zhu, debida a Kobayashi y Masuoka (independientemente redescubierto en [Na1]).

Teorema 4.3. *Sea p el menor número primo que divide a la dimensión de H. Supongamos que $K \subseteq H$ es una subálgebra de Hopf de índice p. Entonces H^* tiene un elemento de tipo grupo central no trivial.*

Más aún, en este caso, K es una subálgebra de Hopf normal de H.

Demostración. Sean $\Lambda \in H$ y $e \in K$ integrales no nulas tales que $\epsilon(\Lambda) = \epsilon(e) = 1$. Entonces, $e \in H$ es un idempotente y dado que e es un elemento coconmutativo, $e \in R(H^*)$. Puesto que $e\Lambda = \Lambda$, se puede hallar un sistema completo de idempotentes primitivos de $R(H)$, $e_0 = \Lambda, e_1, \dots, e_n$, tal que $e = \Lambda + \sum_{j \in J} e_j$, para algún subconjunto $J \subseteq \{0, \dots, n\}$. Luego, $He = k\Lambda \oplus \bigoplus_{j \in J} He_j$. Ahora, por el Teorema de Kac-Zhu, $\dim He_j$ divide a la dimensión de H, para todo j. Dado que $\dim He = [H : K] = p^n$, resulta que $\dim He_j$ es una potencia de p, para todo j. Luego, para todo $j \in J$, debe ser $\dim He_j = 1$. Esto implica, de nuevo por el Teorema de Kac-Zhu, que H tiene un elemento de tipo grupo central no trivial.

Sigue también que e es central en H y por lo tanto que K es normal en H. ☐

5. El doble de Drinfeld

5.1. **El doble de Drinfeld.** A continuación se define la estructura del doble de Drinfeld de H. Esta construcción es debida a V. Drinfeld.

Definición 5.1.1. El *doble de Drinfeld* de H es el álgebra de Hopf $D(H)$, donde $D(H) = H^{*\mathrm{cop}} \otimes H$ como coálgebra, mientras que la multiplicación y la antípoda están dadas por

$$(\alpha\#h)(\beta\#g) = \alpha\left(h_1 \rightharpoonup \beta \leftharpoonup \mathcal{S}^{-1}(h_3)\right)\#h_2 g,$$
$$\mathcal{S}(\alpha\#h) = \left(\mathcal{S}(h_3) \rightharpoonup \mathcal{S}(\alpha) \leftharpoonup h_1\right)\#\mathcal{S}(h_2),$$

donde $\alpha\#h$ denota el elemento $\alpha \otimes h \in D(H)$ y para $\beta \in H^*$ y $g, h \in H$, $g \rightharpoonup \beta \leftharpoonup \mathcal{S}^{-1}(h) \in H^*$ está definido por

$$\langle g \rightharpoonup \beta \leftharpoonup \mathcal{S}^{-1}(h), x\rangle = \langle \beta, \mathcal{S}^{-1}(h)xg\rangle, \quad \forall x \in H.$$

El elemento identidad de $D(H)$ es $\epsilon\#1$ y la counidad es $\epsilon_{H^*} \otimes \epsilon_H$.

Sea $\{h_1, \dots, h_n\}$ una base de H y sea $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ la base dual. Entonces $(D(H), \mathcal{R})$ es un álgebra de Hopf cuasitriangular, con R-matriz $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^n h_i \otimes \alpha_i$.

Las aplicaciones $H \to D(H)$, $h \mapsto \epsilon\#h$, y $H^{*\mathrm{cop}} \to D(H)$, $\alpha \mapsto \alpha\#1$, son inclusiones de álgebras de Hopf. Se identificará a H y a H^* con sus imágenes en $D(H)$. Para todo $\alpha \in H^*$, $h \in H$, valen las relaciones

$$\alpha h = (\alpha\#1)(\epsilon\#h) = \alpha\#h.$$

En particular se tiene que $D(H) = H^*H$. Notar que $D(H)^*$ se identifica con $H \otimes H^*$ como espacio vectorial y bajo esta identificación, la evaluación $\langle\ ,\ \rangle : D(H)^* \otimes D(H) \to k$, corresponde a

$$\langle h'\#\alpha', \alpha\#h\rangle = \langle \alpha, h'\rangle\langle \alpha', h\rangle.$$

El siguiente Teorema, debido a D. Radford [R2], provee una descripción de los grupos $G(D(H))$ y $G(D(H)^*)$.

Teorema 5.1. *i). La función $G(H^*) \times G(H) \to G(D(H))$, $(\eta, g) \mapsto \eta\#g$, es un isomorfismo de grupos.*

ii). Todo elemento de tipo grupo de $D(H)^*$ es de la forma $g\#\eta$, donde $\eta \in G(H^*)$ y $g \in G(H)$.

Además, $g\#\eta \in G(D(H)^*)$ si y sólo si $\eta\#g$ es central en $D(H)$.

Como corolario se obtiene el siguiente Teorema, que se demuestra en [Na1].

Teorema 5.2. *Se tiene una extensión central de álgebras de Hopf*

$$0 \to kG(D(H)^*) \xrightarrow{\iota} D(H) \xrightarrow{\pi} K \to 1, \tag{5.1.2}$$

donde la aplicación ι está definida en la forma

$$\iota(g\#\eta) = \eta\#g$$

y K es el álgebra de Hopf cociente $K = D(H)/D(H)\iota(kG(D(H)^*))^+$. Se tienen además:

i). El homomorfismo de grupos $\pi|_{G(H)} : G(H) \to G(K)$ (respectivamente, $\pi|_{G(H^*)} : G(H^*) \to G(K)$) es inyectivo, a menos que H (respectivamente, H^*) contenga un elemento de tipo grupo central no trivial.

ii). Sean g y $g' \in G(H)$ y sean η y $\eta' \in G(H^*)$. Se identifica $G(K^*) \subseteq G(D(H)^*)$ a través de la aplicación inyectiva de álgebras de Hopf ${}^t\pi : K^* \to D(H)^*$. Si $g\#\eta \in G(K^*)$ y $g'\#\eta' \in G(D(H)^*)$, entonces

$$\langle \eta', g\rangle\langle \eta, g'\rangle = 1.$$

En particular $\langle g, \eta\rangle^2 = 1$.

5.2. **Dimensión de los módulos irreducibles.** En el año 1975, I. Kaplansky formuló una lista de diez conjeturas concernientes a la estructura de las álgebras de Hopf. La lista completa de éstas se puede encontrar por ejemplo en [Sch, Appendix], [Kap]. Una de estas conjeturas es la siguiente:

Conjetura. Sea H un álgebra de Hopf semisimple sobre k. Si V es un H-módulo irreducible, entonces la dimensión de V divide a la dimensión de H.

Para grupos finitos, éste es un resultado clásico debido a Frobenius. Por esta razón, si H es un álgebra de Hopf semisimple que satisface que la dimensión de todo H-módulo irreducible divide a la dimensión de H, H se llama de *tipo Frobenius*.

Como consecuencia de un resultado de S. Montgomery y S. Whiterspoon en [MoW], se tiene que toda álgebra de Hopf semisimple que puede ser obtenida por extensiones a partir de álgebras de grupo y/o sus duales, es de tipo Frobenius. En particular, toda álgebra de Hopf de dimensión p^n, donde p es un número primo, es de tipo Frobenius.

Se sabe también que si H es un álgebra de Hopf semisimple sobre k que tiene un *orden* de álgebras de Hopf, entonces H es de tipo Frobenius. Este resultado es debido a R. Larson; una prueba alternativa de este resultado fue dada en [AN].

Otra instancia particular en la que la conjetura ha sido demostrada es la siguiente: si V es un H-módulo irreducible tal que el carácter χ_V es *central* en H^*, entonces la dimensión de V divide a la dimensión de H [ZS].

La conjetura ha sido demostrada por P. Etingof y S. Gelaki en [EG] para álgebras de Hopf semisimples *cuasitriangulares*; más precisamente, se tiene el siguiente Teorema.

Teorema 5.3. *Supongamos que H es semisimple. Si V es un módulo irreducible sobre $D(H)$, entonces la dimensión de V divide a la dimensión de H.*

Un antecedente de este Teorema es el trabajo [Z2]. La demostración de este Teorema en [EG] se basa en el hecho de que $D(H)$ es un álgebra de Hopf *factorizable* y usa una famosa fórmula debida a Verlinde. Otras demostraciones, basadas en la ecuación de clases, debidas a H.-J. Schneider y a Y. Tzang y Y. Zhu, respectivamente, se encuentran en [Sch5], [TZ].

A continuación se enuncia otro resultado concerniente a la dimensión de los módulos irreducibles debido a W. Nichols y B. Richmond [NR].

Teorema 5.4. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple. Supongamos que H tiene un módulo irreducible de dimensión 2. Entonces la dimensión de H es par.*

5.3. **Aplicación: álgebras de Hopf semisimples de dimensión pq.** El Teorema 5.2 se usó como herramienta para demostrar la existencia de elementos de tipo grupo centrales no triviales en ciertas álgebras de Hopf semisimples en [Na1]. Además, permite dar una demostración alternativa de la clasificación en dimensión pq. Ésto se muestra a continuación.

Teorema 5.5. *Sean p y q números primos tales que $p > q$. Sea H un álgebra de Hopf semisimple de dimensión pq. Entonces H es conmutativa o coconmutativa.*

Demostración. Por [Ma], se puede asumir que p y q son impares. Se afirma que o bien H o bien H^* contiene un elemento de tipo grupo central no trivial. En particular, como se vió en un ejemplo anterior, H resulta trivial.

Supongamos entonces que ni H ni H^* contienen un elemento de tipo grupo central no trivial. Consideremos la extensión central 5.1.2. Por el Teorema de Etingof y Gelaki [EG], las representaciones irreducibles de $D(H)$ dividen a $\dim H = pq$ y son menores que $p^2q^2 = \dim D(H)$, por lo tanto éstas tienen dimensión 1, p o q. Luego lo propio ocurre con las representaciones irreducibles del álgebra de Hopf cociente K. Puede verse entonces, descomponiendo el producto tensorial de representaciones de dimensión p como suma de representaciones irreducibles, que K debe tener representaciones no triviales de dimensión 1: es decir que el grupo $G(K^*)$ es no trivial. Dado que el orden de $G(K^*)$ divide a $\dim D(H) = p^2q^2$, $G(K^*)$ debe contener un elemento de orden p o bien uno de orden q.

Sea $g\#\eta$ un elemento de $G(K^*)$. Luego $\eta\#g$ es un elemento central de $G(H^*) \times G(H) = G(D(H))$. Si $g = 1$, resulta η central en H^* y la afirmación sigue.

Se puede asumir entonces que $G(K^*)$ contiene un elemento de la forma $g\#\eta$, donde $g \in G(H)$ y $\eta \in G(H^*)$ son del mismo orden p o q. Dado que p y q son impares, se tiene que $\langle \eta, g\rangle = 1$.

Por lo tanto, el subgrupo generado por g en $G(H)$ está contenido en la subálgebra de coinvariantes de H bajo la proyección $\pi : H \to k^{\langle \eta \langle}$, $\pi(h)(x) = \langle x, h\rangle$.

Esto es imposible, dado que por [NZ], $|\eta| = |g|$ debería dividir a $[H^* : k\langle \eta\rangle]$. La contradicción muestra que H o bien H^* debe contener un elemento de tipo grupo central no trivial y el Teorema sigue. $\square$

Referencias

[A] N. Andruskiewitsch, *Notes on extensions of Hopf algebras*, Canad. J. Math. **48** (1996), 3–42.

[A2] N. Andruskiewitsch, *About finite dimensional Hopf algebras. CIMPA School "Quantum symmetries in theoretical physics and mathematics", Bariloche 2000.*, Contemp. Math., to appear. 57 páginas. Disponible en http://www.mate.uncor.edu/andrus.

[AD] N. Andruskiewitsch and J. Devoto, *Extensions of Hopf algebras*, Algebra i Analiz **7** (1995), 22–61; also in St. Petersburg Math. J. **7** (1996), 17–52.

[AN] N. Andruskiewitsch and S. Natale, *Plancherel identity for semisimple Hopf algebras*, Commun. Alg. **25** (1997), pp. 3239-3254.

[AS] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Hopf algebras of order p^2 and braided Hopf algebras of order p*, J. Algebra, **199** (1998), 430–454.

[BM] R. J. Blattner and S. Montgomery, *Crossed products and Galois extensions of Hopf algebras*, Pacific J. Math. **137** (1989), 37–54.

[EG] P. Etingof and S. Gelaki, *Some properties of finite-dimensional semisimple Hopf algebras*, Math. Res. Lett. **5** (1998), 191–197.

[EG2] ———, *Semisimple Hopf algebras of dimension pq are trivial*, J. Algebra **21** (1997), 664-669.

[EG3] ———, *The representation theory of cotriangular semisimple Hopf algebras*, Int. Math. Res. Not. **7** (1999), 387–394.

[F] N. Fukuda, *Semisimple Hopf algebras of dimension* 12, Tsukuba J. Math. **210** (1998), 43–54.

[GW] S. Gelaki and S. Westreich,*On semisimple Hopf algebras of dimension pq*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 39–47; *Corrigendum* Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 2829–2831.

[Hf] I. Hofstetter, *Extensions of Hopf algebras and their cohomological description*, J. Algebra **164** (1994), 264–298.

[K] G. I. Kac, *Certain arithmetic properties of ring groups*, Funct. Anal. Appl. **6** (1972), 158–160.

[K2] ———, *Extensions of groups to ring groups*, Math. USSR Sbornik **5** (1968), 451–474.

[Kap] I. Kaplansky, *Bialgebras*, Univ. of Chicago Lect. Notes (1975).

[Ka] Y. Kashina, *Classification of semisimple Hopf algebras of dimension* 16, J. Algebra **232**, (2000), 617–663.

[LR] R. Larson and D. Radford, *Finite dimensional cosemisimple Hopf algebras in characteristic* 0 *are semisimple*, J. Algebra, **117** (1988), 267–289.

[LR2] ———, *Semisimple Cosemisimple Hopf Algebras*, Amer. J. of Math. **110** (1988), 187–195.

[LS] R. Larson and M. Sweedler, *An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras*, Amer. J. of Math. **91** (1969), 75–94.

[Lo] M. Lorentz, *On the class equation for Hopf algebras*, Inter. Math. Research Not. **1** (1997), 53–59.

[Mj] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory.* Cambridge Univ. Press, 1995.

[Ma] A. Masuoka, *Semisimple Hopf algebras of dimension* $2p$, Commun. Alg. **23** (1995), 1931–1940.

[Ma2] ———, *The p^n-th Theorem for Hopf algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 187–195.

[Ma4] ———, *Self dual Hopf algebras of dimension p^3 obtained by extension*, J. Algebra **178** (1995), 791–806.

[Ma5] ———, *Some Further Classification Results on Semisimple Hopf algebras*, Commun. Alg. **21** (1996), 307–329.

[Ma6] ———, *Extensions of Hopf algebras*, (1999), Trab. Mat. 41/99 (FaMAF). Disponible en http://www.mate.uncor.edu/natale.

[Ma7] ———, *Hopf algebra extensions and cohomology*, en: Recent developments in Hopf algebra Theory, MSRI series Cambridge Univ. Press; eds. M. Cohen et al., en prensa.

[Mo] S. Montgomery, *Hopf Algebras and their Actions on Rings*, AMS (1993), CMBS **82**.

[Mo2] ———, *Classifying finite dimensional semisimple Hopf algebras*, Contemp. Math **229** (1998), AMS, 265–279.

[MoW] S. Montgomery and S. Witherspoon, *Irreducible representations of Crossed Products*, J. Pure Appl. Alg. **129** (1998), 315–326.

[Mv] M. Movshev, *Twisting in group algebras of finite groups*, Funct. Anal. Appl. **27** (1994), 240–244.

[Na1] S. Natale, *On semisimple Hopf algebras of dimension pq^2*, J. Algebra **221** (1999), 242–278.

[Na2] ———, *On semisimple Hopf algebras of dimension pq^2, II*, Algebras and Rep. Theory **5** (2001), 277–291.

[Na3] ———, *On semisimple Hopf algebras of dimension pq^r*, Algebras and Rep. Theory, en prensa. Disponible en http://www.mate.uncor.edu/natale.

[NZ] W.D. Nichols and M. B. Zöller, *A Hopf algebra freeness Theorem*, Amer. J. Math. **111** (1989), pp. 381–385.

[NR] W.D. Nichols and M. B. Richmond, *The Grothendieck group of a Hopf algebra*, J. Pure Appl. Alg. **106** (1996), 297–306.

[Nik] D. Nikshych, *K_0-rings and twisting of finite dimensional semisimple Hopf algebras*, Commun. Alg.**26** (1998), 321–342; *Corrigendum* Commun. Alg. **26** (1998), 2019.

[R] D. Radford, *Hopf algebras with projection*, J. Algebra **92** (1985), 322–347.

[R2] ———, *Minimal Quasitriangular Hopf algebras*, J. Algebra **157** (1993), 285–315.

[Sch] H.-J. Schneider, *Lectures on Hopf algebras*, (1995), Trab. Mat. 31/95 (FaMAF). Disponible en http://www.mate.uncor.edu/natale.

[Sch2] ———, *Normal basis and transitivity for crossed products of Hopf algebras*, J. Algebra **151** (1992), 289–312.

[Sch4] ———, *Some remarks on exact sequences of quantum groups*, Commun. Algebra **21** (1993), 3337–3358.

[Sch5] ———, *Some properties of factorizable Hopf algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[So] Y. Sommerhäuser, *Yetter-Drinfeld Hopf algebras over groups of prime order*, Preprint gk-mp-9905/59, München (1999).

[Sw] M.E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New York, 1969.

[TZ] Y. Tsang and Y. Zhu, *On the Drinfeld double of a Hopf algebra*, Preprint (1998).

[ZS] S. Zhu, *On finite dimensional semisimple Hopf algebras*, Commun. Algebra **21** (1993), 3871–3885.

[Z] Y. Zhu, *Hopf algebras of prime dimension*, Internat. Math. Res. Notes **1** (1994), 53–59.

[Z2] ———, *A commuting pair in Hopf algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2847-2851.

FaMAF. Universidad Nacional de Córdoba. Medina allende y Haya de la Torre. (5000) Ciudad Universitaria. Córdoba. Argentina

E-mail address: `natale@mate.uncor.edu`