REPRESENTACIONES DE GRUPOS FINITOS: NOTAS PARA LA UMA, MENDOZA, SEPTIEMBRE 2008. COPIA DE NOTAS PARA UN CURSO EN LA UBA

MATÍAS GRAÑA

1. Introducción. Creada originalmente para contestar una pregunta de Dedekind, la teoría de caracteres de grupos finitos fue introducida y trabajada por Frobenius en una serie de papers entre 1896 y 1899 (véase por ejemplo [8, 9]). Con el tiempo, los caracteres resultaron ser extremadamente ricos y se convirtieron en una de las herramientas fundamentales en la teoría de grupos. Es a través de los caracteres, por ejemplo, que Burnside pudo probar que todo grupo de orden $p^a q^b$, con p, q primos, es soluble. La intención de estas notas es presentar de manera breve esta teoría. Se incluyen ejercicios y "ejemplicios" (mezclas de ejercicios, ejemplos y suplicios).

En el pasado, editar unas notas como éstas era muy complicado. Los métodos de composición y reproducción eran caros, y solo buenas obras terminaban siendo publicadas. Hoy en día, la democratización que produjeron la computadora, el $\TeX$ y la impresora permite que vean la luz notas oscuras, mal redactadas y redundantes como la presente. El lector tiene la posibilidad de consultar la bibliografía y quedarse con la buena literatura que hay al respecto. Existiendo esa buena literatura, el autor no se hace cargo de los inconvenientes ocasionados por el uso de ésta.

2. Definición. Sea G un grupo. Una *representación de G de grado n* es un morfismo de grupos $G \ni g \mapsto \rho(g) \in M_n(\mathbf{k})$, donde $M_n(\mathbf{k})$ es el anillo de matrices de $n \times n$ a coeficientes en $\mathbf{k}$. Si se quiere enfatizar el rol de $\mathbf{k}$, se habla de "una representación sobre $\mathbf{k}$". El hecho de que se trate de un morfismo permite hacer algunas cuentas con los elementos del grupo usando las matrices que los representan. Por ejemplo, si se quiere saber si en G vale que $gh = k$, alcanza con ver que en una representación ρ se tiene $\rho(g)\rho(h) \neq \rho(k)$ para dar una respuesta negativa. O, si se tiene una representación *fiel* (inyectiva), se pueden hacer todas las cuentas del grupo con las matrices correspondientes. Dicho de otro modo, una representación fiel resuelve entre otras cosas el problema de la palabra. Un grupo se dice *lineal* si tiene una representación fiel.

Ejemplicio 2.1. *Sea G el grupo con generadores x, y bajo las relaciones $x^2 = y^2 = 1$. Probar que G es infinito. (**Sug:** tomar la representación $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $y \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$).*

Otra manera en que aparecen las representaciones es través de *acciones*. A menudo se tiene un espacio vectorial sobre el que actúa un grupo de manera lineal. En ese caso, si se toma una base del espacio, se puede ver la acción de cada elemento del grupo como una matriz. Estudiar entonces las representaciones del grupo en cuestión permite dar información sobre el espacio vectorial y la acción del grupo.

Ejemplicio 2.2. *En un cubo hay un número real en cada cara. Todos los días se cambia el número de cada cara por el promedio de los de las cuatro caras contiguas. Encontrar el límite de este proceso. (**Sug:** considerar en $\mathbb{R}^6$, donde las 6-uplas se identifican con las configuraciones del cubo, la acción del grupo de simetrías* *del cubo. Descomponer $\mathbb{R}^6 = V^+ \oplus V^-$, donde V^+ son las configuraciones en las que cada cara tiene el mismo número que la opuesta y V^- son aquéllas en las que cada cara tiene "$-$ el número de la opuesta". A su vez, V^+ se puede seguir descomponiendo como suma de dos subespacios estables por la acción del grupo).*

3. Álgebra de grupo. Dado un grupo G y un cuerpo $\mathbf{k}$, se considera el *álgebra de grupo* $\mathbf{k}G$, que tiene como elementos las combinaciones lineales formales $\sum_{g\in G}\alpha_g e_g$, donde $\alpha_g \in \mathbf{k}$ y $\alpha_g = 0$ salvo para finitos $g \in G$. La suma es la de espacios vectoriales, el producto está dado por la distributividad y por $e_g e_h = e_{gh}$ $\forall g, h \in G$. A menudo se usará la notación $g = e_g$. Dicho esto, el elemento unidad de $\mathbf{k}G$ se puede escribir como

$$1 = e_1 = 1 \cdot e_1 = 1 \cdot 1$$

Como $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{k}G$, un $\mathbf{k}G$-módulo es automáticamente un $\mathbf{k}$-espacio vectorial. Si M es un $\mathbf{k}G$-módulo de dimensión finita (como $\mathbf{k}$-e.v.), se puede restringir la acción de $\mathbf{k}G$ a $G \subset \mathbf{k}G$, y se obtiene una representación de G. Recíprocamente, si se tiene una representación ρ de grado n, se toma $M = \mathbf{k}^n = \mathbf{k}^{n\times 1}$ los vectores columna y se considera M como $\mathbf{k}G$-módulo con la estructura dada por $(\sum_g \alpha_g g)v = (\sum_g \alpha_g \rho(g))v$.

Conclusión: es equivalente tener una representación de G sobre $\mathbf{k}$ de grado n a tener un $\mathbf{k}G$-módulo de dimensión n. A menudo llamaremos *representación* a un $\mathbf{k}G$-módulo M.

Dado entonces que las representaciones son módulos, tiene sentido tomar la suma directa de representaciones. Si $\rho : G \to \operatorname{End}(M)$ es una representación y $n \in \mathbb{N}$, una notación conveniente es $n \cdot \rho = n\rho := \rho \oplus \cdots \oplus \rho$ (n veces). En términos de módulos, $n\rho$ es $M \oplus \cdots \oplus M$ (n veces). Si $g \in G$, la matriz de $(n\rho)(g)$ tiene $n \times n$ bloques, $\rho(g)$ en la diagonal y 0 fuera.

4. Teorema de Maschke. Recordemos que dada un álgebra A, son equivalentes que

1. todos los A-módulos son proyectivos,
2. todos los A-módulos son inyectivos,
3. toda sucesión exacta corta se escinde,
4. todo submódulo de un módulo tiene un complemento,
5. todos los A-módulos son completamente reducibles,
6. A es completamente reducible como A-módulo.

En este caso, el álgebra A se dice *semisimple.*

Teorema 4.1 (Maschke)**.** *Si G es un grupo finito y $\mathbf{k}$ es un cuerpo cuya característica no divide al orden de G, entonces el álgebra de grupo $\mathbf{k}G$ es semisimple.*

Demostración. La demostración se hace con un recurso canónico cuando se trabaja con grupos finitos: *promediar*. Sea M un $\mathbf{k}G$-módulo y N un submódulo. Sea $\pi : M \to N$ una proyección de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales. Para convertir π en un morfismo de módulos, se lo promedia:

$$\tilde{\pi} : M \to N, \qquad \tilde{\pi} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi g^{-1}, \qquad \text{es decir, } \tilde{\pi}(m) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi(g^{-1}m).$$

Veamos que π es un morfismo de $\mathbf{k}G$-módulos: si $h \in G$, se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(hm) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi(g^{-1}hm)\\ &= \frac{1}{|G|}h\sum_{g\in G} h^{-1}g\pi(g^{-1}hm) = \frac{1}{|G|}h\sum_{h^{-1}g=t\in G} t\pi(t^{-1}m) = h\tilde{\pi}(m).\end{aligned}$$

Por otra parte, es claro que la imagen de $\tilde{\pi}$ está contenida en N, y si $n \in N$ se tiene

$$\tilde{\pi}(n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\pi(g^{-1}n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gg^{-1}n = n.$$

Esto prueba que toda sucesión exacta corta se escinde. $\square$

Ejemplicio 4.2. *Para $n \in \mathbb{N}$, C_n denota el grupo cíclico de n elementos. Fijemos un generador de C_n, g, y supongamos que en $\mathbf{k}$ hay una raíz n-ésima primitiva de 1, ω. Probar que, para $0 \leq i < n$, el morfismo $\rho_i : C_n \to \mathbf{k}$, $\rho_i(g^j) = \omega^{ij}$ da una representación de C_n de grado 1. Probar que $\rho_i \simeq \rho_j \iff i = j$. Probar que estas son todas las representaciones irreducibles de C_n (módulo isomorfismo). En otras palabras, probar que si ρ es una representación de C_n, entonces $\rho \simeq \oplus_{0 \leq i < n} m_i \rho_i$, donde $m_i \in \mathbb{N}_0$.*

Recordemos que el teorema de Wedderburn dice que una $\mathbf{k}$-álgebra semisimple de dimensión finita A es un producto de álgebras de matrices sobre extensiones de $\mathbf{k}$. Si las extensiones son de grado g_i ($i = 1, \dots, r$) y las matrices son de tamaño n_i, entonces

$$\dim A = \sum_{i=1}^{r} g_i n_i^2.$$

Por otra parte, cada una de las álgebras de matrices está asociada a uno de los módulos irreducibles de A. Y en la descomposición de A como suma directa de módulos irreducibles, cada módulo M_i aparece n_i veces (tantas como el tamaño de las matrices a las que está asociado). Por último, si $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado, las extensiones son triviales (de grado 1), por lo que

$$\dim A = \sum_{i=1}^{r} n_i^2. \tag{1}$$

Ejemplicio 4.3. *Dado $n \in \mathbb{N}$, observar que* $\mathrm{sgn} : \mathbb{S}_n \to \mathbf{k}$ *(*sgn *el signo) da una representación de $\mathbb{S}_n$ de grado 1. Para $n = 3$, hay una representación de grado 2:*

$$\rho(1\ 2) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad \rho(1\ 2\ 3) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right).$$

Probar que esto define una representación y que es irreducible. Notar que por (1) *estas son todas las representaciones irreducibles de $\mathbf{k}\mathbb{S}_3$, ya que $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$.*

5. Representaciones trivial y regular, representación dual. Esta sección es trivial: todo grupo tiene una representación trivial. Se toma $M = \mathbf{k}$ como espacio de la representación, y todos los elementos actúan por la identidad. Esto es,

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) \cdot t = \left(\sum_{g \in G} \alpha_g\right) t.$$

Dado un $\mathbf{k}G$-módulo M, se nota por M^G el submódulo más grande isomorfo a una suma de representaciones triviales. En otras palabras,

$$M^G = \{m \in M \mid g \cdot m = m \ \forall g \in G\}. \tag{2}$$

Los elementos de M^G se suelen denominar *los invariantes* de M por la acción de G.

Otra representación usual es la *representación regular*. Se toma $M = \mathbf{k}G$ y G actúa por multiplicación a izquierda. Esto es, $g \cdot (\sum_{h \in H} \alpha_h h) = \sum_{h \in G} \alpha_h gh$. En rigor, esta representación se puede definir (y se lo hace, claro) para cualquier álgebra.

No tan trivial: si M es una representación de G, se llama *representación dual* (o *contragradiente*) al módulo M^* que es el dual de M como espacio vectorial, y donde $(g \cdot f)(m) := f(g^{-1} \cdot m)$.

Ejercicio 5.1. *Probar que la representación dual M^* es realmente una representación. Observar que si se toma una base $\{m_i\}$ de M y su base dual $\{m^i\}$ de M^*, la matriz de $\rho_{M^*}(g)$ en la base $\{m^i\}$ es la inversa traspuesta de la de $\rho_M(g)$ en la base $\{m_i\}$.*

6. Lema de Schur. La siguiente observación es de extrema utilidad y vale para un álgebra A cualquiera. Sean M, N dos A-módulos irreducibles. Entonces un morfismo $f : M \to N$ no trivial es un isomorfismo. La demostración es elemental: $\ker f \subseteq M$ e $\operatorname{im} f \subseteq N$ son submódulos. Por la irreducibilidad de M y N, si f no es 0 entonces es mono y epi. En particular, $\operatorname{Hom}_A(M, M)$ es un álgebra de división. Si $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado y M es de dimensión finita, $\operatorname{Hom}_A(M, M) \simeq \mathbf{k}$.

Ejercicio 6.1. *Probar la última afirmación.*

7. Producto tensorial de representaciones. Recuérdese que dados dos $\mathbf{k}$-espacios vectoriales V, W el producto tensorial $V \otimes W$ es el espacio vectorial generado por elementos $v \otimes w$ con $v \in V$, $w \in W$, bajo las relaciones $(\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) = v \otimes (\lambda w)$, $(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w$, $v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'$. En particular, si $\{v_i, i \in I\}$ es base de V y $\{w_j, j \in J\}$ es base de W, entonces $\{(v_i \otimes w_j), i \in I,\ j \in J\}$ es base de $V \otimes W$. Si M, N son dos representaciones de G, el producto tensorial $M \otimes N$ es también una representación de G. Los elementos de G actúan en $M \otimes N$ "de forma diagonal". Explícitamente,

$$g(m \otimes n) = gm \otimes gn \ \forall g \in G,\ m \in M,\ n \in N.$$

Ejercicio 7.1. *Si M ó N tienen dimensión finita, probar que se tiene un isomorfismo de espacios vectoriales* $\operatorname{Hom}(M, N) \simeq N \otimes M^*$.

En $\operatorname{Hom}(M, N)$ se considera la estructura de $\mathbf{k}G$-módulo dada por $(g \cdot f)(m) = g \cdot f(g^{-1} \cdot m)$.

Ejercicio 7.2. *Probar que es realmente una estructura. Probar que el isomorfismo del ejercicio anterior es un isomorfismo de $\mathbf{k}G$-módulos, tomando a la derecha la acción diagonal entre N y el dual M^*.*

8. Caracteres: definición. Una de las herramientas básicas en la teoría de representaciones de grupos (y a la postre en la teoría de grupos) son los caracteres. Sea M un $\mathbf{k}G$-módulo de dimensión finita, mirado como representación vía $\rho : G \to \operatorname{End}(M)$. Cada $g \in G$ actúa en M por una transformación lineal, y podemos tomarle la traza (que no depende de elecciones de bases). Definimos entonces

$$\chi_M : G \to \mathbf{k}, \qquad \chi_M(g) = \operatorname{tr}(\rho(g)). \tag{3}$$

Observación: si g y h son conjugados (es decir, si $\exists k \in G$ tal que $h = kgk^{-1}$), entonces $\chi_M(g) = \chi_M(h)$ para toda representación M. Luego, alcanza con calcular un caracter en un elemento de cada clase de conjugación.

Ejemplo 8.1. *Recordemos que las clases de conjugación de $\mathbb{S}_n$ están dadas por las particiones de n. Específicamente, si $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_\ell$, la clase de conjugación que le corresponde es la de las permutaciones cuya escritura como productos de ciclos disjuntos es con ciclos de longitudes $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$. En particular, $\mathbb{S}_3$ tiene tres clases de conjugación:*

$$\begin{aligned} \{e\} &\leftrightsquigarrow (3 = 1 + 1 + 1), \\ \{(1\,2),\ (1\,3),\ (2\,3)\} &\leftrightsquigarrow (3 = 2 + 1), \\ \{(1\,2\,3),\ (1\,3\,2)\} &\leftrightsquigarrow (3 = 3). \end{aligned}$$

Calculamos entonces los caracteres de ε la representación trivial, sgn *la representación signo, y ρ la representación de 4.3.*

	e	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$
ε	1	1	1
sgn	1	-1	1
ρ	2	0	-1

Puede notarse que esta matriz es inversible. Esto se probará en breve en general.

Observación: es evidente que $\chi_M(e)$ da el grado de la representación M.

Ejercicio 8.2. *Describir la tabla de caracteres del grupo cíclico C_n y probar que es una matriz inversible.*

9. Caracteres de suma y producto. Notamos con $\mathrm{Fun}(G,\mathbf{k})$ el espacio vectorial de funciones $G \to \mathbf{k}$. Este espacio tiene una estructura de álgebra, multiplicando funciones punto a punto. Dadas dos representaciones de G, $\rho_M : G \to \mathrm{End}(M)$ y $\rho_N : G \to \mathrm{End}(N)$, podemos considerar sus caracteres χ_M y χ_N como elementos de $\mathrm{Fun}(G,\mathbf{k})$. Sea $g \in G$, y miremos $\rho_{M\oplus N}(g) \in \mathrm{End}(M \oplus N)$. Si tomamos una base $\{m_i,\ i \in I\}$ de M y otra $\{n_j,\ j \in J\}$ de N, es claro que en la base $\{m_i, n_j\}$ la matriz de $\rho_{M\oplus N}(g)$ es en bloques, y que su traza es la suma de la traza en M y la traza en N. Esto es,

$$\chi_{M\oplus N} = \chi_M + \chi_N \in \mathrm{Fun}(G,\mathbf{k}).$$

Tomamos ahora la base $\{m_i \otimes n_j,\ (i,j) \in I \times J\}$. Si escribimos los coeficientes matriciales $\rho_M(g)(m_i) = \sum_k \rho_M^{ki}(g)m_k$, tenemos que $\chi_M(g) = \sum_k \rho_M^{kk}(g)$. Hacemos lo mismo con N, y $\chi_N(g) = \sum_l \rho_N^{ll}(g)$. Además,

$$\rho_{M\otimes N}(g)(m_i \otimes n_j) = (\rho_M(g)(m_i)) \otimes (\rho_N(g)(n_j)) = \sum_{k,l} (\rho_M^{ki}(g)m_i) \otimes (\rho_N^{lj}(g)n_l),$$

por lo que

$$\chi_{M\otimes N}(g) = \sum_{k,l} \rho_M^{kk}(g)\rho_N^{ll}(g) = \chi_M(g)\chi_N(g),$$

esto es,

$$\chi_{M\otimes N} = \chi_M\chi_N \in \mathrm{Fun}(G,\mathbf{k}).$$

Ejemplicio 9.1. *Sea ρ la representación irreducible de grado 2 de $\mathbb{S}_3$. Calcular cómo se descomponen en suma directa de representaciones irreducibles los productos tensoriales $\rho \otimes \rho$ y $\rho \otimes \rho \otimes \rho$.*

Ejercicio 9.2. *Sean $\mathbb{D}_4$ y $\mathbb{H}$ los grupos diedral (de 8 elementos) y cuaterniónico respectivamente. Encontrar para cada uno cuatro representaciones irreducibles de grado 1 y una irreducible de grado 2 (en este caso se puede tomar $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ o un cuerpo con raíces cuadradas de -1).*

10. Los subespacios Hom_G y Hom^G. Si M, N son dos representaciones de G, podemos tomar $\mathrm{Hom}(M,N)$ el espacio de transformaciones lineales de M a N, y $\mathrm{Hom}_G(M,N)$ el espacio de morfismos de representaciones, i.e.,

$$\mathrm{Hom}_G(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}(M,N) \mid f(g\cdot m) = g \cdot f(m)\}.$$

Recordemos del ejercicio 7.2 la estructura de módulo de $\mathrm{Hom}(M,N)$. Dentro de este espacio tenemos dos subespacios importantes: $\mathrm{Hom}_G(M,N)$ y los invariantes $(\mathrm{Hom}(M,N))^G$ (mirar la sección 2). Observamos, entonces, que estos subespacios coinciden:

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{Hom}_G(M,N) &\iff f(gm) = gf(m)\ \forall m \in M,\ g \in G \\ &\iff f(g^{-1}m) = g^{-1}f(m)\ \forall m \in M,\ g \in G \\ &\iff gf(g^{-1}m) = f(m)\ \forall m \in M,\ g \in G \\ &\iff g \cdot f = f\ \forall g \in G \\ &\iff f \in (\mathrm{Hom}(M,N))^G. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que M y N son irreducibles. Por el lema de Schur, si $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado,

$$\dim \mathrm{Hom}_G(M,N) = \delta_{M,N}$$

(si $\mathbf{k}$ no es algebraicamente cerrado, sigue valiendo $\dim \mathrm{Hom}_G(M,N) = 0 \iff M \not\simeq N$). En otras palabras, en la representación $\mathrm{Hom}(M,N)$ aparece la representación trivial una vez si $M \simeq N$ y ninguna vez si $M \not\simeq N$.

11. Proyección sobre los invariantes. De ahora en adelante, G es un grupo finito, $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado y $\operatorname{car} \mathbf{k} \nmid |G|$. Tomamos $\Lambda = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \in \mathbf{k}G$. Afirmamos que si M es un $\mathbf{k}G$-módulo, entonces $M^G = \mathrm{im}(\Lambda)$, viendo $\Lambda \in \mathrm{End}(M)$.

Demostración. Si $m \in M$, queremos ver que $\Lambda m \in M^G$. Calculamos

$$g(\Lambda m) = g(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} h)m = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} ghm = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} hm = \Lambda m.$$

Recíprocamente, sea $m \in M^G$. Entonces $\Lambda m = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gm = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} m = m$, por lo que $m \in \Lambda M$. □

La última cuenta de la prueba indica además que $\Lambda \in \mathrm{End}(M)$ es un proyector. Por lo tanto, la dimensión de su imagen coincide con su traza (piénsese en la matriz de un proyector tomando una base compuesta por vectores de la imagen y vectores del núcleo). Conclusión:

$$\dim M^G = \mathrm{tr}(\Lambda) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_M(g). \tag{4}$$

Ejemplicio 11.1. *Probar que si ρ es la representación irreducible de grado 2 de $\mathbb{S}_3$, entonces la representación trivial aparece $(2^n + (-1)^n 2)/6$ veces en $\rho^{\otimes n}$.*

12. Caracter del Hom. De ahora en adelante, $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. Ya vimos (ver 7.2) que $\mathrm{Hom}(M,N) \simeq N \otimes M^*$ como representaciones de G. Luego,

$$\chi_{\mathrm{Hom}(M,N)} = \chi_{N\otimes M^*} = \chi_N \chi_{M^*},$$

por lo que sería útil tener χ_{M^*}. Ahora bien, si $g \in G$, como G es finito tenemos $g^n = 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $\rho_M(g)^n = 1$. Luego, $\rho_M(g)$ es diagonalizable, y su traza es la suma de sus autovalores. Por otra parte, sus autovalores tienen módulo 1 (pues son raíces n-ésimas de la unidad). Así las cosas, $\rho_M(g^{-1})$ es diagonalizable y sus autovalores son los inversos (y por lo tanto los conjugados) de los de $\rho_M(g)$. Luego, $\chi_M(g^{-1}) = \overline{\chi_M(g)}$. Es claro además que la acción de g en M^* es la traspuesta de la acción de g^{-1} en M (mirar la definición en la sección 5). Esto dice que

$$\chi_{M^*} = \overline{\chi_M}. \tag{5}$$

Finalmente, entonces, $\chi_{\mathrm{Hom}(M,N)} = \chi_N\overline{\chi_M}$. Resumiendo lo dicho en la sección 10 y usando (4), obtenemos:

Proposición 12.1. *Si M, N son irreducibles, entonces*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_M(g)}\chi_N(g) = \begin{cases} 1 & si\ M \simeq N, \\ 0 & si\ M \not\simeq N. \end{cases}$$

13. Producto interno en $\mathrm{Fun}(G, \mathbb{C})$ y funciones centrales. Por lo anterior, es claro que conviene definir en $\mathrm{Fun}(G, \mathbb{C})$ el producto interno (hermitiano)

$$(f_1 \mid f_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{f_1(g)}f_2(g).$$

Si tenemos un conjunto de representaciones irreducibles de G no isomorfas entre sí, por 12.1 sus caracteres serán un conjunto ortonormal de $\mathrm{Fun}(G, \mathbb{C})$ con este producto interno. Veremos que los caracteres generan un subespacio particularmente importante: el de las funciones centrales. Una *función central* de G es simplemente una función $G \to \mathbf{k}$ que es constante en cada clase de conjugación. En otras palabras, $f : G \to \mathbf{k}$ es central si y solo si $f(gh) = f(hg)\ \forall g, h \in G$. Ya observamos que los caracteres son funciones centrales. Afirmamos que si $f \in \mathrm{Fun}(G, \mathbb{C})$ es central y es ortogonal a todos los caracteres, entonces es trivial. Por la no degeneración de $(\ \mid\ )$, esto probará que los caracteres generan las funciones centrales.

Demostración. Tomamos el elemento $\Lambda_f = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)g^{-1} \in \mathbb{C}G$. Para mostrar que $f = 0$, alcanza con probar que Λ_f actúa por 0 en cualquier representación de G (¿por qué?). Para esto, gracias al teorema de Maschke, alcanza con probarlo en cualquier representación irreducible. Primero, veamos que $\Lambda_f \in Z(\mathbb{C}G)$, el centro de $\mathbb{C}G$:

$$\begin{aligned}\Lambda_f h &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)g^{-1}h = \frac{1}{|G|}\sum_{h^{-1}gh=t\in G} f(hth^{-1})ht^{-1} \\ &= h\frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} f(t)t^{-1} = h\Lambda_f.\end{aligned}$$

Si M es irreducible, por el lema de Schur $\Lambda_f \in \mathrm{End}(M)$ actúa por un escalar, y por lo tanto actúa por 0 si y solo si su traza es 0. Veamos que $\mathrm{tr}(\Lambda_f) = 0$:

$$\mathrm{tr}(\Lambda_f) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\chi_M(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\overline{\chi_M(g)} = (\chi_M \mid f) = 0.$$

□

Hemos probado que si $M_1, \dots, M_\theta$ son representantes de las clases de isomorfismo de las representaciones irreducibles de G sobre $\mathbb{C}$, entonces $\rho_{M_1}, \dots, \rho_{M_\theta}$ son una base ortonormal del espacio de funciones centrales. Como la dimensión del espacio de funciones centrales coincide con la cantidad de clases de conjugación de G, resulta:

Proposición 13.1. *Hay tantas representaciones irreducibles como clases de conjugación.*

Así, la tabla de caracteres de un grupo es siempre cuadrada; y por último vemos que como las filas son un conjunto ortonormal, la tabla, vista como matriz, es inversible.

Ejemplicio 13.2. *Corroborar que las filas de la tabla en el ejercicio 8.1 son una base ortonormal de las funciones centrales en* $\mathrm{Fun}(\mathbb{S}_3, \mathbb{C})$ *(hay que tener en cuenta el cardinal de cada clase de conjugación).*

Ejercicio 13.3. *Encontrar las tablas de caracteres de $\mathbb{D}_4$ y $\mathbb{H}$ (mirar el ejercicio 9.2). Probar que los anillos de Grothendieck $\mathbb{C}\mathbb{D}_4$ y $\mathbb{C}\mathbb{H}$ son isomorfos. Comentario: ¡++¿*

14. Un ejemplo: las representaciones de $\mathbb{S}_4$. Como todo grupo simétrico, $\mathbb{S}_4$ tiene además de la representación trivial la representación signo. Podemos también conseguir una representación de dimensión 2 a partir de ρ, la representación de $\mathbb{S}_3$ de 4.3: dentro de $\mathbb{S}_4$ está el subgrupo de Klein, una copia de $C_2 \times C_2$, dada por la identidad y los productos de dos trasposiciones disjuntas,

$$\mathbb{S}_4 \supset K = \{1,\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

Este subgrupo es normal, y el cociente $\mathbb{S}_4/K$ es isomorfo a $\mathbb{S}_3$. Podemos calcular exactamente el isomorfismo anterior si pensamos, por ejemplo, en cómo actúa $\mathbb{S}_4$ en el conjunto de particiones

$$\big\{\ A = (\{1,2\}\{3,4\}),\ B = (\{1,3\}\{2,4\}),\ C = (\{1,4\}\{2,3\})\ \big\}$$

Entonces, por ejemplo, el elemento (1 2 4) va a parar a $(A\ B\ C)$, ya que (1 2 4) manda $\{1,2\}$ a $\{2,4\}$ y $\{3,4\}$ a $\{3,1\}$. Si hemos de calcular el caracter de esta representación, alcanza con calcular la imagen de un elemento por cada clase de conjugación. Ya calculamos la imagen de un triciclo, falta ver la imagen de una trasposición, dos trasposiciones disjuntas, y un cuatriciclo. Y vemos que $(1\ 2) \mapsto (B\ C)$, $(1\ 2)(3\ 4) \mapsto e$, $(1\ 2\ 3\ 4) \mapsto (A\ C)$. Como el morfismo $\mathbb{S}_4 \to \mathbb{S}_3$ es epi y ρ es irreducible, esta representación también lo es. Llamaremos $\tilde{\rho}$ a esta representación.

Como dijimos ayer, $\mathbb{S}_n$ tiene tantas clases de conjugación (y, a la postre, representaciones irreducibles) como particiones de n. Para $n = 4$, tenemos

$$\begin{aligned} 4 &= 1+1+1+1 \\ 4 &= 2+1+1 \\ 4 &= 2+2 \\ 4 &= 3+1 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

por lo que nos faltan dos representaciones irreducibles. Pongamos d_4 y d_5 los grados de estas representaciones. Por (1), tenemos $24 = |\mathbb{S}_4| = 1+1+4+d_4^2+d_5^2$. La única solución de esta ecuación es $d_4 = d_5 = 3$.

Tomemos ahora la acción natural de $\mathbb{S}_4$ en $\mathbb{C}^4$ cambiando las coordenadas. Es decir,

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, x_{\sigma 3}, x_{\sigma 4}).$$

Llamemos t a esta representación. Su caracter es fácil de calcular:

$$\chi_t(e) = 4, \quad \chi_t((1\ 2)) = 2, \quad \chi_t((1\ 2)(3\ 4)) = 0,$$
$$\chi_t((1\ 2\ 3)) = 1, \quad \chi_t((1\ 2\ 3\ 4)) = 0.$$

Es claro que $t = \varepsilon \oplus t_0$, donde ε es el submódulo $\{(x,x,x,x)\}$ y t_0 el submódulo $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid \sum x_i = 0\}$. Entonces $\chi_{t_0} = \chi_t - \chi_\varepsilon$, por lo que

$$\chi_{t_0}(e) = 3, \quad \chi_{t_0}((1\ 2)) = 1, \quad \chi_{t_0}((1\ 2)(3\ 4)) = -1,$$
$$\chi_{t_0}((1\ 2\ 3)) = 0, \quad \chi_{t_0}((1\ 2\ 3\ 4)) = -1.$$

Ejemplicio 14.1. *Probar que t_0 es irreducible (sale muy fácil leyendo la sección siguiente, lo divertido es hacerlo sin mirar).*

Ya tenemos una de las representaciones irreducibles que estábamos buscando. La última se puede conseguir usando el producto tensorial. En general, el producto tensorial de dos representaciones irreducibles no es necesariamente irreducible. Pero sí lo es si alguna de las dos representaciones tiene grado 1.

Ejercicio 14.2. *Probarlo.*

Podemos entonces tensorizar $t_0 \otimes \mathrm{sgn}$ y obtenemos una representación irreducible. Para ver que es distinta de las otras basta mirar su caracter. La tabla de caracteres de $\mathbb{S}_4$ queda entonces

	$1+1+1+1$	$2+1+1$	$2+2$	$3+1$	4
$\#$	1	6	3	8	6
ε	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	1	-1
$\tilde{\rho}$	2	0	2	-1	0
t_0	3	1	-1	0	-1
$t_0 \otimes \mathrm{sgn}$	3	-1	-1	0	1

(En la segunda línea se puso el cardinal de cada clase de conjugación).

Ejemplicio 14.3. *Corroborar que es una base ortonormal de las funciones centrales de $\mathbb{S}_4$.*

15. Irreducibilidad, proyectores y caracteres. Hay un criterio elemental para saber si una representación es irreducible. Ya vimos que los caracteres de representaciones irreducibles son un conjunto ortonormal. Luego, si $M = \oplus_i m_i M_i$, donde $m_i \in \mathbb{N}$ y M_i son irreducibles y distintas, se tiene

$$(\chi_M \,|\, \chi_M) = (\sum_i m_i \chi_{M_i} \,|\, \sum_j m_j \chi_{M_j}) = \sum_{i,j} m_i m_j (\chi_{M_i} \,|\, \chi_{M_j}) = \sum_i m_i^2,$$

con lo que M es irreducible si y solo si $(\chi_M \,|\, \chi_M) = 1$. En particular, esto prueba inmediatamente que la representación t_0 de la sección anterior es irreducible, ya que

$$(\chi_{t_0} \,|\, \chi_{t_0}) = \frac{1}{24}\big(3^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 6 + (-1)^2 \cdot 3 + 0^2 \cdot 8 + (-1)^2 \cdot 6\big) = 1.$$

Otra pregunta que puede responderse es ¿cuántas veces aparece la representación irreducible M_j en M? La ortonormalidad de los caracteres dice que

$$(\chi_M \,|\, \chi_{M_j}) = \sum_i m_i (\chi_{M_i} \,|\, \chi_{M_j}) = m_j,$$

con lo que la respuesta es simplemente $(\chi_M \,|\, \chi_{M_j})$. En particular, recuperamos sin usar el teorema de Wedderburn para el caso $A = \mathbb{C}G$ lo siguiente:

Proposición 15.1. *Sea $M = \mathbb{C}G$ la representación regular. Entonces $M = \oplus_i m_i M_i$ (donde las M_i son representantes de las irreducibles) con $m_i = \dim M_i$. En otras palabras, cada representación irreducible aparece en la regular tantas veces como su dimensión.*

Demostración. Basta observar que, tomando como base de $\mathbb{C}G$ al conjunto G, la matriz de la acción de $g \in G$ en $\mathbb{C}G$ es de permutación. Más aun, si $g \neq e$ se tiene $gh \neq h$, por lo que la matriz de g tiene ceros en la diagonal. Y si $g = e$, la matriz de g es la identidad de tamaño $|G|$. Así,

$$\chi_M(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e, \\ 0 & \text{si } g \neq e. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} m_i = (\chi_M \mid \chi_{M_i}) &= \frac{1}{|G|}\sum_g \overline{\chi_M(g)}\chi_{M_i}(g) \\ &= \chi_{M_i}(e) = \dim M_i. \end{aligned}$$

□

Por último, ¿cómo se calcula la proyección en las componentes isotípicas $M \to m_i M_i$? Si se toma la representación trivial ya sabemos por la sección 11 que el proyector sobre la componente correspondiente está dado por $\Lambda = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g$. Este elemento se parece notablemente al caracter de la representación trivial. Podemos tomar, como lo hicimos también en la sección 13, $\Lambda_i = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{M_i}(g)g^{-1}$. Como χ_{M_i} es central, Λ_i está en el centro de $\mathbf{k}G$:

Ejercicio 15.2. *Probar que $f : G \to \mathbf{k}$ es central sii $\sum_{g\in G} f(g)g \in Z(\mathbf{k}G)$ (la parte ($\Rightarrow$) está hecha en la sección 13).*

Luego, Λ_i actúa en cada representación por un morfismo de $\mathbf{k}G$-módulos. Veamos cómo actúa Λ_i en cada representación irreducible M_j. Por el Lema de Schur, actúa por un escalar; y por lo tanto podemos recuperar el escalar dividiendo la traza de Λ_i en M_j por la dimensión de M_j. Sea $d_j = \dim M_j$; tenemos

$$\begin{aligned} \Lambda_i|_{M_j} &= \frac{1}{d_j}\operatorname{tr}(\Lambda_i) = \frac{1}{d_j|G|}\sum_{g\in G}\chi_{M_i}(g)\operatorname{tr}(g^{-1}|_{M_j}) = \frac{1}{d_j|G|}\sum_{g\in G}\chi_{M_i}(g)\chi_{M_j}(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{d_j|G|}\sum_{g\in G}\chi_{M_i}(g)\overline{\chi_{M_j}(g)} = \frac{1}{d_j}(\chi_{M_j} \mid \chi_{M_i}) \\ &= \frac{1}{d_j}\delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Conclusión: el proyector sobre $m_i M_i$ está dado por $d_i\Lambda_i$.

Ejemplicio 15.3. *Sea en $\mathbb{C}^n$ la acción de $\mathbb{S}_n$ dada por*

$$\sigma(x_1,\dots,x_n) = (x_{\sigma 1},\dots,x_{\sigma n}).$$

Encontrar la cantidad de veces que aparecen la representación trivial y la signo en este módulo.

Ejercicio 15.4. *Encontrar la tabla de caracteres de $\mathbb{S}_5$ (se puede hacer a mano. **Sug:** considerar la representación del ej. 15.3). Más difícil: realizar las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_5$.*

16. Teorema de Burnside. Como ejemplo de la teoría de caracteres, podemos probar el teorema de Burnside:

Teorema 16.1. *Sea G un grupo finito y M una representación irreducible de G sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\dim M$ divide a $|G|$.*

Demostración. Numeramos las clases de conjugación de G y las llamamos $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_r$. Numeramos también las representaciones irreducibles de G sobre $\mathbb{C}$ y las llamamos $M_1,\dots,M_r$. Para $i = 1,\dots,r$, ponemos

$$Z_i = \sum_{g\in\mathcal{C}_i} g,$$

que está en el centro de $\mathbb{C}G$. Más aun, todo elemento del centro de $\mathbb{C}G$ se escribe como combinación lineal de los Z_i. Entonces existen enteros α_{ij}^k tales que

$$Z_i Z_j = \sum_{k=1}^r \alpha_{ij}^k Z_k \in \mathbb{C}G.$$

La entereza de los α_{ij}^k es inmediata una vez que se nota que Z_iZ_j es una combinación lineal entera (e incluso con coeficientes en $\mathbb{N}_0$) de los elementos de g.

Por otra parte, por estar Z_j en el centro y por ser M_i irreducible, el lema de Schur dice que Z_j actúa por un escalar en M_i. Llamemos $\rho_i : G \to \operatorname{End}(M_i)$ a la representación de G dada por M_i. Entonces $\rho_i(Z_j)$ es escalar. Llamamos λ_{ij} a ese escalar. Podemos calcular λ_{ij} por

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{\dim M_i} \operatorname{tr} \rho_i(Z_j) = \frac{1}{\dim M_i}\chi_i(Z_j) = \frac{\sum_{g\in\mathcal{C}_j} \chi_i(g)}{\dim M_i} = \frac{|\mathcal{C}_j|\chi_i(g_j)}{\dim M_i},$$

donde $g_j \in \mathcal{C}_j$ es un elemento cualquiera de la clase $\mathcal{C}_j$.

Miremos ahora $\rho_s(Z_iZ_j) = \rho_s(Z_i)\rho_s(Z_j)$, que es nuevamente una matriz escalar. Obtenemos

$$\lambda_{si}\lambda_{sj} = \rho_s(\sum_{k=1}^{r} \alpha_{ij}^k Z_k) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ij}^k \lambda_{sk}.$$

Si $v = (\lambda_{s1}, \dots, \lambda_{sr})^t \in \mathbb{C}^{r\times 1}$ un vector columna, y $A \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $A_{jk} = \alpha_{ij}^k$, la igualdad anterior dice $Av = \lambda_{si}v$, por lo que λ_{si} es un autovalor de A si logramos probar que $v \neq 0$. Esto último es sencillo: tomando la clase de conjugación de $e \in G$, supongamos que es Z_1, tenemos $\lambda_{s1} = \rho_s(e) = \dim M_s \neq 0$. Como $A \in \mathbb{Z}^{r\times r}$, su característico es un polinomio mónico con coeficientes enteros, y dado que λ_{si} es una raíz de este polinomio, resulta ser un entero algebraico $\forall s, i$ (recordemos que los enteros algebraicos son las raíces de polinomios mónicos con coeficientes enteros, que forman un subanillo de los complejos y que si un entero algebraico es racional, entonces es entero).

Por otra parte, $\chi_i(g_j)$ es una suma de raíces de la unidad, así que es también un entero algebraico, y entonces también lo es $\overline{\chi_i(g_j)}$. Luego,

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij}\overline{\chi_i(g_j)} = \sum_{j=1}^{r} \frac{|\mathcal{C}_j|\chi_i(g_j)\overline{\chi_i(g_j)}}{\dim M_i} = |G|\frac{(\chi_i \mid \chi_i)}{\dim M_i} = \frac{|G|}{\dim M_i}$$

es un entero algebraico. Pero también es un racional, y por lo tanto es entero. □

17. Potencias simétricas y exteriores. Dado un espacio vectorial V, notamos $V^{\otimes n} = V \otimes \cdots \otimes V$ (n veces). Dentro de $V^{\otimes n}$ viven dos subespacios importantes, definidos a continuación. El grupo simétrico $\mathbb{S}_n$ actúa en $V^{\otimes n}$ por

$$\sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma 1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma n}. \tag{6}$$

La *n-ésima potencia simétrica* de V es el subespacio de $V^{\otimes n}$ de los invariantes por esta acción. La *n-ésima potencia antisimétrica* (o *exterior*) de V es el subespacio de $V^{\otimes n}$ de los "antiinvariantes" por esta acción. Explícitamente:

$$S^n(V) = (V^{\otimes n})^{\mathbb{S}_n} = \{x \in V^{\otimes n} \mid \sigma x = x \ \forall \sigma \in \mathbb{S}_n\},$$
$$\Lambda^n(V) = \{x \in V^{\otimes n} \mid \sigma x = \operatorname{sgn}(\sigma)x \ \forall \sigma \in \mathbb{S}_n\}.$$

Ejemplicio 17.1. *Probar que si* $\operatorname{car} \mathbf{k} = 0$*, entonces*

$$S^n(V) = \operatorname{im}(\mathbf{S}), \qquad \mathbf{S} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \sigma,$$
$$\Lambda^n(V) = \operatorname{im}(\mathbf{A}), \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma.$$

Las representaciones $S^n(V)$ y $\Lambda^n(V)$, a diferencia de las que vimos antes, tienen una particularidad: no se pueden leer de la tabla de caracteres.

Ejemplicio 17.2. *Sean t_1, t_2 las representaciones irreducibles de grado 2 de $\mathbb{D}_4$ y $\mathbb{H}$ respectivamente (mirar 9.2). Probar que, pese a que las tablas de caracteres de $\mathbb{D}_4$ y $\mathbb{H}$ coinciden, $\Lambda^2(t_1)$ y $\Lambda^2(t_2)$ corresponden a "distintas filas".*

Como conclusión: a veces la tabla de caracteres no alcanza para determinar un grupo. En otros términos: el anillo de Grothendieck no da suficiente información. Si agregamos las potencias simétricas y exteriores, realmente tenemos más información.

Referencias

[1] M. Burrow, *Representation theory of finite groups.* Corrected reprint of the 1971 edition, Dover, New York, 1993.
[2] H. Cárdenas, E. Lluis, *Semisimple modules and the representation of finite groups.* Editorial F. Trillas, S. A., Mexico City, 1970.
[3] M. J. Collins, *Representations and characters of finite groups.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
[4] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Reprint of the 1962 original, Wiley, New York, 1988.
[5] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course.* Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.
[6] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Corrected reprint of the 1976 original, Dover, New York, 1994.
[7] G. James, M. Liebeck, *Representations and characters of groups.* Second edition, Cambridge Univ. Press, New York, 2001.
[8] T. Y. Lam, *Representations of finite groups: a hundred years. I.* Notices Amer. Math. Soc. **45** (1998), no. 3, 361–372.
[9] T. Y. Lam, *Representations of finite groups: a hundred years. II.* Notices Amer. Math. Soc. **45** (1998), no. 4, 465–474.
[10] M.-P. Malliavin, *Les groupes finis et leurs représentations complexes.* Masson, Paris, 1981.
[11] C. Musili, *Representations of finite groups.* Hindustan Book Agency, Delhi, 1993.
[12] P. Ribenboim, *Linear representation of finite groups.* Queen's Univ., Kingston, Ont., 1966.
[13] R. Scognamillo, *Representations of finite groups and their characters.* Scuola Norm. Sup., Pisa, 1999.
[14] J.P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann, Paris, 1978. Traducido al inglés en *Linear representations of finite groups.* Springer, New York, 1977.
[15] J.P. Serre, *Groupes finis.* `arXiv:math.GR/0503154`.
[16] S. H. Weintraub, *Representation theory of finite groups: algebra and arithmetic.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
[17] A. V. Zelevinsky, *Representations of finite classical groups.* Springer, Berlin, 1981.