Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Álgebras de Nichols y álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita

Matías Alejo Graña

Director de Tesis
Dr. Nicolás Andruskiewitsch

Tesis presentada para optar por el título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires

Enero 2000

Resumen

En la primera parte de esta tesis se estudian álgebras de Nichols cuyo espacio de elementos primitivos es un módulo de Yetter–Drinfeld sobre un grupo finito. Estas álgebras son la herramienta principal en problemas de clasificación de álgebras de Hopf punteadas, y de ahí su interés. Se prueban resultados de estructura de álgebras de Nichols, cotas inferiores para sus dimensiones en función de sus elementos primitivos, y relaciones entre las dimensiones de estas álgebras con las de determinadas subálgebras. Para probar los resultados de estructura se estudian las álgebras de operadores diferenciales cuánticos. En la segunda parte, se aplican los resultados de la primera para clasificar álgebras de Hopf punteadas. Se clasifican así las álgebras de Hopf punteadas de dimensión 32 y las corradicalmente graduadas de dimensión p^5, con p un primo impar. Se clasifican también las álgebras de Hopf punteadas de índice < 32, p y p^2, con p un primo.

Abstract

In the first part of this thesis I study Nichols algebras whose space of primitive elements is a Yetter–Drinfeld module over a finite group. These algebras are the main tool in classification problems of pointed Hopf algebras, where their interest comes from. I prove structure results for Nichols algebras, lower bounds for their dimensions in terms of their spaces of primitive elements, and relations between these dimensions and those of specific subalgebras. In order to prove the structure results I study algebras of quantum differential operators. In the second part, I apply the results of the first one to classify pointed Hopf algebras. I classify thereof the pointed Hopf algebras of dimension 32, and the coradically graded ones of dimension p^5, p being an odd prime number. I classify also pointed Hopf algebras of index < 32, p and p^2, where p is a prime number.

Palabras Clave

Álgebras de Nichols. Álgebras de Hopf punteadas. Operadores diferenciales cuánticos.

Key Words

Nichols algebras. Pointed Hopf algebras. Quantum differential operators.

Todo está muy rápido acá.
Los tigres remontaban barriletes
y la virgen pasó haciendo aladelta.
Ricardo Mollo

El tercero es el único que se dice normal.
¡Justo él, que ha vivido cuidando un empate!
Jaime Roos

Índice General

CAPíTULO 0

Introducción

0.1. Introducción

En esta tesis de doctorado se estudian las *álgebras de Nichols* y las *álgebras de Hopf punteadas*, que están íntimamente relacionadas.

El área de las álgebras de Hopf es intensamente activa en este momento. Enmarquemos históricamente la situación: estas álgebras fueron reconocidas por Hopf como las álgebras de cohomología de grupos topológicos. En este caso, a la estructura usual de álgebra graduada que tiene la cohomología, se le agrega la estructura multiplicativa del grupo, que se "dualiza" en una estructura de *coálgebra graduada.* Ambas dan lugar a una estructura de *biálgebra graduada*. La función de tomar inversos $x \mapsto x^{-1}$ del grupo se dualiza en una *antípoda*, dando así lugar a la estructura de *álgebra de Hopf graduada.* En realidad, las álgebras que resultan de esta construcción son lo que hoy día se podría llamar *super-álgebras de Hopf conmutativas y conexas*, que son un caso muy particular de lo que hoy día se llama *álgebras de Hopf trenzadas.* Con esta herramienta, se caracterizó la estructura de álgebra de las álgebras de cohomología de grupos topológicos. La invención –o axiomatización– de las álgebras de Hopf fue posterior, y estuvieron presentes en los primeros pasos matemáticos de la talla de Borel, Milnor, Moore, Cartier. Quitadas las hipótesis de graduación, conmutatividad, conexidad, los ejemplos, muchos de los cuales eran ampliamente conocidos desde hacía tiempo, comenzaron a aparecer. Los más notorios fueron las álgebras de funciones de grupos algebraicos (análogamente al caso de las álgebras de cohomología, la estructura multiplicativa del grupo se dualiza en la estrucutra de coálgebra y la inversión se dualiza en la antípoda), las álgebras envolventes de álgebras de Lie (que se pueden mirar como álgebras de operadores diferenciales, donde la estructura de coálgebra y la antípoda reflejan la estructura de las álgebras de funciones sobre las que operan), las álgebras de grupo de los grupos discretos.

Acercándose desde los grupos algebraicos, Larson y Sweedler fueron de los primeros en estudiar sistemáticamente las álgebras de Hopf. En 1969, Sweedler publicó el primer libro en el área [**Swe69**]. Allí presenta el álgebra de Hopf de menor dimensión que no es conmutativa ni coconmutativa. Esta es un álgebra de dimensión 4 y está asociada a -1 (raíz de la unidad de orden 2). Posteriormente Taft generalizó este ejemplo a álgebras de dimensión N^2 asociadas a raíces N-ésimas primitivas de la unidad, álgebras que se conocen desde entonces como "álgebras de Taft". Por mucho tiempo estos fueron los "ejemplos patológicos".

En la década del 70 y la primera mitad de los 80 la actividad en álgebras de Hopf estaba reducida a unos pocos especialistas. De esta época son los trabajos pioneros de Radford (por ejemplo [**Rad76**]), Doi y Takeuchi (por ejemplo [**Tak71**]), de Taft (por ejemplo [**Taf71**]). Parte de las preguntas que guiaron la investigación fueron diez conjeturas de Kaplansky, que se pueden encontrar en las notas de Schneider [**Sch95**].

El área virtualmente explotó con la invención, por parte de Drinfeld y Jimbo, de los grupos cuánticos. Estas son deformaciones de las álgebras envolventes de álgebras de Lie, y su misión fue la de proveer soluciones a la ecuación de Yang–Baxter, que aparece en la mecánica estadística y en la cuántica de manera independiente. El punto clave es que las categorías de módulos sobre las álgebras de Hopf son monoidales, y que ciertas álgebras de Hopf –las *cuasi-triangulares*– tienen categorías de módulos que son además trenzadas, y por lo tanto proveen gran cantidad de soluciones de la ecuación de trenzas, que es equivalente a la de Yang–Baxter. El concepto de *categorías trenzadas* era introducido simultáneamente por Joyal–Street en [**JS93**]. Si bien en trabajos pioneros de Maclane [**Mac63**], Milnor–More [**MM65**], Kac, Berezin o Kostant se consideraban super-álgebras de Hopf (y álgebras de Hopf en categorías simétricas) la introducción de las categorías trenzadas trajo consigo una nueva rama, cuyo estudio fue sugerido por Manin y encarado por vez primera por Majid: el de las *álgebras de Hopf trenzadas.*

En poco tiempo se hizo claro que tenía sentido considerar acciones de álgebras de Hopf sobre distintos objetos. En 1993, Montgomery publicó su libro "Hopf algebras and their actions on rings" [**Mon93**], que destacaba este punto de vista y se convirtió en referencia insoslayable. También de esta etapa es la idea de usar las álgebras de Hopf para proveer invariantes de nudos y de variedades tridimensionales.

El trabajo más profundo y técnicamente más cuidado en grupos cuánticos es el libro de Lusztig [**Lus93**]. En su presentación los grupos cuánticos dependen de un parámetro q, que cuando se lo especializa en un elemento inversible del cuerpo base que no es una raíz de la unidad hace la teoría similar a la de las álgebras de Lie semisimples. Cuando, en cambio, q es una raíz de la unidad, la situación es más complicada. Surgen así los actualmente conocidos como *núcleos* *de Frobenius–Lusztig*, que proveen ejemplos de álgebras de Hopf de dimensión finita que no son conmutativas ni coconmutativas. Las álgebras de Taft son ahora los ejemplos más sencillos de una teoría mucho más rica. Pero la teoría se puede enriquecer aun más cuando se observa que las álgebras que aparecen de esta forma son *punteadas* (noción dual a la de *básicas*). Luego, es interesante, y a la vez no trivial, el estudio de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita. Este estudio fue encarado de manera independiente por diversos investigadores y con diversas líneas de ataque. En virtud de los resultados obtenidos hasta el momento, la más fuerte parece ser el llamado *procedimiento del levante*, (ver el capítulo 5) que fue propuesto en [**AS98b**]. Parte de este procedimiento está presente, en un estado embrionario, en la tesis de doctorado de Nichols [**Nic78**], quien fue capaz de dar numerosos ejemplos de álgebras de Hopf punteadas y, entre otras cosas, clasificar las álgebras de Hopf con corradical $\mathbf{k}C_2$ (el grupo cíclico de orden 2).

El procedimiento del levante comienza por clasificar álgebras de Hopf trenzadas, corradicalmente graduadas, *conexas* (en grado 0 coinciden con $\mathbf{k}$) y generadas por sus elementos primitivos. Estas álgebras fueron bautizadas por *álgebras de Nichols*. Cuando un álgebra de Nichols vive en una categoría de Yetter–Drinfeld sobre un álgebra de grupo, al bosonizarla deviene un álgebra de Hopf punteada. Más aun, todo módulo de Yetter–Drinfeld (y en general, todo *Par Trenzado Rígido*, como se define en 2.1.4) da lugar a un álgebra de Nichols, pero no es sencillo calcular en general su dimensión, ni menos aun su estructura. Una primera meta, entonces, en un programa de clasificación de las álgebras de Hopf punteadas es, dado un grupo finito Γ, tener un algoritmo que describa, para cada módulo de YD sobre un álgebra $\mathbf{k}\Gamma$, el álgebra de Nichols generada por él. Hasta el momento hay sólo respuestas parciales a esta pregunta, y la teoría se divide en dos ramas, según si Γ es abeliano o no.

La herramienta principal en el caso abeliano son los núcleos de Frobenius–Lusztig. En [**Mül98b**] se encuentra la filtración corradical de los núcleos de F–L y se prueba que las partes positivas y negativas (o subálgebras de Borel) son álgebras de Nichols. Aunque éstos están lejos de abarcar todos los ejemplos, en [**ASa**] se encuentra una condición para que un álgebra de Nichols una vez bosonizada se pueda deformar, mediante un 2-cociclo, en la parte positiva de un núcleo de F–L. Esto permite clasificar en numerosos casos las álgebras de Nichols de determinadas dimensiones, o sobre determinados grupos. Es así como se clasificaron las álgebras de Hopf punteadas (sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0) de dimensión p^2, p^3, p^4 donde p es un primo impar (esto se hizo en [**AS98a**], [**AS98b**] y [**AS99**] –aquí conviene notar que para p^3 el mismo resultado se encontró independientemente en [**ŞvO98**] y [**CD98**]–). El caso p^4 demostró que era falsa la décima conjetura de Kaplansky ("sobre un cuerpo algebraicamente cerrado las álgebras de Hopf de una dimensión determinada son finitas módulo isomorfismo"), y también aquí conviene notar que esto fue demostrado independientemente en [**Gel98**] y [**BDG99**].

El caso no abeliano, por el contrario, permaneció inexplorado por mucho tiempo. Un primer paso en este sentido fue dado en un trabajo de Milinski y Schneider [**MS96**]. Allí se estudiaron ejemplos de álgebras de Nichols sobre grupos de Coxeter, y en particular se probó que tres de ellos eran de dimensión finita, pero no se avanzó sobre otros tipos de grupos. El propósito central de esta tesis fue entonces estudiar las álgebras de Nichols sobre grupos no abelianos. Este estudio no fue concluido, en el sentido de que todavía no se conoce el algoritmo que calcule las álgebras de Nichols sobre grupos, ni siquiera para grupos abelianos. Los avances en este sentido, sin embargo, permiten ser optimistas y pensar que en pocos años éste será un problema resuelto. Los avances que se hacen en esta tesis se explican en el siguiente resumen.

En el capítulo 1 se estudian las nociones básicas de las categorías trenzadas y su ejemplo más importante: las categorías de Yetter–Drinfeld. Se definen y presentan primeras propiedades de las álgebras de Hopf trenzadas. Este capítulo es esencialmente introductorio y sus resultados no son nuevos.

En el capítulo 2 se definen las álgebras de Nichols y se dan numerosos ejemplos. Uno de estos ejemplos son los *Espacios Lineales Cuánticos*, que fueron considerados en varios lugares, y bajo varios nombres, en la literatura. De esta parte, el único resultado nuevo es una tercera forma de presentar las álgebras de Nichols como cociente de las álgebras tensoriales por el radical de una forma bilineal. Esta construcción está inspirada en Lusztig y fue publicada en [**AG99**]. Los resultados nuevos en el resto del capítulo son los de las secciones 2.5 y 2.6, donde se generalizan los Espacios Lineales Cuánticos y las relaciones cuánticas de Serre. Luego se re-definen derivaciones en las álgebras de Nichols, aunque esta herramienta se debe al propio Nichols en [**Nic78**].

El resto de la tesis son resultados propios. En el capítulo 3 se le saca provecho a las derivaciones. Allí se define el álgebra de *operadores diferenciales cuánticos* y se prueba un teorema de libertad para las álgebras de Nichols sobre ciertas subálgebras, también de Nichols. Este resultado permitirá más adelante clasificar álgebras de Nichols con dimensiones particulares. Vale la pena aclarar que para el caso abeliano existen en la literatura versiones de álgebras de operadores diferenciales cuánticos similares a las que se tratan aquí.

En el capítulo 4 se usa el teorema del capítulo anterior para encontrar cotas sobre el *rango* (la dimensión de su espacio de elementos primitivos) de un álgebra de Nichols en función de su dimensión. Por otra parte, se encuentran todos las clases de isomorfismo de módulos de dimensiones 2, 3 y 4 que viven en categorías de YD sobre grupos finitos (para generalizar este estudio se presenta una nueva teoría de homología para conjuntos con una operación binaria particular, en la que la ecuación de trenzas se convierte en una condición de 2-cociclo). Esto se usa para clasificar las álgebras de Nichols sobre grupos finitos de dimensiones p, p^2, p^3, y de dimensión < 32. También se encuentran condiciones sobre álgebras de Nichols sobre grupos no abelianos para que sean de dimensión finita. Esto prueba que los ejemplos no abelianos de dimensión finita son más bien excepcionales y permite cierto optimismo con respecto al estudio de las álgebras de Hopf punteadas.

En el capítulo 5 se usan los resultados anteriores en problemas de clasificación de álgebras de Hopf punteadas. Es así como se clasifican las álgebras de Hopf punteadas corradicalmente graduadas de dimensión p^5 (p un primo impar), y se prueba que la clasificación de las de dimensión p^6 se puede efectuar con las mismas ideas. Se clasifican también las álgebras de Hopf punteadas de dimensión 32, resultando ésta la menor dimensión conocida hasta ahora en que la décima conjetura de Kaplansky falla. Se clasifican asímismo las álgebras de Hopf punteadas con *índice* (el cociente entre la dimensión del álgebra y la del corradical) p, p^2.

En el capítulo 6 se sugiere una generalización a un trabajo no publicado de Kapranov [**Kap96**] sobre N-homología. Esta generalización es simplemente considerar módulos sobre álgebras de Nichols. Se define el concepto de homotopía y de contractibilidad fuerte, y se re-prueban resultados del capítulo 3 en este nuevo lenguaje homológico. Se termina el capítulo con las preguntas sin resolver.

Se termina la introducción observando que si se pusiera ésta en un programa de traducción al latín moderno, quedaría algo como lo que sigue:

0.2. Introduction

In this thesis I study *Nichols algebras* and *pointed Hopf algebras*, which are closely related.

The area of Hopf algebras is widely active at this moment. Let us put the situation in an historic frame: these algebras were recognized by Hopf as the cohomology algebras of topological groups. In this case, to the usual graded algebra structure one adds the multiplicative structure of the group, which dualizes into a *graded coalgebra* structure. Both together result in a *graded bialgebra* structure. The mapping $x \mapsto x^{-1}$ of the group dualizes into an *antipode*, resulting in a *graded Hopf algebra.* Actually, the algebras arising in this way could be called *connected and commutative super-Hopf algebras*, which are a particular case of what nowadays is known as *braided Hopf algebras.* With this tool, the algebra structure of cohomology algebras of topological groups was characterized. The invention –or axiomatization– of Hopf algebras came later, and so strong mathematicians as Borel, Milnor, Moore or Cartier were present in the first steps. The hypotheses of graduation, commutativity and connectedness removed, the examples, most of which were very well known, began to appear. The most notorious were algebras of functions over algebraic groups (analogously to the case of cohomology algebras, the multiplicative structure of the group dualizes into a coalgebra structure and the mapping $x \mapsto x^{-1}$ dualizes into an antipode), the enveloping algebras of Lie algebras (which can be regarded as differential operator algebras, where the coalgebra structure and antipode reflect the structure of those algebras on which they operate), the group algebras of discrete groups.

Coming from algebraic groups, Larson and Sweedler were among the first who studied systematically Hopf algebras. In 1969, Sweedler published the first book in the area [**Swe69**]. He presented there the lowest dimensional Hopf algebra which is neither commutative nor cocommutative. This is a 4-dimensional algebra, associated to -1 (as a second root of unity). Then, Taft generalized this example to N^2-dimensional algebras associated to N-th roots of unity, which are known since then as "Taft algebras." These were the "pathologic examples" for a long while.

In the 70's and the first half of the 80's the activity were confined to a few specialists. From these days are the pioneering works of Radford (e.g. [**Rad76**]), Doi and Takeuchi (e.g. [**Tak71**]), Taft (e.g. [**Taf71**]). Some of the guiding questions were ten conjectures of Kaplansky, which can be found for instance in [**Sch95**]. The area virtually exploded since the invention of quantum groups, due to Drinfeld and Jimbo. These are deformations of enveloping algebras of Lie algebras, and their mission were to provide solutions of the Yang–Baxter Equation, which appears independently in statistical mechanics and quantum mechanics. The key point is that module categories over Hopf algebras are monoidal, and that certain Hopf algebras –e.g. *quasi-triangular* ones– have module categories which are braided, whence they provide a wide variety of solutions to the Braid Equation, which is equivalent to the Yang–Baxter Equation. The concept of *braided categories* were introduced at the same time by Joyal–Street in [**JS93**]. Whereas in pioneering works by Maclane [**Mac63**], Milnor–More [**MM65**], Kac, Berezin or Kostant super-Hopf algebras (and Hopf algebras in symmetric categories) were considered, the introduction of braided categories opened a new branch, whose study was suggested by Manin and faced for the first time by Majid: that of *braided Hopf algebras*.

In a short while, it became clear that it was interesting to consider Hopf algebra actions on some objects. In 1993, Montgomery published her book “Hopf algebras and their actions on rings” [**Mon93**], which emphasized this point of view and is nowadays an unavoidable reference. Also from this period is the idea of using Hopf algebras to provide invariants of knots and 3-manifolds.

The most profound and technically cared work on quantum groups is Lusztig's book [**Lus93**]. In his presentation, quantum groups depend on a parameter q, which, when specialized at an invertible element of $\mathbf{k}$ which is not a root of unity, makes theory very similar to that of semisimple Lie algebras. When, instead, q is specialized at a root of unity, the situation is more difficult. In this way appear Frobenius–Lusztig kernels, which are examples of non-commutative non-cocommutative finite dimensional Hopf algebras. Taft algebras are now the simplest examples of a much richer theory. But the theory can be enriched even more when observed that Hopf algebras arising in this way are *pointed* (a notion dual to that of being *basic*). Then it is interesting, and at the same time non trivial, to study finite dimensional pointed Hopf algebras. This study has been faced independently by many researchers with many lines of attack. The strongest one, considering the obtained results, seems to be the so called *Lifting Procedure*, proposed in [**AS98b**]. Part of this Procedure is present in an embryonic state in Nichols doctorate thesis [**Nic78**]. He presented many examples of new pointed Hopf algebras and, among other things, classified Hopf algebras with coradical $\mathbf{k}C_2$ (the group of order 2).

The first step of the Lifting Procedure is to classify braided Hopf algebras which are coradically graded, *connected* (their degree 0 component is $\mathbf{k}$) and generated by their primitive elements. These algebras were baptized as *Nichols algebras*. When a Nichols algebra lies in a Yetter–Drinfeld category over a group algebra, it becomes a pointed Hopf algebra after bosonization. Furthermore, every Yetter–Drinfeld module (and in general every *Closable Braided Pair*, as defined in 2.1.4) gives rise to a Nichols algebra, but it is not easy to compute its dimension, nor its structure. Therefore, a first goal in a classification program of pointed Hopf algebras is, given a finite group Γ, to have an algorithm describing, for each YD-module over the algebra $\mathbf{k}\Gamma$, the Nichols algebra generated by it.

Up to this moment, we have only partial answers to this question and the theory divides in two branches, depending whether Γ is abelian or not.

The main tool in the abelian case are Frobenius–Lusztig kernels. In [**Mül98b**] the coradical filtration of F–L kernels is computed and it is proved that their positive and negative parts (or Borel subalgebras) are Nichols algebras. Though these are far away from being all the examples, in [**ASa**] there is a condition for a Nichols algebra to be able to be deformed, when bosonized, into the positive part of a F–L kernel by means of a 2-cocycle. This allows in several cases to classify Nichols algebras of a given dimension, or over a given group. In this way pointed Hopf algebras of dimensions p^2, p^3, p^4 were classified (where p is an odd prime number and $\mathbf{k}$ is algebraically closed of characteristic 0). This has been done in [**AS98a**], [**AS98b**] and [**AS99**] (it is worth noting that for p^3 the same result was obtained independently in [**ŞvO98**] and [**CD98**]). The p^4 case showed that the tenth Kaplansky conjecture ("there is a finite number of isomorphism classes of Hopf algebras of a given dimension over an algebraically closed field") was false. It is also worth noting that this result was obtained also independently in [**Gel98**] and [**BDG99**].

The non-abelian case remain unexplored for a long while. A first step in this direction was done in a work by Milinski and Schneider [**MS96**]. They study there examples of Nichols algebras over Coxeter groups, and in particular they find three finite dimensional examples. The main intention in this thesis is to study Nichols algebras over non-abelian groups. This study is still unfinished, since we have not yet the above mentioned algorithm (nor we have it yet for abelian groups). The advances in this direction, however, allow to be optimistic and to think that this will be a solved problem in few years. The advances made in this thesis are explained in the following résumé.

In chapter 1 the basic notions of braided categories are studied. Braided Hopf algebras are defined and we study their first properties. This chapter is essentially introductory and the results there are not new.

In chapter 2 are defined Nichols algebras and several examples are given. One of these examples is that of *Quantum Linear Spaces*, which were considered widely in the literature under several names. In this part there is only one new result, which is a third form to present Nichols algebras as the quotient of tensor algebras by the radical of certain bilinear form. This construction is inspired in Lusztig and has been published in [**AG99**]. The new results in the rest of the chapter are those of sections 2.5 and 2.6, where Quantum Linear Spaces and quantum Serre relations are generalized. We then define derivations for Nichols algebras, though this is a tool due to Nichols in [**Nic78**].

The rest of the thesis is made up on new results. In chapter 3 we take profit of derivations. We define there the algebra of *quantum differential operators* and prove a freeness theorem for Nichols algebras over certain Nichols subalgebras. This result shall allow to classify Nichols algebras of particular dimensions. It is worth noting that similar versions of quantum differential operators algebras appear in the literature for the abelian case.

In chapter 4 we use the theorem above to find bounds on the *rank* (the dimension of its space of primitive elements) of a Nichols algebra in terms of its dimension. On the other hand, we find all isomorphism classes of YD-modules over finite groups of dimensions 2, 3 and 4 (in order to generalize this study we present a new homology theory for sets with a particular binary operation, in which the Braid Equation turns into a 2-cocycle condition). This is used to classify Nichols algebras over finite groups of dimensions p, p^2 and p^3 and of dimension < 32. We also find necessary conditions on Nichols algebras over finite groups for them to be finite dimensional. This shows that non-abelian finite dimensional examples are rather exceptional.

In chapter 5 the previous results are applied to classification problems of pointed Hopf algebras. We classify coradically graded pointed Hopf algebras of dimension p^5 (p an odd prime number) and it is shown that the classification of p^6-dimensional ones can be done with the same ideas. We classify also pointed Hopf algebras of dimension 32, which is up to now the lowest dimension in which the tenth Kaplansky conjecture is known to fail. We classify as well pointed Hopf algebras with *index* (ratio between the dimension of the algebra and that of its coradical) p and p^2.

In chapter 6 we suggest a generalization of an unpublished work of Kapranov [**Kap96**] on N-homology. This generalization consists simply in considering modules over Nichols algebras. We define there what homotopies and strong contractibility are, and we re-prove the freeness results of chapter 3 in this new homological language. We end up the chapter with a list of open questions.

0.3. Notación

En general $\mathbf{k}$ será un cuerpo, H un álgebra de Hopf cualquiera, A un álgebra de Hopf punteada (sus subcoálgebras simples son de dimensión 1, ver 2.8). Los productos tensoriales y homs se toman sobre $\mathbf{k}$ salvo mención explícita. Si H es de Hopf,

$$
\begin{aligned}
G(H) &= \text{group-likes de } H = \{g \in H - \{0\} \mid \Delta(g) = g \otimes g\},\\
\mathcal{P}(H) &= \text{primitivos de } H = \{x \in H \mid \Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1\},\\
\mathcal{P}_{g,h}(H) &= \text{skew-primitivos de } H\\
&= \{x \in H \mid \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes h\}(g, h \in G(H)).
\end{aligned}
$$

Para coálgebras usaremos la notación de Sweedler sin el símbolo de sumatoria:

$$\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}.$$

Si A es punteada, $\mathbf{k}G(A)$ es el corradical de A. La característica de $\mathbf{k}$, $\operatorname{car}\mathbf{k}$, nunca dividirá la dimensión de los grupos o álgebras consideradas. A veces esto será dicho de manera explícita, a veces simplemente se lo dará por supuesto. En particular, las álgebras de grupo $\mathbf{k}\Gamma$ serán siempre semisimples si Γ es finito.

Si H es un álgebra de Hopf, ${}_H\mathcal{M}$ es la categoría de módulos sobre H a izquierda y ${}^H\mathcal{M}$ la de comódulos sobre H a izquierda. Análogamente, $\mathcal{M}_H$ y $\mathcal{M}^H$ son las categorías a derecha.

Con $\tau : V \otimes W \to W \otimes V$ denotaremos la trasposición usual

$$\tau(v \otimes w) = w \otimes v.$$

Con C_N denotaremos el grupo cíclico de N elementos y lo escribiremos multiplicativamente.

0.4. Agradecimientos

Agradezco a Sonia Natale e Igor Andruskiewitsch por su cordial hospitalidad durante 4 y 3 años respectivamente. A Sonia además le agradezco numerosas charlas sobre presentes y futuros. Lo mismo le agradezco a Andrés Abella. Le agradezco a Hans Schneider los cursos que dio en la FaMAF y las discusiones matemáticas sobre sus trabajos y los míos. Le agradezco especialmente, por lo académico y lo personal, a Nicolás Andruskiewitsch. Sin sus -a veces persistentes- puntos de vista,[1] hoy sería otro como matemático y por ende otro como persona.

En otro orden de cosas, le agradezco a once profesionales que, a diferencia de lo que sucedió con mi tesis de licenciatura, esta vez me dieron el tiempo libre como para dedicarme a la matemática. Le agradezco, por encima de todo, por quitarme ese tiempo libre, ordenarlo y devolvérmelo, a Mónica Lamas. Sin ella, hoy sería otro como persona, y por ende otro como matemático.

[1] Nicolás sugirió persistentemente que quitara el "a veces"

CAPíTULO 1

Categorías trenzadas

1.1. Definiciones generales

Para un tratamiento profundo sobre categorías trenzadas puede consultarse [**JS93**]. Aquí presentaremos las definiciones básicas.

1.1.1. Definición. Una *categoría monoidal* es una categoría $\mathcal{C}$ con un funtor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ (llamado *producto tensorial*), un objeto $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ (llamado *unidad*) e isomorfismos naturales

$$\begin{aligned} &a_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W) && \text{(asociatividad)},\\ &r_V : V \otimes \mathbf{1} \to V, \qquad l_V : \mathbf{1} \otimes V \to V && \text{(unidad)}, \end{aligned}$$

tales que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & ((U \otimes V) \otimes W) \otimes X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(U \otimes V) \otimes (W \otimes X) \arrow[ddr] & & (U \otimes (V \otimes W)) \otimes X \arrow[d] \\
 & & U \otimes ((V \otimes W) \otimes X) \arrow[dl] \\
 & U \otimes (V \otimes (W \otimes X)) &
\end{tikzcd}$$

y tales que

$$V \otimes W \xrightarrow{r_V^{-1} \otimes \mathrm{id}_W} (V \otimes \mathbf{1}) \otimes W \to V \otimes (\mathbf{1} \otimes W) \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes l_W} V \otimes W = \mathrm{id}_{V \otimes W}\,.$$

Los ejemplos abundan. Si $\mathbf{k}$ es un cuerpo, la categoría de espacios vectoriales sobre $\mathbf{k}$, que denotaremos por $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$, es una categoría monoidal con el producto tensorial usual sobre $\mathbf{k}$. Si H es una biálgebra, ${}_H\mathcal{M}$ es una categoría monoidal: si $M, N \in {}_H\mathcal{M}$, como espacio vectorial el producto $M \otimes N$ coincide con el producto tensorial usual, y la estructura de H-módulo está dada por

$$h(m \otimes n) = h_{(1)}m \otimes h_{(2)}n.$$

Este ejemplo se puede generalizar un poco si se relaja la condición de coasociatividad de H, dando lugar a la noción de *quasi-biálgebra*. Una quasi-biálgebra es un álgebra (H, m) con morfismos de álgebras $\Delta : H \to H \otimes H$ y $\varepsilon : H \to \mathbf{k}$ y un elemento inversible $\Phi \in H \otimes H \otimes H$ tales que

1. $(\varepsilon \otimes 1)\Delta = \mathrm{id} = (1 \otimes \varepsilon)\Delta$,
2. $\Phi_{1,2,34}\Phi_{12,3,4} = \Phi_{2,3,4}\Phi_{1,23,4}\Phi_{1,2,3}$
   (donde, por ejemplo, $\Phi_{1,23,4} = (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Phi)$),
3. $(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta = \Phi(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta\Phi^{-1}$
   (esto es, Δ es quasi-coasociativa y Φ es el parámetro de deformación), y
4. $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Phi) = 1 \otimes 1$.

El morfismo natural $a_{U,V,W}$ es entonces la multiplicación por Φ.

Es importante tener una definición general de funtor entre categorías monoidales que permita "trasladar" las construcciones de una categoría a otra.

1.1.2. Definición. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ dos categorías monoidales. Un *funtor monoidal* (también llamado *coherente*) entre las categorías es un par (F, ϕ) tal que

1. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es un funtor y ϕ es un isomorfismo natural entre $\otimes_{\mathcal{C}'} \circ (F \times F)$ y $F \circ \otimes_{\mathcal{C}}$, es decir que para todo par de morfismos $f : M \to M'$, $g : N \to N'$, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} FM \otimes FN \arrow[r, "\phi_{M,N}"] \arrow[d, "Ff\otimes Fg"'] & F(M \otimes N) \arrow[d, "F(f\otimes g)"] \\ FM' \otimes FN' \arrow[r, "\phi_{M',N'}"] & F(M' \otimes N'). \end{tikzcd}$$

2. Para todos los objetos $M, N, P \in \mathcal{C}$ conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} FM \otimes FN \otimes FP \arrow[r, "\phi_{M,N}\otimes \mathrm{id}_{FP}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{FM}\otimes\phi_{N,P}"'] & F(M \otimes N) \otimes FP \arrow[d, "\phi_{M\otimes N,P}"] \\ FM \otimes F(N \otimes P) \arrow[r, "\phi_{M,N\otimes P}"] & F(M \otimes N \otimes P). \end{tikzcd} \tag{1.1.3}$$

3. Se verifica que

$$F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$$

$$\mathbf{1} \otimes FM \xrightarrow{l_{FM}} FM = \mathbf{1} \otimes FM \xrightarrow{\phi} F(\mathbf{1} \otimes M) \xrightarrow{F(l_M)} FM,$$

$$FM \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{r_{FM}} FM = FM \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\phi} F(M \otimes \mathbf{1}) \xrightarrow{F(r_M)} FM.$$

Las categorías monoidales que se considerarán en esta tesis son aquéllas que poseen una trenza:

1.1.4. DEFINICIÓN. Una *categoría monoidal trenzada* (o simplemente *categoría trenzada*) es una categoría monoidal $\mathcal{C}$ e isomorfismos naturales

$$c = c_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M$$

(llamados *trenzas*) tales que

$$c_{M,N\otimes P} = (\mathrm{id}_N \otimes c_{M,P}) \circ (c_{M,N} \otimes \mathrm{id}_P), \tag{1.1.5}$$

$$c_{M\otimes N,P} = (c_{M,P} \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\mathrm{id}_M \otimes c_{N,P}). \tag{1.1.6}$$

Se dice que $\mathcal{C}$ es *simétrica* si $c^2 = \mathrm{id}$, es decir, si para todos los objetos $M, N \in \mathcal{C}$ se verifica que $c_{N,M} c_{M,N} = \mathrm{id}_{M\otimes N}$.

Es fácil ver que tomando $\bar{c}_{M,N} = (c_{N,M})^{-1}$ se tiene un isomorfismo natural que también verifica (1.1.5) y (1.1.6). Denotaremos $\overline{\mathcal{C}}$ la categoría cuyos objetos, morfismos y estructura monoidal son los de $\mathcal{C}$ pero cuya trenza es $\bar{c}$.

Si bien la mayoría de las categorías monoidales tienen una estructura de categoría simétrica (por ejemplo, en la categoría $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ se puede tomar la trasposición $\tau : V \otimes W \to W \otimes V,\ v \otimes w \mapsto w \otimes v$), se usarán principalmente categorías trenzadas no simétricas. El ejemplo principal en esta tesis es el de la categoría de Yetter–Drinfeld sobre un álgebra de Hopf, cuya definición será pospuesta unos párrafos.

Es necesario tener también una definición suficientemente general de funtor entre categorías trenzadas.

1.1.7. DEFINICIÓN. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ categorías trenzadas. Un *funtor trenzado* entre ellas es un funtor monoidal (F, ϕ) tal que para todos los objetos $M, N \in \mathcal{C}$ conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} FM \otimes FN & \xrightarrow{c_{FM,FN}} & FN \otimes FM \\ {\scriptstyle \phi_{M,N}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{N,M}} \\ F(M \otimes N) & \xrightarrow{F(c_{M,N})} & F(N \otimes M). \end{array} \tag{1.1.8}$$

1.1.9. OBSERVACIÓN. Una identidad útil que es válida en toda categoría trenzada es $lc = r$, y análogamente $rc = l$, esto es,

$$(M \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{c_{M,\mathbf{1}}} \mathbf{1} \otimes M \xrightarrow{l_M} M) = (M \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{r_M} M).$$
$$(\mathbf{1} \otimes M \xrightarrow{c_{\mathbf{1},M}} M \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{r_M} M) = (\mathbf{1} \otimes M \xrightarrow{l_M} M).$$

Otra identidad particularmente importante es

(1.1.10)

$$(c_{N,P} \otimes \mathrm{id}_M)(\mathrm{id}_N \otimes c_{M,P})(c_{M,N} \otimes \mathrm{id}_P) = (\mathrm{id}_P \otimes c_{M,N})(c_{M,P} \otimes \mathrm{id}_N)(\mathrm{id}_M \otimes c_{N,P}).$$

Esta igualdad se conoce como *ecuación de trenzas*, especialmente en el caso $M = N = P$. El nombre se explicará con las Figuras 1.1.A y 1.1.B. Otra manera de escribir esta igualdad es $c_{12}c_{23}c_{12} = c_{23}c_{12}c_{23}$, donde los subíndices de c indican en qué componentes de un producto tensorial actúa, es decir,

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c) \ \in \ \mathrm{Aut}(M \otimes M \otimes M).$$

Otro ejemplo históricamente importante (dado que fue el que a partir de los trabajos de Drinfeld [**Dri86**] atrajo el interés de numerosos matemáticos y físicos teóricos a las álgebras de Hopf) es el de la categoría de módulos de un álgebra de Hopf quasi-triangular. Brevemente, un par $(H, \mathcal{R})$ se dice *álgebra de Hopf quasi-triangular* (o QT) si $\mathcal{R} \in H \otimes H$ es inversible (con el producto de $H \otimes H$ dado por $(a \otimes b) \otimes (c \otimes d) \mapsto ac \otimes bd$) y tal que

$$\forall h \in H,\ \Delta^{\mathrm{op}}(h) = \mathcal{R}\Delta(h)\mathcal{R}^{-1}, \quad (\text{como de costumbre, } \Delta^{\mathrm{op}} = \tau\Delta) \tag{1.1.11}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{12}, \tag{1.1.12}$$

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{23}. \tag{1.1.13}$$

Aquí suponemos que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2$ (omitimos el símbolo de suma) y denotamos $\mathcal{R}^{12} = \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2 \otimes 1$, $\mathcal{R}^{13} = \mathcal{R}_1 \otimes 1 \otimes \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}^{23} = 1 \otimes \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2$. Tomando en ${}_H\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_H$ respectivamente las trenzas

$$\begin{aligned} c_{M,N}(m \otimes n) &= \mathcal{R}_2 n \otimes \mathcal{R}_1 m && \text{módulos a izquierda,} \\ c_{M,N}(m \otimes n) &= n\mathcal{R}_1 \otimes m\mathcal{R}_2 && \text{módulos a derecha,} \end{aligned}$$

ambas categorías resultan ser trenzadas. También se puede restringir el ejemplo a ${}_H\mathcal{M}^f$ y $\mathcal{M}_H^f$, las categorías de los módulos sobre H que tienen dimensión finita (sobre $\mathbf{k}$). El par $(H, \mathcal{R})$ se dice *triangular* si $\mathcal{R}^{-1} = \tau\mathcal{R}$, en cuyo caso las categorías anteriores son simétricas. La condición (1.1.11) es la que garantiza que $c_{M,N}$ sea un morfismo de H-módulos para todos los M, N. Las condiciones (1.1.12) y (1.1.13) son respectivamente equivalentes a (1.1.5) y (1.1.6) en el caso de módulos a izquierda, y a (1.1.6) y (1.1.5) en el caso de módulos a derecha. La noción de álgebra QT se dualiza y da la noción de *álgebra de Hopf co-quasi-triangular*, en la que el elemento $\mathcal{R}$ se reemplaza por un morfismo $H \otimes H \to \mathbf{k}$. Ambas definiciones se pueden también generalizar al caso de quasi-biálgebras.

En las categorías monoidales se puede dar una noción de dualidad, como sigue:

1.1.14. Definición. Un objeto M de una categoría monoidal $\mathcal{C}$ se dice *rígido* si existen dos objetos ${}^*M$ y M^* en $\mathcal{C}$ y morfismos

$$br_M : \mathbf{1} \to M \otimes M^*,$$
$$bl_M : \mathbf{1} \to {}^*M \otimes M,$$
$$dr_M : M^* \otimes M \to \mathbf{1},$$
$$dl_M : M \otimes {}^*M \to \mathbf{1},$$

tales que

$$\begin{aligned}
&M \xrightarrow{r^{-1}} M \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes bl} M \otimes {}^*M \otimes M \xrightarrow{dl \otimes \mathrm{id}} \mathbf{1} \otimes M \xrightarrow{l} M = \mathrm{id}_M,\\
&M \xrightarrow{l^{-1}} \mathbf{1} \otimes M \xrightarrow{br \otimes \mathrm{id}} M \otimes M^* \otimes M \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes dr} M \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{r} M = \mathrm{id}_M,\\
&{}^*M \xrightarrow{l^{-1}} \mathbf{1} \otimes {}^*M \xrightarrow{bl \otimes \mathrm{id}} {}^*M \otimes M \otimes {}^*M \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes dl} {}^*M \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{r} {}^*M = \mathrm{id}_{{}^*M},\\
&{}^*M \xrightarrow{r^{-1}} {}^*M \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes br} M^* \otimes M \otimes M^* \xrightarrow{dr \otimes \mathrm{id}} \mathbf{1} \otimes M^* \xrightarrow{l} M^* = \mathrm{id}_{M^*}.
\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

Los objetos ${}^*M$ y M^* se llaman respectivamente *dual a izquierda* y *dual a derecha* de M. Una cuenta típica de diagramas conmutativos prueba que los duales son únicos módulo un isomorfismo que conmuta con br y dr, ó bl y dl.

Una categoría monoidal $\mathcal{C}$ se dice *rígida* si hay dos funtores $M \mapsto {}^*M$ y $M \mapsto M^*$ y morfismos naturales br, bl, dr, dl que hacen de ${}^*M$ y M^* los duales a izquierda y derecha de M para todo $M \in \mathcal{C}$.

1.1.16. Observación. Algunos autores (v.g. Takeuchi en [**Tak99a**]) definen *dual* de manera más general: un objeto M tiene un dual a derecha M^* si existe $dr : M^* \otimes M \to \mathbf{1}$ con la propiedad universal de que para todo objeto $X \in \mathcal{C}$ y todo morfismo $f : X \otimes M \to \mathbf{1}$, existe un único morfismo $F : X \to M^*$ tal que $f = \left(X \otimes M \xrightarrow{F \otimes \mathrm{id}} M^* \otimes M \xrightarrow{dr} \mathbf{1}\right)$. A un objeto rígido lo llaman *finito*, terminología que resulta consistente con los casos usuales: si H es un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva todo módulo en ${}_H\mathcal{M}$ tiene dual en este sentido general, pero es rígido si y sólo si es de dimensión finita (la hipótesis de la biyectividad de la antípoda no es necesaria para la definición de M^*, sino para la de ${}^*M$). Lo mismo sucede en ${}^H\mathcal{M}$ si H es de dimensión finita (ya que en este caso ${}^H\mathcal{M}$ es equivalente a $\mathcal{M}_{H^*}$).

Como en esta tesis se pondrá el énfasis en objetos de dimensión finita, para el caso en que sólo existan M^* y dr con la propiedad universal mencionada, se dirá que M *tiene un dual en el sentido de 1.1.16.*

Una herramienta importante para trabajar con categorías trenzadas son los dibujos. Es ya costumbre dibujar la trenza $c_{M,N}$ como un cruce en el que M pasa por encima de N y la trenza $\bar{c}_{M,N}$ como un cruce en el que N pasa por encima de M (ver la Figura 1.1.A). Algunos autores (v.g. Takeuchi) dibujan la trenza al revés: dibujan c como aquí se dibuja $\bar{c}$ y $\bar{c}$ como aquí se dibuja c.

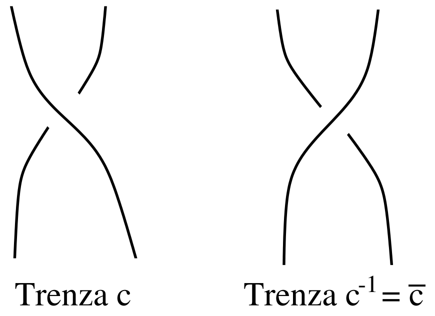

FIGURA 1.1.A. Dibujo de trenzas.

De esta manera, la ecuación (1.1.10) se dibuja como en la Figura 1.1.B

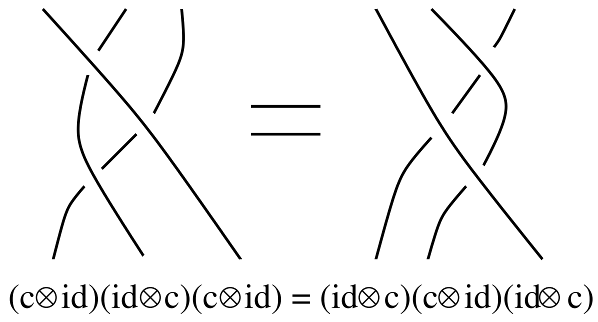

FIGURA 1.1.B. Ecuación de Trenzas.

Un morfismo $f : M \to N$ se indica como en la Figura 1.1.C. Allí también se dibujan los morfismos br, bl, dr, dl para un objeto rígido M.

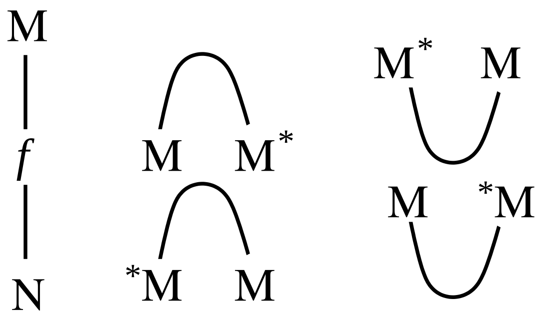

FIGURA 1.1.C. Morfismos.

A menudo será útil dibujar dos componentes de un producto tensorial como un único objeto. Esto se puede indicar como en la Figura 1.1.D. De esta manera,

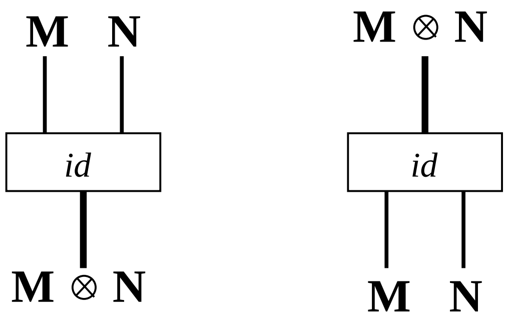

FIGURA 1.1.D. Dibujos de productos tensoriales.

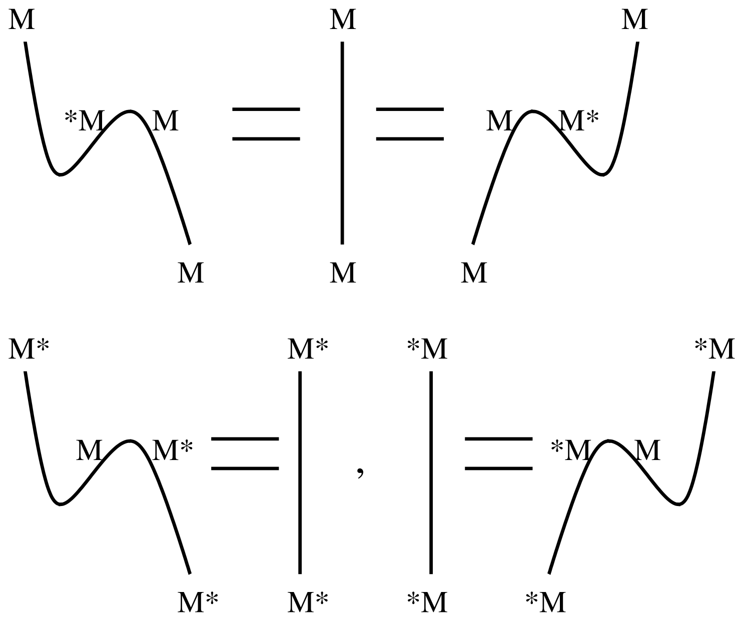

FIGURA 1.1.E. Relaciones con los duales.

las ecuaciones (1.1.15) se indican simplemente como en la Figura 1.1.E.

El hecho de que br, bl, dr, dl sean morfismos en $\mathcal{C}$ implica para todo par de objetos $M, N \in \mathcal{C}$ que

$$(dr \otimes \mathrm{id}_N)(\mathrm{id}_{M^*} \otimes (c_{M,N})^{-1}) = (\mathrm{id}_N \otimes dr)(c_{M^*,N} \otimes \mathrm{id}_M), \text{ y}$$
$$(dr \otimes \mathrm{id}_N)(\mathrm{id}_{M^*} \otimes c_{N,M}) = (\mathrm{id}_N \otimes dr)((c_{N,M^*})^{-1} \otimes \mathrm{id}_M).$$

Análogamente, se tienen igualdades con dl. En la Figura 1.1.F se muestran los dibujos de estas igualdades y se prueba, mediante dibujos, que ellas implican otras igualdades con br en lugar de dr (análogamente, bl en lugar de dl).

1.1.17. OBSERVACIÓN. Sea $\mathcal{C}$ una categoría trenzada. Si bien se puede probar como una larga igualdad entre morfismos, las igualdades de la Figura 1.1.G (que

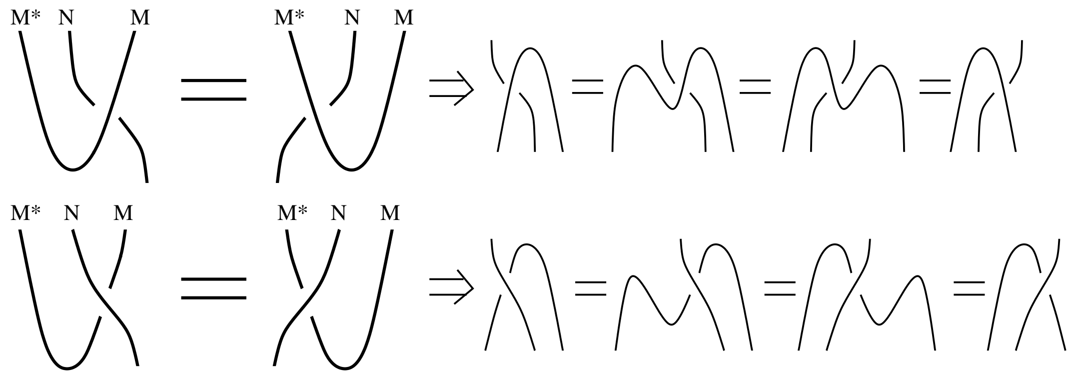

FIGURA 1.1.F. Relaciones entre la trenza y los morfismos b, d.

son equivalentes en términos de dibujos pero no en términos de objetos) permiten ver claramente que si M^* es el dual a derecha de M en $\mathcal{C}$, entonces tomando ${}^*M = M^*$ como objeto pero con $bl = c \circ br$, $dl = dr \circ c^{-1}$, se verifican las hipótesis de dual a izquierda.

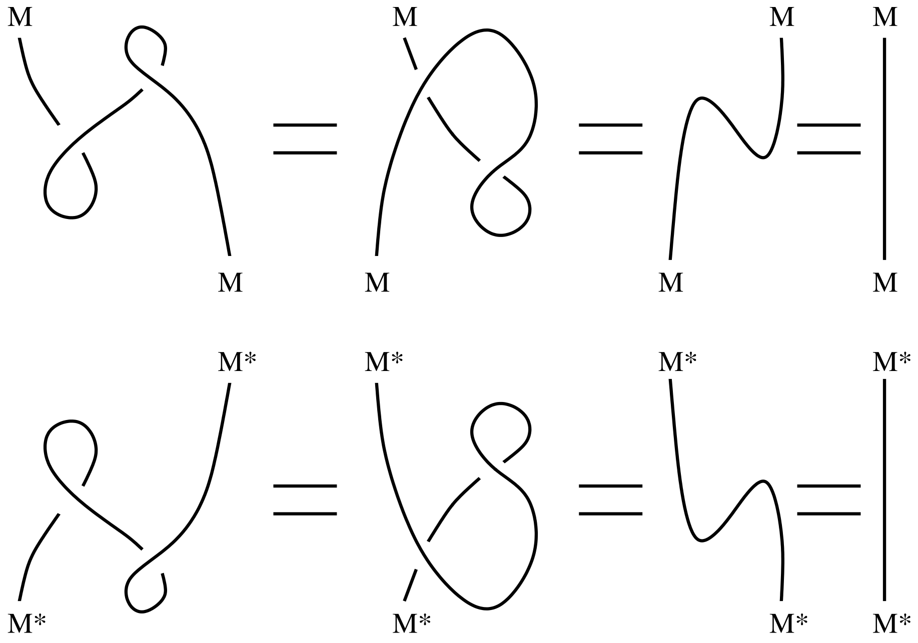

FIGURA 1.1.G. $M^* \simeq {}^*M$ en una categoría trenzada.

Otra herramienta importante en las categorías trenzadas está dada por las representaciones naturales de los grupos de trenzas.

1.1.18. Definición. El grupo simétrico $\mathbb{S}_n$ se puede dar –es bien sabido– por generadores $\tau_i = (i\ i+1)$, $(1 \leq i < n)$ y relaciones

$$\begin{aligned} \tau_i\tau_j &= \tau_j\tau_i && \text{si } \|i-j\| > 1, \\ \tau_i\tau_j\tau_i &= \tau_j\tau_i\tau_j && \text{si } \|i-j\| = 1, \\ \tau_i^2 &= 1 && \forall i. \end{aligned}$$

El *grupo de trenzas*, introducido por Artin, se obtiene quitando el último conjunto de relaciones. Para ser precisos, llamaremos $\mathbb{B}_n$ al grupo presentado por generadores σ_i, $(1 \leq i < n)$ y relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_i\sigma_j &= \sigma_j\sigma_i && \text{si } \|i-j\| > 1, \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i &= \sigma_j\sigma_i\sigma_j && \text{si } \|i-j\| = 1. \end{aligned}$$

Este es un grupo infinito y hay una proyección natural $\mathbb{B}_n \twoheadrightarrow \mathbb{S}_n$ dada por $\sigma_i \mapsto \tau_i$.

Una forma de representar el grupo de trenzas es mediante dibujos (de donde procede el nombre). Se dibuja una línea horizontal (pongamos por caso $\mathbb{R} \times \{1\}$) y se la copia en forma paralela (pongamos por caso $\mathbb{R} \times \{0\}$). Se ubican n puntos sobre cada una de las líneas (pongamos por caso $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{1\}$ y $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{0\}$). Los elementos del grupo están dados por todas las formas de unir, con curvas que no se crucen entre sí, los n puntos de arriba con los n de abajo en $\mathbb{R}^3$ de manera biyectiva (el conjunto de puntos se lo mira en $\mathbb{R}^3$ mediante $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$). Así, el generador σ_i se dibuja como dos cuerdas que permutan los puntos i e $i+1$ y dejan fijos al resto, como se indica en la Figura 1.1.h. Otra manera de presentar el grupo $\mathbb{B}_n$ es como el grupo fundamental del

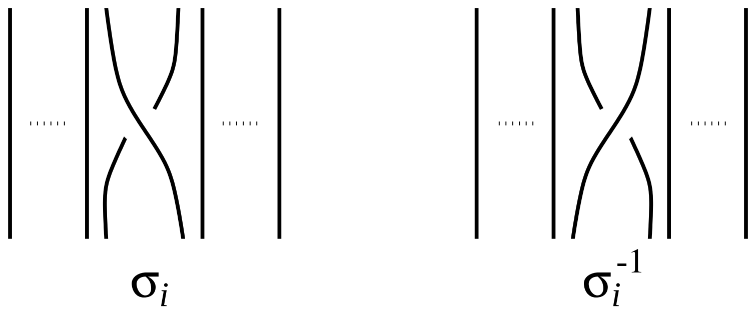

Figura 1.1.h. σ_i y σ_i^{-1}.

espacio de configuraciones de n puntos indistinguibles en el plano, esto es, el espacio topológico $(\mathbb{R}^{2n} \setminus \Delta)/\sim$, donde Δ es la "gran diagonal"

$$\Delta = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2 \mid \exists i, j,\ i \neq j, \ \text{ t.q. } x_i = x_j\},$$

y $(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$ si $\exists f \in \mathbb{S}_n$ tal que $x_i = y_{f(i)}$. No se usará aquí esta presentación.

1.1.19. Definición. Dada una categoría trenzada $\mathcal{C}$ y un objeto $V \in \mathcal{C}$, el grupo $\mathbb{B}_n$ se representa en $\operatorname{Aut}_{\mathcal{C}}(V^{\otimes n})$. Simplemente, se considera el morfismo dado por

$$\sigma_i \mapsto \underbrace{(\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id})}_{i-1} \otimes c \otimes \underbrace{(\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id})}_{n-i-1}.$$

El segundo conjunto de relaciones en la definición 1.1.18 no es otra cosa que la ecuación de trenzas que verifica c.

Están ahora maduras las condiciones para definir y dar las principales propiedades de las categorías de Yetter–Drinfeld.

1.1.20. Definición. Sea H un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva. Definimos la *categoría de Yetter–Drinfeld* (a izquierda) sobre H, y la denotamos ${}^H_H\mathcal{YD}$, como la categoría cuyos objetos son H-módulos y H-comódulos con una compatibilidad entre ambas estructuras dada por la ecuación

$$\delta \circ \rightharpoonup = (m^2 \otimes \rightharpoonup)(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathcal{S} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\tau_2\tau_3\tau_2(\Delta^2 \otimes \delta).$$

Aquí se nota por $\delta, \rightharpoonup$ la coacción y la acción de H respectivamente. Se usarán también las notaciones hm ó $h{\cdot}m$ en lugar de $h \rightharpoonup m$. Con $\tau_i \in \mathbb{S}_n$ nos referiremos al morfismo $(i\ i+1)$, que traspone los tensorandos i e $i+1$. Específicamente,

$$\tau_2\tau_3\tau_2(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4 \otimes a_5) = a_1 \otimes a_4 \otimes a_3 \otimes a_2 \otimes a_5.$$

En otros términos, si $M \in {}^H_H\mathcal{YD}$, se tiene

$$(hm)_{(-1)} \otimes (hm)_{(0)} = h_{(1)}m_{(-1)}\mathcal{S}h_{(3)} \otimes h_{(2)}m_{(0)}, \qquad \forall h \in H, \quad m \in M.$$

La categoría ${}^H_H\mathcal{YD}$ es monoidal con el producto tensorial, la unidad y asociatividad usuales de espacios vectoriales, tomados con la acción y coacción diagonales de H, es decir

$$h \rightharpoonup (m \otimes n) = h_{(1)}m \otimes h_{(2)}n, \quad \delta(m \otimes n) = m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes n_{(0)}.$$

La categoría ${}^H_H\mathcal{YD}$ es también trenzada a través de

$$c = c_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M, \quad c(m \otimes n) = m_{(-1)}n \otimes m_{(0)}.$$

Es sencillo corroborar que c es un isomorfismo con inversa dada por

$$(c_{N,M})^{-1} = (c^{-1})_{M,N} = \bar{c}_{M,N} \qquad m \otimes n \mapsto n_{(0)} \otimes \mathcal{S}^{-1}(n_{(-1)})m.$$

Como es regla a lo largo de esta tesis, se denotará por ${}^H_H\overline{\mathcal{YD}}$ a la categoría ${}^H_H\mathcal{YD}$ con la trenza inversa. Esta categoría se puede presentar como una categoría de Yetter–Drinfeld, y se lo hará en 1.3.3.

Si M es un objeto de ${}^H_H\mathcal{YD}$ de dimensión finita, se toma ${}^*M$ y M^* iguales a M^* como espacios vectoriales y se toman los morfismos br, bl, dr, dl como los morfismos usuales de "base dual" y evaluación, esto es, si $\{{}_\alpha m\}_{\alpha\in A}$ es una base de M como $\mathbf{k}$-espacio vectorial y $\{{}^\alpha m\}_{\alpha\in A}$ es su base dual, entonces

$$br(1) = \sum_{\alpha\in A} {}_\alpha m \otimes {}^\alpha m, \qquad bl(1) = \sum_{\alpha\in A} {}^\alpha m \otimes {}_\alpha m,$$
$$dr(f\otimes m) = dl(m\otimes f) = \langle f, m\rangle = f(m).$$

Se omitirá el símbolo de suma Σ en todas las fórmulas en las que aparezca el elemento ${}_\alpha m \otimes {}^\alpha m$. Tomando ahora las estructuras

$$\left.\begin{aligned} (h\cdot f)(m) &= f(\mathcal{S}(h)m),\\ f_{(-1)}\otimes f_{(0)} &= \mathcal{S}^{-1}({}_\alpha m_{(-1)})\otimes f({}_\alpha m_{(0)})^\alpha m \end{aligned}\right\} \quad \text{para } M^*,$$
$$\left.\begin{aligned} (h\cdot f)(m) &= f(\mathcal{S}^{-1}(h)m),\\ f_{(-1)}\otimes f_{(0)} &= \mathcal{S}({}_\alpha m_{(-1)})\otimes f({}_\alpha m_{(0)})^\alpha m \end{aligned}\right\} \quad \text{para } {}^*M,$$

resulta inmediato ver que se verifican las ecuaciones (1.1.15). Como consecuencia, la categoría de módulos de YD de dimensión finita ${}^H_H\mathcal{YD}^f$ es rígida.

Si H es de dimensión finita, en ${}^H_H\mathcal{YD}$ un objeto de dimensión infinita tiene duales en el sentido de 1.1.16. Las definiciones de dr, dl y la estructura como H-módulos son las mismas que en el caso finito, y las estructuras de comódulos están dadas de manera única por

$$f_{(-1)}\langle f_{(0)}, m\rangle = \mathcal{S}^{-1}(m_{(-1)})\langle f, m_{(0)}\rangle \qquad \text{para } M^*,$$
$$f_{(-1)}\langle f_{(0)}, m\rangle = \mathcal{S}(m_{(-1)})\langle f, m_{(0)}\rangle \qquad \text{para } {}^*M.$$

En este caso, estamos definiendo un elemento de

$$\operatorname{Hom}(M^*\otimes M, H) = \operatorname{Hom}(M^*, \operatorname{Hom}(M, H)) = \operatorname{Hom}(M^*, H\otimes M^*),$$

donde la última igualdad vale si M ó H son de dimensión finita (para ${}^*M$ lo mismo). Otra forma de ver esta estructura es como consecuencia de 1.1.21.

De manera análoga se define $\mathcal{YD}^H_H$ como la categoría de módulos y comódulos a derecha sobre H que verifican

$$mh_{(0)}\otimes mh_{(1)} = m_{(0)}h_{(2)}\otimes \mathcal{S}(h_{(1)})m_{(1)}h_{(3)}.$$

Una de las construcciones centrales que hizo Drinfeld en [**Dri86**] fue la del doble que hoy en día lleva su nombre. Específicamente, si H es un álgebra de

Hopf de dimensión finita, tomaremos $\mathcal{D}(H) = H \bowtie H^{*\mathrm{op}}$ el *doble de Drinfeld de* H, que es isomorfo a $H \otimes H^*$ como coálgebra, con producto y antípoda dados por

$$(h \bowtie f)(h' \bowtie f') = \langle f_{(1)}, h'_{(1)}\rangle \langle f_{(3)}, \mathcal{S}h'_{(3)}\rangle (hh'_{(2)} \bowtie f' f_{(2)}),$$
$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}(H)}(h \bowtie f) = (1 \bowtie \mathcal{S}^{-1}f)(\mathcal{S}h \bowtie \varepsilon) = (\mathcal{S}h_{(2)} \bowtie \mathcal{S}^{-1}f_{(2)})\langle f_{(1)}, \mathcal{S}h_{(1)}\rangle \langle f_{(3)}, h_{(3)}\rangle.$$

(donde notamos $fg = m(f \otimes g)$ en H^* en lugar de en $H^{*\mathrm{op}}$). No es difícil ver que $\mathcal{D}(H)$ es un álgebra de Hopf quasi-triangular, donde tomamos como estructura triangular

$$\mathcal{R} = \sum_{\alpha} {}_{\alpha}h \otimes {}^{\alpha}h,$$

con $\{{}_{\alpha}h\}$ una base de H y $\{{}^{\alpha}h\}$ su base dual. En consecuencia, la categoría de módulos sobre $\mathcal{D}(H)$ es trenzada. Un conocido teorema vincula esta categoría con la de Yetter–Drinfeld:

1.1.21. TEOREMA (Majid). *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Son equivalentes (como categorías trenzadas) la categoría de Yetter–Drinfeld ${}^H_H\mathcal{YD}$ y la de módulos a izquierda sobre el doble ${}_{\mathcal{D}(H)}\mathcal{M}$.*

PRUEBA. Se puede encontrar en [**Mon93**]. □

Hay una tercera categoría equivalente a las anteriores que aparece naturalmente cuando se trabaja con álgebras de Hopf, que es la de los *bimódulos de Hopf* y que se denotará por ${}^H_H\mathcal{M}^H_H$. Sus objetos son H-bimódulos y H-bicomódulos tales que las acciones $H \otimes M \to M$ y $M \otimes H \to M$ son morfismos de bicomódulos (tomando sobre $H \otimes M$ y $M \otimes H$ las estructuras diagonales). En forma equivalente, se puede pedir que las coacciones $M \to H \otimes M$ y $M \to M \otimes H$ sean morfismos de bimódulos. La estructura monoidal está dada por el producto tensorial sobre H, $(M, N) \mapsto M \otimes_H N$ (también se puede tomar el producto cotensorial sobre H, $(M, N) \mapsto M \boxtimes_H N$). La trenza está dada por

$$c_{M,N}(m \otimes n) = m_{(-2)}n_{(0)}\mathcal{S}(n_{(1)})\mathcal{S}(m_{(-1)}) \otimes m_{(0)}n_{(2)}.$$

Se tiene entonces

1.1.22. PROPOSICIÓN. *La categoría ${}^H_H\mathcal{M}^H_H$ es equivalente como categoría trenzada a ${}^H_H\mathcal{YD}$. La categoría ${}^H_H\mathcal{M}^H_H$ pero con estructura monoidal dada por el producto cotensorial también es equivalente a ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

PRUEBA. (Esquicio, ver [**Sch93**, Satz 1.3.5], [**Sch94**] o [**AD95**, Appendix] por los detalles). Sea M un objeto de ${}^H_H\mathcal{M}^H_H$. Por el teorema fundamental de los módulos de Hopf [**Swe69**, Th. 4.1.1], $M \simeq V \otimes H$ como módulo y comódulo a derecha, donde $V = M^{\mathrm{co}\, H}$ y la estructura está dada por la de H, es decir, $(m \otimes h) \otimes h' \mapsto m \otimes hh'$, $m \otimes h \mapsto (m \otimes h_{(1)}) \otimes h_{(2)}$. Si se identifica V con $V \otimes 1$, se toma para V la estructura

$$\begin{aligned} h \rightharpoonup v &= h_{(1)} v \mathcal{S} h_{(2)}, \\ \delta(v) &= \delta_l(v) \qquad (\delta_l : M \to H \otimes M \text{ es el morfismo de estructura}), \end{aligned}$$

y esto convierte a V en un objeto de ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Recíprocamente, si $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$, entonces $V \otimes H$ es un objeto de ${}^H_H\mathcal{M}^H_H$ con la estructura a derecha dada por H y a izquierda dada por

$$h(v \otimes g) = h_{(1)} \rightharpoonup v \otimes h_{(2)} g, \quad \delta(v \otimes g) = v_{(-1)} g_{(1)} \otimes (v_{(0)} \otimes g_{(2)}).$$

□

1.2. Álgebras de Hopf en categorías trenzadas

El contexto natural para definir los conceptos de *álgebra* y *coálgebra* es el de las categorías monoidales. Si $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal, un álgebra en $\mathcal{C}$ es un par (A, m) donde $A \in \mathcal{C}$ y $m : A \otimes A \to A$ son tales que existe $u : \mathbf{1} \to A$ de manera que conmutan los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "r^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & A \otimes \mathbf{1} \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes u"] \\ A & A \otimes A, \arrow[l, "m"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "l^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathbf{1} \otimes A \arrow[d, "u \otimes \mathrm{id}"] \\ A & A \otimes A. \arrow[l, "m"] \end{tikzcd}$$

Una coálgebra en $\mathcal{C}$ es el concepto dual a este, es decir, un par (C, Δ) donde $C \in \mathcal{C}$ y $\Delta : C \to C \otimes C$ tales que existe $\varepsilon : C \to \mathbf{1}$ de manera que conmutan los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\Delta \otimes \mathrm{id}"'] \\ C \otimes C \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] & C, \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C & C \otimes \mathbf{1} \arrow[l, "r"'] \\ C \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\Delta"'] & C \otimes C, \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C & \mathbf{1} \otimes C \arrow[l, "l"'] \\ C \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\Delta"'] & C \otimes C. \arrow[u, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

Para definir el concepto de *biálgebra* hace falta una manera natural de "intercambiar" los objetos. Esto es, se necesita una trenza.

1.2.1. Definición. Si $\mathcal{C}$ es una categoría trenzada, se define una *biálgebra en* $\mathcal{C}$ como un triple (R, m, Δ) donde R es un objeto de $\mathcal{C}$, (R, m) es un álgebra,

(R, Δ) es una coálgebra, u es un morfismo de coálgebras, ε es un morfismo de álgebras y conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& R \otimes R \arrow[r, "\Delta \otimes \Delta"] \arrow[dl, "m"'] & R \otimes R \otimes R \otimes R \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes c \otimes \mathrm{id}"] \\
R \arrow[dr, "\Delta"'] & & \\
& R \otimes R & R \otimes R \otimes R \otimes R \arrow[l, "m \otimes m"]
\end{tikzcd} \tag{1.2.2}$$

Un *álgebra de Hopf en* $\mathcal{C}$ es una biálgebra R en $\mathcal{C}$ para la que existe un morfismo $\mathcal{S} : R \to R$ tal que conmutan los diagramas

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & R \otimes R \arrow[dd, "\mathcal{S} \otimes \mathrm{id}"] & R \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & R \otimes R \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes \mathcal{S}"] \\
\mathbf{1} \arrow[d, "u"'] & & \mathbf{1} \arrow[d, "u"'] & \\
R & R \otimes R \arrow[l, "m"] & R & R \otimes R \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd} \tag{1.2.3}$$

Al igual que en el caso clásico, otra forma de escribir la conmutatividad del diagrama (1.2.2) es decir que m es un morfismo comultiplicativo, o que Δ es un morfismo multiplicativo, donde respectivamente se toma la estrucutra de álgebra o de coálgebra sobre $R \otimes R$ dada por

$$m_{R \otimes R} = (m_R \otimes m_R) \circ (\mathrm{id}_R \otimes c_{R,R} \otimes \mathrm{id}_R),$$
$$\Delta_{R \otimes R} = (\mathrm{id}_R \otimes c_{R,R} \otimes \mathrm{id}_R) \circ (\Delta_R \otimes \Delta_R).$$

También, al igual que en el caso clásico, se pueden tomar, en lugar de las anteriores, las hipótesis equivalentes

- m y u son morfismos de coálgebras, ó
- Δ y ε son morfismos de álgebras.

Es importante notar que $R \otimes R$ no es una biálgebra con la estructura anterior. Más en general, dadas dos biálgebras R_1, R_2 en una categoría trenzada no simétrica, no hay una estructura canónica de biálgebra para $R_1 \otimes R_2$, aun usando la trenza c para la multiplicación y la inversa c^{-1} para la comultiplicación, o al revés.

Otra analogía con el caso clásico (contrastando con el desagradable trago amargo del producto tensorial de recién) es la relación entre la antípoda y la multiplicación o la comultiplicación. Específicamente, se tiene

1.2.4. Lema. *Sea R un álgebra de Hopf trenzada. Se verifica que*

$$\mathcal{S}m = m(\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})c, \qquad \Delta\mathcal{S} = c(\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})\Delta.$$

Si $\mathcal{S}$ es inversible (como morfismo de la categoría), entonces

$$\mathcal{S}^{-1}m = m(\mathcal{S}^{-1} \otimes \mathcal{S}^{-1})c^{-1}, \qquad \Delta\mathcal{S}^{-1} = c^{-1}(\mathcal{S}^{-1} \otimes \mathcal{S}^{-1})\Delta.$$

Prueba. Dado que m es un morfismo de coálgebras y que $\mathcal{S}$ es la inversa de la identidad en el monoide $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, R)$, se tiene que $\mathcal{S}m$ es la inversa de m en el monoide $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R \otimes R, R)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} m * (m(\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})c) &= m(m \otimes (m(\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})c))(\mathrm{id} \otimes c \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \Delta) \\ &= m(m \otimes m)(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathcal{S} \otimes \mathcal{S})(\mathrm{id} \otimes c_{R,R\otimes R})(\Delta \otimes \Delta) \\ &= m(\mathrm{id} \otimes m)(\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}) \\ &\qquad (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(\Delta \otimes \mathrm{id}) \\ &= m(m \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathcal{S} \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes u\varepsilon) \\ &= u\varepsilon \otimes u\varepsilon = u_{R\otimes R}\varepsilon_{R\otimes R}, \end{aligned}$$

de donde sale la primera igualdad (nótese que, como m tiene inversa $\mathcal{S}m$ a ambos lados, con esto basta).

La segunda igualdad de la primera línea sale de dualizar la que se acaba de probar. La segunda línea es una consecuencia inmediata de la primera usando la naturalidad de c. □

En general las categorías trenzadas con las que se trabajará tienen un funtor de olvido en la categoría de espacios vectoriales $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$. Algunas veces, es fácil probar la existencia de ciertos morfismos en la categoría subyacente $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ pero resulta tedioso ver que esos morfismos están en la categoría original. Cuando se trata de la antípoda de una biálgebra, será útil la observación que sigue:

1.2.5. Observación. Supongamos que se tiene $U : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un funtor de olvido entre categorías monoidales tal que si $U(f)$ es un isomorfismo entonces f es un isomorfismo. Sea H una biálgebra en $\mathcal{C}$, y nótese que UH es un álgebra y una coálgebra en $\mathcal{C}'$. Si la identidad $\mathrm{id} : H \to H$ tiene inversa $\mathcal{S}_{\mathcal{C}'}$ en el monoide $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(UH, UH)$, entonces tiene inversa en el monoide $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H, H)$, es decir que H tiene antípoda. En efecto: sea

$$F : H \otimes H \to H \otimes H, \; F = (\mathrm{id} \otimes m)(\Delta \otimes \mathrm{id}).$$

El morfismo UF es un isomorfismo con inversa $(\mathrm{id} \otimes m)(\mathrm{id} \otimes \mathcal{S}_{\mathcal{C}'} \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \mathrm{id})$. Por la hipótesis sobre U, F es un isomorfismo en $\mathcal{C}$; sea T su inversa. La antípoda de H es entonces la composición

$$\mathcal{S}_{\mathcal{C}} = H \xrightarrow{r_H^{-1}} H \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes u} H \otimes H \xrightarrow{T} H \otimes H \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathrm{id}} \mathbf{1} \otimes H \xrightarrow{l_H} H.$$

La prueba de esto usa que en $\mathcal{C}'$ se verifica que

$$\begin{aligned} H \xrightarrow{r_H^{-1}} H \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes u} H \otimes H \xrightarrow{T} H \otimes H \\ = H \xrightarrow{\Delta} H \otimes H \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathcal{S}_{\mathcal{C}'}} H \otimes H \end{aligned}$$

y que U es un funtor fiel: no hay más que escribir los diagramas necesarios y ver que conmutan en $\mathcal{C}'$ cuando se les aplica U.

Una enfoque distinto para ver esta observación me fue sugerido por W. Ferrer Santos: sea $A_{\mathcal{C}}$ (resp. $A_{\mathcal{C}'}$) el monoide $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H, H)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(UH, UH)$) con el producto de convolución, y sea $B_{\mathcal{C}}$ (resp. $B_{\mathcal{C}'}$) el monoide $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H \otimes H, H \otimes H)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(UH \otimes UH, UH \otimes UH)$) con el producto de composición. Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{C}} : A_{\mathcal{C}} \to B_{\mathcal{C}}, \quad & \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\alpha) = (\mathrm{id} \otimes m)(\mathrm{id} \otimes \alpha \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \mathrm{id}), \\ \mathcal{G}_{\mathcal{C}} : B_{\mathcal{C}} \to A_{\mathcal{C}}, \quad & \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(\beta) = l_H(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\beta(\mathrm{id} \otimes u) r_H^{-1}, \end{aligned}$$

(definiciones análogas en $\mathcal{C}'$). Se prueba fácilmente (siguiendo los diagramas) que

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\alpha_1 * \alpha_2) = \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\alpha_1) \circ \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\alpha_2), \tag{1.2.6}$$

y análogamente para $\mathcal{C}'$. Luego $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{F}_{\mathcal{C}'}$ son morfismos de monoides. De esta manera, si en $A_{\mathcal{C}}$ el elemento id_H es inversible (su inversa, de existir, es la antípoda), entonces en $B_{\mathcal{C}}$ el elemento $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id})$ tiene inversa (es decir, es un isomorfismo). Recíprocamente, si $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id})$ tiene inversa β en $B_{\mathcal{C}}$, es fácil ver que $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(\beta)$ es la inversa de id en $A_{\mathcal{C}}$. Análogamente en $\mathcal{C}'$. Luego, H tiene antípoda si y solo si $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id})$ es un isomorfismo. Pero entonces se observa que, con la identificación natural $U(H \otimes H) \simeq UH \otimes UH$ (recordemos que U es un funtor entre categorías monoidales), el cuadrado siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} A_{\mathcal{C}'} \arrow[r, "\mathcal{F}_{\mathcal{C}'}"] & B_{\mathcal{C}'} \\ A_{\mathcal{C}} \arrow[u, "U"] \arrow[r, "\mathcal{F}_{\mathcal{C}}"] & B_{\mathcal{C}}. \arrow[u, "U"'] \end{tikzcd}$$

Luego, H tiene antípoda sii $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id})$ es inversible, sii $U(\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}))$ es inversible, sii $\mathcal{F}_{\mathcal{C}'}(U(\mathrm{id}))$ es inversible, sii en UH hay una inversa de id para el producto de convolución.

Una construcción particularmente útil a los efectos de trabajar con álgebras de Hopf punteadas es la de *biproducto*, o *bosonización.* Esta construcción fue desarrollada por Radford en [**Rad85**] y explicada en términos de "álgebras de Hopf trenzadas" por Majid en [**Maj94**].

1.2.7. LEMA-DEFINICIÓN. *Sea H un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva. Hay una correspondencia biunívoca entre*

1. *las álgebras de Hopf A munidas de morfismos (de álgebras de Hopf)*
$$A \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} H$$
tales que $pi = \mathrm{id}$, y
2. *las álgebras de Hopf trenzadas en la categoría ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

El pasaje de 2 a 1 se llamará bosonización.

PRUEBA. (Esquicio, ver *op.cit.*) El pasaje de 1 a 2 se hace mediante
$$A \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} H \ \mapsto A^{\mathrm{co}H}.$$
Específicamente, se toma $R = A^{\mathrm{co}H} = \{a \in A \mid (\mathrm{id} \otimes p)\Delta(a) = a \otimes 1\}$. La estructura de álgebra de R es la heredada por A, dado que es una subálgebra. Los otros morfismos se definen como sigue:
$$\begin{aligned}
\Delta_R(r) &= r_{(1)}(i\mathcal{S}_H(pr_{(2)})) \otimes r_{(3)},\\
\mathcal{S}_R(r) &= (ip(r_{(1)}))\mathcal{S}_A(r_{(2)}),\\
h \rightharpoonup r &= h_{(1)} r \mathcal{S} h_{(2)},\\
\delta(r) &= (p \otimes \mathrm{id})\Delta(r).
\end{aligned}$$

El pasaje de 2 a 1 se hace mediante $R \mapsto (\ R\#H \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} H\ )$, donde se toma $A = R\#H$ como el producto cruzado, con respecto a su condición de álgebra, y como el coproducto cruzado, con respecto a su condición de coálgebra. Esto es,
$$\begin{aligned}
&m((r\#h) \otimes (s\#g)) = r(h_{(1)} \rightharpoonup s)\#h_{(2)}g,\\
&\Delta_A(r\#h) = (r_{(1)}\#r_{(2)(-1)}h_{(1)}) \otimes (r_{(2)(0)}\#h_{(2)}),\\
&\iota(h) = 1\#h, \qquad p(r\#h) = \varepsilon(r)h,\\
&\mathcal{S}_A(r\#1) = \iota(\mathcal{S}(r_{(-1)}))(\mathcal{S}_R(r_{(0)})\#1) = (\mathcal{S}(r_{(-1)}) \rightharpoonup \mathcal{S}_R(r_{(0)})\#\mathcal{S}(r_{(-2)})).
\end{aligned}$$
Es interesante observar que estas mismas definiciones dan una correspondencia entre las biálgebras $A \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} H$ y las biálgebras en ${}^H_H\mathcal{YD}$, simplemente eliminando las definiciones de las antípodas. $\square$

Pasaremos ahora a mencionar los primeros ejemplos de la teoría.

1.2.8. Ejemplo. Sea $H = \mathbf{k}$. La categoría de Yetter–Drinfeld sobre H en este caso se reduce simplemente a la categoría de espacios vectoriales $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ (con acciones y coacciones triviales y con la trenza trivial $x \otimes y \mapsto y \otimes x$). Un álgebra de Hopf trenzada en esta categoría es simplemente un álgebra de Hopf clásica.

1.2.9. Ejemplo. Sean N un número natural, q una raíz de la unidad primitiva de orden N en $\mathbf{k}$ y $A = T_{q,N}$ el álgebra de Taft de orden N^2 sobre $\mathbf{k}$, que está generada como $\mathbf{k}$-espacio vectorial por los elementos $\{x^i g^j\}_{0 \leq i,j < N}$ y cuyas reglas de multiplicación son $g^N = 1$, $x^N = 0$, y $gx = qxg$. La comultiplicación está dada por $\Delta g = g \otimes g$, y $\Delta x = g \otimes x + x \otimes 1$. La antípoda está dada por $\mathcal{S}g = g^{-1}$ y $\mathcal{S}x = -g^{-1}x$. La counidad, por $\varepsilon g = 1$, $\varepsilon x = 0$.

Sea C_N el grupo cíclico de N elementos con generador g, y sea $H = \mathbf{k}C_N$ el álgebra de grupo. Hay entonces un morfismo de álgebras de Hopf

$$p : A \to H, \quad p(x^i g^j) = g^j \delta_{i,0}.$$

Este morfismo tiene una sección, dada por

$$i : H \to A, \quad i(g^j) = g^j.$$

Es inmediato ver que $R = A^{\mathrm{co}H}$ es isomorfo como álgebra a $\mathbf{k}[x]/(x^N)$. De acuerdo con las definiciones de 1.2.7, se tiene $\Delta_R x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $\varepsilon_R(x) = 0$, y $\mathcal{S}_R x = -x$. La acción y coacción de H sobre R están dadas por $g \rightharpoonup x = gxg^{-1} = qx$ y $\delta(x) = g \otimes x$.

1.2.10. Ejemplo. Como recién, sea H el álgebra de grupo de C_N con generador g y q una raíz de la unidad de orden N. Sea $A = \mathbf{h}(q,m) = \mathbf{k}{<}y,x,g{>}/\sim$ el álgebra *book* considerada en [**AS98a**]. Explícitamente, es el álgebra de Hopf con generadores $\{x,y,g\}$ y relaciones

$$x^N = y^N = 0, \quad g^N = 1, \quad , gx = qxg, \quad gy = q^m yg, \quad xy = yx,$$

y cuya multiplicación , antípoda y counidad están dadas por

$$\Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x, \quad \Delta(y) = y \otimes 1 + g^m \otimes y, \quad \Delta(g) = g \otimes g,$$
$$\mathcal{S}(x) = -xg^{-1}, \quad \mathcal{S}(y) = -g^{-m}y, \quad \mathcal{S}(g) = g^{-1}, \quad \varepsilon(x) = \varepsilon(y) = 0, \quad \varepsilon(g) = 1.$$

Se puede tomar aquí tanto $H = T_{q,N} = \mathbf{k}{<}x,g{>}/\sim$, como $H = \mathbf{k}{<}g{>}$. En el primer caso, $p(y) = 0$, $p(x) = x$, $p(g) = g$, y

$$A^{\mathrm{co}H} = \frac{\mathbf{k}[y]}{(y^N)}.$$

En el segundo, sea $\bar{x} = xg^{-1}$, y $p(y) = p(x) = 0,\ p(g) = g$. Entonces

$$A^{\mathrm{co}H} = \frac{\mathbf{k}<\bar{x}, y>}{(\bar{x}^N, y^N, \bar{x}y - q^m y\bar{x})}.$$

1.2.11. Ejemplo. Los ejemplos precedentes son casos particulares de una clase más amplia, que es la de *Espacios Lineales Cuánticos* (en inglés, Quantum Linear Spaces). Si bien luego daremos una definición más general, por ahora definimos los ELC como sigue: sea Γ un grupo abeliano finito; sean $g_1, \dots, g_n$ elementos de Γ, $\chi_1, \dots, \chi_n : \Gamma \to \mathbf{k}^\times$ caracteres. Supongamos que para $i \neq j$ se verifica $\chi_i(g_j)\chi_j(g_i) = 1$. Sea N_i el orden de la raíz $\chi_i(g_i)$, y sea $q_{ij} = \chi_j(g_i)$. Sea R el álgebra generada por elementos $x_1, \dots, x_n$ con relaciones

$$\begin{aligned} x_i^{N_i} &= 0 \qquad && \forall i, \\ x_i x_j &= q_{ij} x_j x_i \qquad && \text{si } i \neq j. \end{aligned}$$

Claramente, el conjunto de monomios $\{x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n},\ 0 \le r_i < N_i\}$ es una base de R. Se definen la acción y coacción de $H = \mathbf{k}\Gamma$ por

$$\begin{aligned} g \rightharpoonup (x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}) &= \chi_1(g)^{r_1} \dots \chi_n(g)^{r_n} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}, \\ \delta(x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}) &= g_1^{r_1} \dots g_n^{r_n} \otimes x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}, \end{aligned}$$

y la comultiplicación, counidad y antípoda por

$$\begin{aligned} \Delta(x_i) &= 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1, \\ \varepsilon x_i &= 0, \\ \mathcal{S} x_i &= -x_i. \end{aligned}$$

De esta manera, R resulta un álgebra de Hopf trenzada sobre $\mathbf{k}\Gamma$ (esto es, en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$).

1.3. Más sobre duales en categorías trenzadas

Sea $\mathcal{C}$ una categoría trenzada y M, N objetos con duales en el sentido de 1.1.16. Para un morfismo $f : M \to N$ en $\mathcal{C}$ se tiene un morfismo traspuesto $f^* : N^* \to M^*$ como el que corresponde a $N^* \otimes M \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f} N^* \otimes N \xrightarrow{dr} \mathbf{1}$. Si M es rígido, f^* se puede expresar como la composición

$$\begin{aligned} f^* = N^* \longrightarrow N^* \otimes \mathbf{1} \longrightarrow N^* \otimes M \otimes M^* \\ \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f \otimes \mathrm{id}} N^* \otimes N \otimes M^* \longrightarrow \mathbf{1} \otimes M^* \longrightarrow M^*. \end{aligned}$$

En términos de dibujos se puede ver la definición en la Figura 1.3.a, más abajo. De manera análoga, si ${}^*M$ y ${}^*N$ son los duales a izquierda de M y N en el sentido de 1.1.16, se puede definir ${}^*f : {}^*N \to {}^*M$. Si M es rígido, ${}^*f$ está dado por la composición

$$\begin{aligned} {}^*f = {}^*N &\longrightarrow \mathbf{1} \otimes {}^*N \longrightarrow {}^*M \otimes M \otimes {}^*N \\ &\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f \otimes \mathrm{id}} {}^*M \otimes N \otimes {}^*N \longrightarrow {}^*M \otimes \mathbf{1} \longrightarrow {}^*M. \end{aligned}$$

Dados dos objetos M, N rígidos de una categoría trenzada, hay un isomorfismo natural $\psi_{M,N} : M^* \otimes N^* \to (N \otimes M)^*$ dado por

$$\begin{aligned} \psi_{M,N} = M^* \otimes N^* &\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes br_{N \otimes M}} (M^* \otimes N^*) \otimes (N \otimes M) \otimes (N \otimes M)^* \\ &\longrightarrow M^* \otimes (N^* \otimes N) \otimes M^* \otimes (N \otimes M)^* \\ &\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes dr_N \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}} M^* \otimes M \otimes (N \otimes M)^* \xrightarrow{dr_M \otimes \mathrm{id}} (N \otimes M)^*. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Este isomorfismo se puede presentar como aquél asociado a

$$(M^* \otimes N^*) \otimes (N \otimes M) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes dr \otimes \mathrm{id}} M^* \otimes M \xrightarrow{dr} \mathbf{1}.$$

Los dibujos correspondientes a f^* y $\psi_{M,N}$ son los de la Figura 1.3.A.

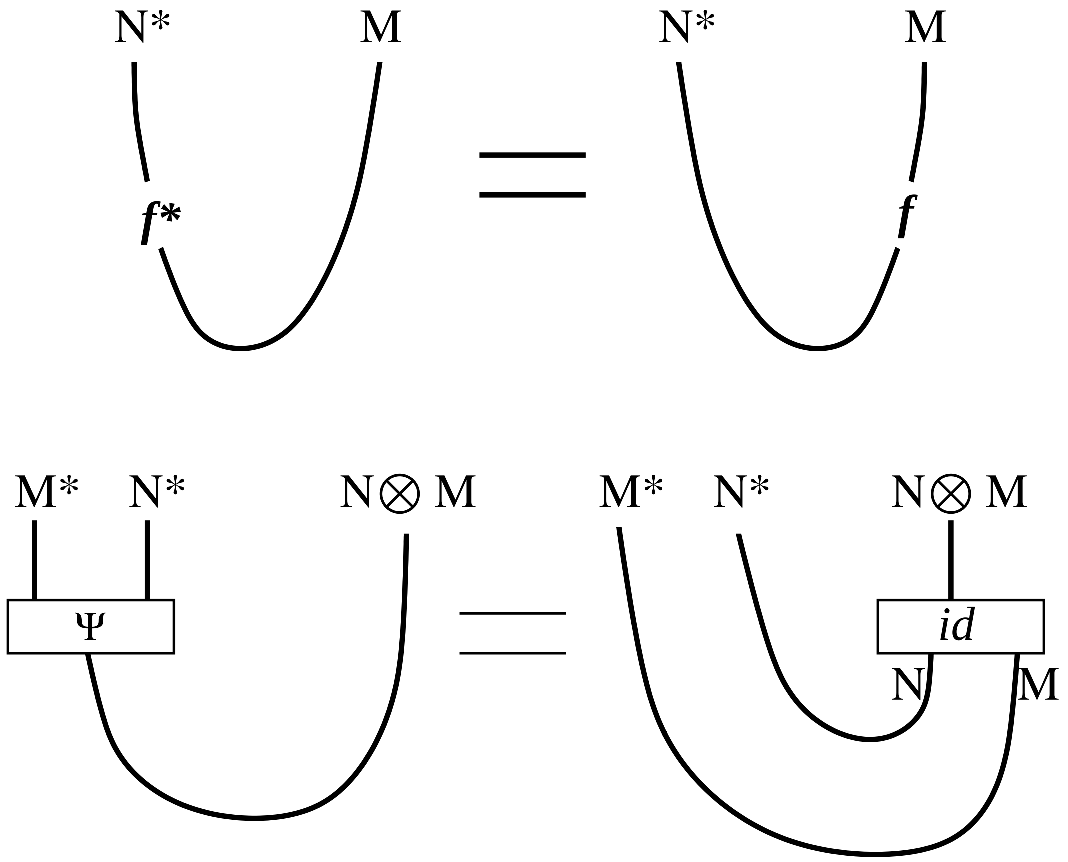

FIGURA 1.3.A. f^* y $\psi_{M,N}$.

A menudo usaremos la composición de este morfismo con la trenza para "aparear" $M^* \otimes N^*$ con $M \otimes N$. Para esto, usamos

1.3.2. Lema. *Para M, N objetos rígidos, se tiene que*

$$(c_{M,N})^* \psi_{M,N} = \psi_{N,M} c_{M^*,N^*}.$$

Prueba. Primero veamos que

$$\begin{aligned}&\mathbf{1} \to (M \otimes N) \otimes (M \otimes N)^* \xrightarrow{c\otimes \mathrm{id}} (N \otimes M) \otimes (M \otimes N)^* \\ &\qquad = \mathbf{1} \to (N \otimes M) \otimes (N \otimes M)^* \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes c^*} (N \otimes M) \otimes (M \otimes N)^*\end{aligned}$$

En efecto, haciendo el producto tensorial de ambos lados con $(M \otimes N)$ a la derecha y componiendo con $dr_{(M\otimes N)}$ se obtiene c.

Veamos ahora que

$$\begin{aligned}&M^* \otimes N^* \otimes M \otimes N \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes c} M^* \otimes N^* \otimes N \otimes M \to M^* \otimes M \to \mathbf{1} \\ &\qquad = M^* \otimes N^* \otimes M \otimes N \xrightarrow{c\otimes \mathrm{id}} N^* \otimes M^* \otimes M \otimes N \to N^* \otimes N \to \mathbf{1}.\end{aligned}$$

En efecto, ambos son iguales a $M^* \otimes N^* \otimes M \otimes N \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes c^{-1} \otimes \mathrm{id}} M^* \otimes M \otimes N^* \otimes N \to \mathbf{1}$. Luego,

$$\begin{aligned}&\psi^*_{N,M} c_{M^*,N^*} \\ &= M^* \otimes N^* \xrightarrow{c_{M^*,N^*}} N^* \otimes M^* \longrightarrow \\ &\qquad N^* \otimes M^* \otimes (M \otimes N) \otimes (M \otimes N)^* \xrightarrow{dr\otimes \mathrm{id}} (M \otimes N)^* \\ &= M^* \otimes N^* \longrightarrow M^* \otimes N^* \otimes (M \otimes N) \otimes (M \otimes N)^* \xrightarrow{c_{M^*,N^*}\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id}} \\ &\qquad N^* \otimes M^* \otimes (M \otimes N) \otimes (M \otimes N)^* \xrightarrow{dr\otimes \mathrm{id}} (M \otimes N)^* \\ &= M^* \otimes N^* \longrightarrow M^* \otimes N^* \otimes (M \otimes N) \otimes (M \otimes N)^* \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes \mathrm{id}\otimes c_{M,N}\otimes \mathrm{id}} \\ &\qquad M^* \otimes N^* \otimes (N \otimes M) \otimes (M \otimes N)^* \xrightarrow{dr\otimes \mathrm{id}} (M \otimes N)^* \\ &= M^* \otimes N^* \longrightarrow M^* \otimes N^* \otimes (N \otimes M) \otimes (N \otimes M)^* \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes \mathrm{id}\otimes (c_{M,N})^*} \\ &\qquad M^* \otimes N^* \otimes (N \otimes M) \otimes (M \otimes N)^* \xrightarrow{dr\otimes \mathrm{id}} (M \otimes N)^* \\ &= M^* \otimes N^* \longrightarrow M^* \otimes N^* \otimes (N \otimes M) \otimes (N \otimes M)^* \xrightarrow{dr\otimes \mathrm{id}} \\ &\qquad (N \otimes M)^* \xrightarrow{(c_{M,N})^*} (M \otimes N)^* \\ &= (c_{M,N})^* \psi^*_{M,N}.\end{aligned}$$

Una segunda prueba, con dibujos, se da en la Figura 1.3.b. □

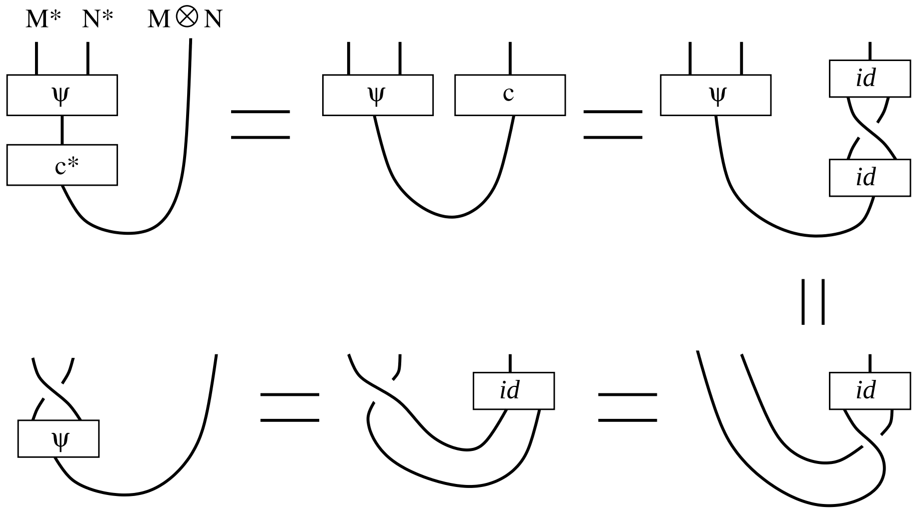

FIGURA 1.3.B. prueba de 1.3.2.

Si H es un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva, entonces el álgebra H^{bop} es isomorfa a H, con isomorfismo $\mathcal{S} : H \to H^{\mathrm{bop}}$. Es claro entonces que en tal caso las categorías ${}^H_H\mathcal{YD}$ y ${}^{H^{\mathrm{bop}}}_{H^{\mathrm{bop}}}\mathcal{YD}$ son equivalentes (como categorías trenzadas). Por otra parte, si H es de dimensión finita, la acción y coacción de H a izquierda sobre un objeto $M \in {}^H_H\mathcal{YD}$ se traducen respectivamente como coacción y acción a derecha de H^*. Específicamente, se define

$$m \leftharpoonup f = m_{(0)}\langle f, m_{(-1)}\rangle, \qquad \delta(m) = {}_\alpha hm \otimes {}^\alpha h,$$

donde como de costumbre $\{{}_\alpha h\}$ y $\{{}^\alpha h\}$ son bases duales de H y H^* y se omiten los símbolos de suma Σ. Es inmediato verificar que de esta manera M se convierte en un módulo en $\mathcal{YD}^{H^*}_{H^*}$, y que el funtor así definido, junto con el isomorfismo natural $\phi = \mathrm{id}$, es un funtor entre categorías trenzadas. Por lo mismo que antes, $\mathcal{YD}^{H^{*\mathrm{bop}}}_{H^{*\mathrm{bop}}}$ es también equivalente a esta última, y por ende a ${}^H_H\mathcal{YD}$. Hemos probado entonces que las categorías

$${}^H_H\mathcal{YD}, \quad \mathcal{YD}^{H^*}_{H^*}, \quad {}^{H^{\mathrm{bop}}}_{H^{\mathrm{bop}}}\mathcal{YD}, \quad \mathcal{YD}^{H^{*\mathrm{bop}}}_{H^{*\mathrm{bop}}}$$

son equivalentes como categorías trenzadas cuando H es de dimensión finita.

No es tan sencillo sin embargo ver qué otras categorías de Yetter–Drinfeld son equivalentes.

1.3.3. LEMA. *Sea H un álgebra de Hopf.*

1. *Las categorías $\mathcal{YD}^H_H$ y ${}^H_H\mathcal{YD}$ son equivalentes (como categorías trenzadas).*
2. *Las categorías ${}^H_H\overline{\mathcal{YD}}$ e $\mathcal{YD}^{H^{\mathrm{cop}}}_{H^{\mathrm{cop}}}$ son equivalentes (como categorías trenzadas).*

PRUEBA. 1. Si M es un objeto en ${}_H^H\mathcal{YD}$, tomamos FM como el mismo espacio vectorial pero con la estructura dada por

$$m \leftharpoondown h = \mathcal{S}^{-1}(h)m, \quad \delta(m) = m_{(0)} \otimes \mathcal{S}(m_{(-1)}).$$

Con esta estructura FM es un objeto en $\mathcal{YD}_H^H$, ya que

$$\begin{aligned}
\delta(m \leftharpoondown h) &= (\mathcal{S}^{-1}(h)m)_{(0)} \otimes \mathcal{S}((\mathcal{S}^{-1}(h)m)_{(-1)}) \\
&= \mathcal{S}^{-1}(h_{(2)})m_{(0)} \otimes \mathcal{S}(\mathcal{S}^{-1}(h_{(3)})m_{(-1)}h_{(1)}) \\
&= m_{(0)} \leftharpoondown h_{(2)} \otimes \mathcal{S}(h_{(1)})\mathcal{S}(m_{(-1)})h_{(3)} \\
&= \delta_0(m) \leftharpoondown h_{(2)} \otimes \mathcal{S}(h_{(1)})\delta_1(m)h_{(3)},
\end{aligned}$$

denotando $\delta(m) = \delta_0(m) \otimes \delta_1(m)$. Se toma $\eta_{M,N} : FM \otimes FN \to F(M \otimes N)$ dado por $\eta_{M,N}(m \otimes n) = n_{(-1)}m \otimes n_{(0)}$. Así, el par (F, η) resulta ser una equivalencia entre categorías trenzadas. La demostarción es directa, y se hará aquí la prueba de que se verifican (1.1.3) y (1.1.8):

$$\begin{aligned}
\eta_{M\otimes N,P} \circ (\eta_{M,N} \otimes \mathrm{id})(m \otimes n \otimes p) &= \eta_{M\otimes N,P}(n_{(-1)}m \otimes n_{(0)} \otimes p) \\
&= p_{(-1)}(n_{(-1)}m \otimes n_{(0)}) \otimes p_{(0)} \\
&= p_{(-2)}n_{(-1)}m \otimes p_{(-1)}n_{(0)} \otimes p_{(0)}, \\
\eta_{M,N\otimes P} \circ (\mathrm{id} \otimes \eta_{N,P})(m \otimes n \otimes p) &= \eta_{M,N\otimes P}(m \otimes p_{(-1)}n \otimes p_{(0)}) \\
&= p_{(-4)}n_{(-1)}\mathcal{S}(p_{(-2)})p_{(-1)}m \otimes p_{(-3)}n_{(0)} \otimes p_{(0)} \\
&= p_{(-2)}n_{(-1)}m \otimes p_{(-1)}n_{(0)} \otimes p_{(0)}.
\end{aligned}$$

Para ver la conmutatividad de (1.1.8), simplemente se pone

$$\begin{aligned}
(Fc_{M,N})\eta_{M,N}(m \otimes n) &= (Fc_{M,N})(n_{(-1)}m \otimes n_{(0)}) \\
&= n_{(-3)}m_{(-1)}\mathcal{S}(n_{(-1)})n_{(0)} \otimes n_{(-2)}m_{(0)}, \\
\eta_{N,M}c_{FM,FN}(m \otimes n) &= \eta_{N,M}(\delta_0(n) \otimes m \leftharpoondown \delta_1(n)) \\
&= \eta_{N,M}(n_{(0)} \otimes n_{(-1)}m) \\
&= n_{(-3)}m_{(-1)}\mathcal{S}(n_{(-1)})n_{(0)} \otimes n_{(-2)}m_{(0)}.
\end{aligned}$$

2. Si M es un objeto de ${}_H^H\overline{\mathcal{YD}}$, definimos $FM = M$ como espacio vectorial pero con la estructura

$$m \leftharpoondown h = \mathcal{S}^{-1}(h)m, \qquad \delta(m) = m_{(0)} \otimes m_{(-1)}.$$

Es sencillo probar que (F, id) es una equivalencia entre las categorías. $\square$

Se usarán repetidas veces en esta tesis los duales de las álgebras de Hopf trenzadas rígidas (rígidas como objetos de la categoría). En las categorías de

Yetter–Drinfeld sobre álgebras de Hopf de dimensión finita hay una manera *ad hoc* de definir duales que a veces es útil. Hay sin embargo una definición más general que se hace en cualquier categoría trenzada. Se estudiarán a continuación ambas construcciones.

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y sea R un álgebra de Hopf trenzada de dimensión finita en ${}^H_H\mathcal{YD}$. Bosonizando, se consigue el diagrama $R\#H \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} H$ que verifica $pi = \mathrm{id}$. Dualizando este diagrama, se tiene

$$R^* \otimes H^* \simeq (R\#H)^* \underset{i^*}{\overset{p^*}{\leftrightarrows}} H^* \ ,$$

que verifica $i^*p^* = \mathrm{id}$, por lo que $\mathrm{LKer}(i^*)$ es un álgebra de Hopf trenzada en ${}^{H^*}_{H^*}\mathcal{YD}$. Lo único que hace falta ver es que con la identificación natural de espacios vectoriales entre $R^* \otimes H^*$ y $(R \otimes H)^*$ resulta $\mathrm{LKer}(i^*) = R^* \otimes \varepsilon_H \simeq R^*$. Esto es sencillo observando que, por una cuestión de dimensión, alcanza con ver que $R^* \otimes \varepsilon_H \subseteq \mathrm{LKer}(i^*)$.

La otra construcción, general, es la que sigue. Para ella se usarán los morfismos $\sigma_{M,N} : M^* \otimes N^* \to (M \otimes N)^*$ dados por

$$\sigma_{M,N} = \ M^* \otimes N^* \xrightarrow{c^{-1}} N^* \otimes M^* \xrightarrow{\psi_{N,M}} (M \otimes N)^* \ .$$

Esto no es otra cosa que el morfismo definido por el "apareamiento" dado por el dibujo de la Figura 1.3.c. Allí también se indica σ^{-1}.

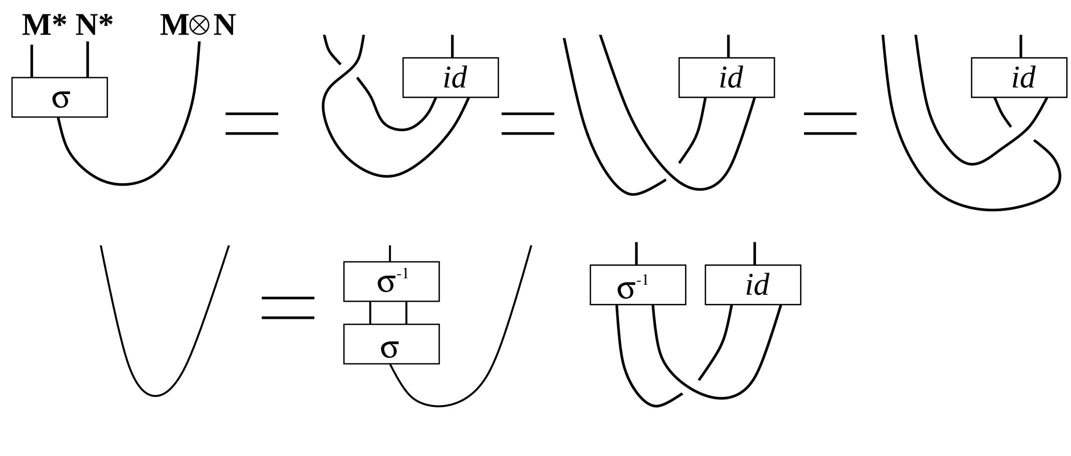

FIGURA 1.3.C. σ y σ^{-1}.

1.3.4. DEFINICIÓN. Sea $\mathcal{C}$ una categoría trenzada y R un objeto rígido de $\mathcal{C}$ que es además un álgebra de Hopf con los morfismos de estructura $m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S}$.

Definimos sobre R^* los morfismos dados por

$$m_{R^*} = \ R^* \otimes R^* \xrightarrow{\sigma} (R \otimes R)^* \xrightarrow{\Delta^*} R^* \ ,$$

$$\Delta_{R^*} = \ R^* \xrightarrow{m^*} (R \otimes R)^* \xrightarrow{\sigma^{-1}} R^* \otimes R^* \ ,$$

$$\mathcal{S}_{R^*} = (\mathcal{S}_R)^*, \quad u_{R^*} = (\varepsilon_R)^*, \quad \varepsilon_{R^*} = (u_R)^*$$

1.3.5. Lema. *Con estos morfismos R^* es un álgebra de Hopf trenzada en $\mathcal{C}$.*

Prueba. El paso delicado es probar la compatibilidad entre la multiplicación y la comultiplicación. La demostración es larga y tediosa, y está hecha en [**AG99**]. Se hará aquí la demostración alternativa con los dibujos, que es la que está hecha en [**Tak99a**].

Primero se observa que la relación entre los morfismos de estructura de R^* y los de R se pueden dibujar como en la Figura 1.3.d. Luego, la demostración es la de la Figura 1.3.e.

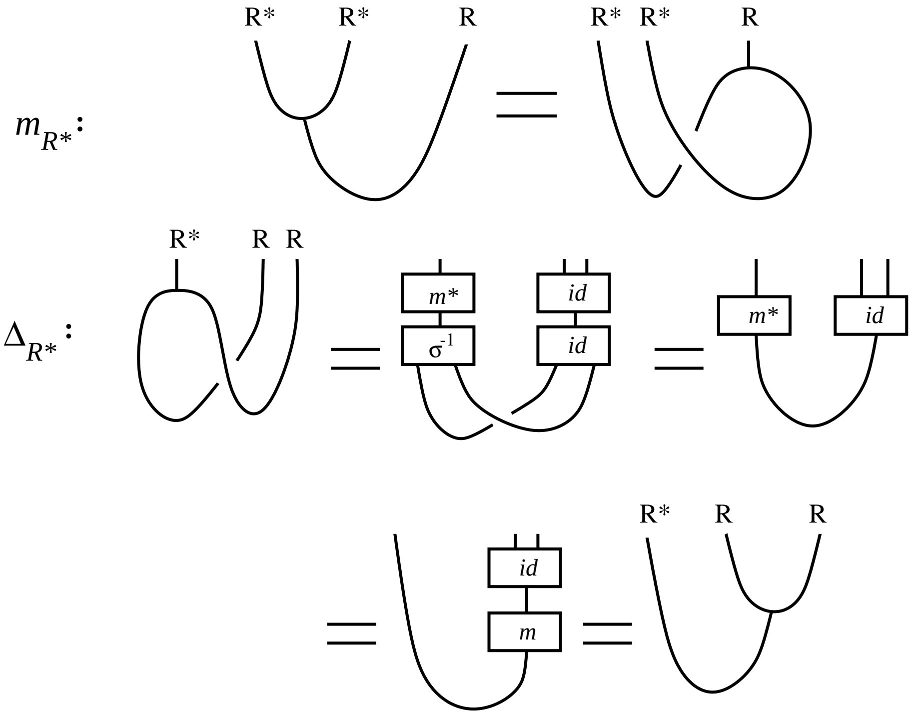

Figura 1.3.d. Relación entre R y R^*.

□

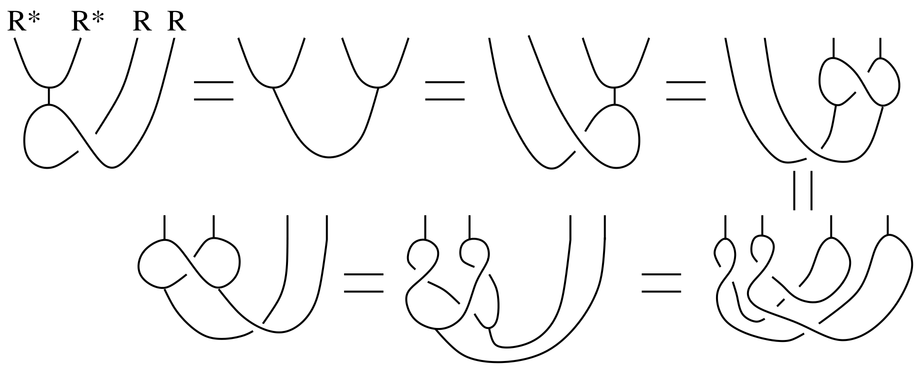

FIGURA 1.3.E. Prueba de 1.3.5.

En particular, para $R \in {}^H_H\mathcal{YD}$, la estructura previa resulta en

$$\begin{aligned}\langle m(f\otimes g), r\rangle &= \langle f, r_{(2)(0)}\rangle\langle g, \mathcal{S}^{-1}(r_{(2)(-1)})r_{(1)}\rangle\\ &= \langle g_{(0)}, r_{(2)}\rangle\langle \mathcal{S}^{-1}(g_{(-1)})f, r_{(1)}\rangle\end{aligned}$$

(gracias a la primera igualdad de la Figura 1.3.C), y

$$\langle f_{(1)}, r\rangle\langle f_{(2)}, s\rangle = \langle f, mc(s\otimes r)\rangle = \langle f, (s_{(-1)}r)s_{(0)}\rangle$$
$$\langle \mathcal{S}f, r\rangle = \langle f, \mathcal{S}r\rangle, \quad 1_{R^*} = \varepsilon_R \quad \varepsilon_{R^*}(f) = \langle f, 1_R\rangle.$$

En general, si $\mathcal{C}$ es una categoría trenzada y $A \in \mathcal{C}$ es un objeto rígido que es además un álgebra, entonces A^* con las definiciones de Δ y ε para A^* dadas en 1.3.4 resulta una coálgebra. Recíprocamente, si $C \in \mathcal{C}$ es una coálgebra y al mismo tiempo un objeto rígido entonces C^* con las definiciones de m y u de 1.3.4 resulta un álgebra. En rigor, y al igual que lo que sucede en el caso clásico, para esta última definición no es necesario que C sea un objeto rígido, sino que alcanza con que tenga duales en el sentido de 1.1.16. Esto se debe a que en este caso no se hace uso del isomorfismo natural ϕ de (1.3.1). La multiplicación m es el morfismo definido por la igualdad

$$dr\circ(m\otimes \mathrm{id}) = (dr\otimes dr)(\mathrm{id}\otimes c\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\Delta) : R^*\otimes R^*\otimes R\to \mathbf{1},$$

y la unidad el dado por

$$dr\circ(u\otimes \mathrm{id}) = \varepsilon\circ l_R : \mathbf{1}\otimes R\to \mathbf{1}.$$

Otra construcción que resultará de utilidad es la de los opuestos.

1.3.6. DEFINICIÓN. Sea $\mathcal{C}$ una categoría trenzada y R un álgebra de Hopf en $\mathcal{C}$. Como de costumbre, se denota por $\overline{\mathcal{C}}$ la categoría con la trenza inversa

$c^{\overline{\mathcal{C}}}_{M,N} = (c^{\mathcal{C}}_{N,M})^{-1}$. Se define entonces R^{op}, R^{cop} y R^{bop} por

$$\begin{aligned}
m_{R^{\text{op}}} &= m_R \circ c^{-1}_{R,R}, & \Delta_{R^{\text{op}}} &= \Delta_R, & \mathcal{S}_{R^{\text{op}}} &= \mathcal{S}^{-1}_R,\\
m_{R^{\text{cop}}} &= m_R, & \Delta_{R^{\text{cop}}} &= c^{-1}_{R,R} \circ \Delta_R, & \mathcal{S}_{R^{\text{cop}}} &= \mathcal{S}^{-1}_R,\\
m_{R^{\text{bop}}} &= m_R \circ c_{R,R}, & \Delta_{R^{\text{bop}}} &= c^{-1}_{R,R} \circ \Delta_R, & \mathcal{S}_{R^{\text{bop}}} &= \mathcal{S}_R.
\end{aligned}$$

No ofrece dificultad demostrar que con estas definiciones R^{op} y R^{cop} resultan álgebras de Hopf en $\overline{\mathcal{C}}$ y R^{bop} resulta un álgebra de Hopf en $\mathcal{C}$ (esta última construcción es la composición de las dos anteriores).

Si A es un álgebra en $\mathcal{C}$ la definición de m dada para R^{op} se puede aplicar a A, obteniéndose así el álgebra A^{op}. Dualmente, si C es una coálgebra entonces C^{cop} con la definición de Δ dada para R^{cop} es una coálgebra. Tanto A^{op} como C^{cop} pueden considerarse objetos de $\mathcal{C}$ o de $\overline{\mathcal{C}}$.

1.3.7. Observación. Gracias al lema 1.2.4, y al igual que en el caso clásico, si $\mathcal{S}$ es un isomorfismo entonces $\mathcal{S} : R \to R^{\text{bop}}$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf.

1.4. Integrales

Un álgebra de Hopf de dimensión finita tiene espacios unidimensionales de integrales, tanto a izquierda como a derecha. Estos conceptos se pueden "trenzar" como se hace en [**Tak99a**], de donde tomamos toda esta sección. Definimos primero los conceptos de *módulo* y *comódulo* de la manera obvia.

1.4.1. Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal y A un álgebra en $\mathcal{C}$. Un *A-módulo a izquierda* es un par $(M, \rightharpoonup)$ tal que $M \in \mathcal{C}$ y $\rightharpoonup : A \otimes M \to M$ es un morfismo de $\mathcal{C}$ que verifica

$$\begin{aligned}
&\rightharpoonup \circ (\mathrm{id} \otimes \rightharpoonup) = \rightharpoonup \circ (m \otimes \mathrm{id}) : A \otimes A \otimes M \to M,\\
&\rightharpoonup \circ (u \otimes \mathrm{id}) \circ l^{-1}_M = \mathrm{id} : M \to M.
\end{aligned}$$

Si C es una coálgebra de $\mathcal{C}$, un *C-comódulo a izquierda* es un par (M, δ) tal que M es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\delta : M \to C \otimes M$ verifica

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta = M \to C \otimes C \otimes M,\\
&l_M \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \delta = \mathrm{id} : M \to M.
\end{aligned}$$

De manera análoga se define *módulo* y *comódulo a derecha.* De la misma manera, rutinaria, se define para un álgebra de Hopf R en $\mathcal{C}$ el concepto de *módulo de*

Hopf, que es un triple $(M, \rightharpoonup, \delta)$ tal que $(M, \rightharpoonup)$ es un módulo, (M, δ) es un comódulo y conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} R \otimes M \arrow[rr, "\rightharpoonup"] \arrow[d, "\Delta\otimes\delta"'] & & M \arrow[d, "\delta"] \\ R \otimes R \otimes R \otimes M \arrow[rr, "(m\otimes\rightharpoonup)(\mathrm{id}\,\otimes c\otimes \mathrm{id})"'] & & R \otimes M \end{tikzcd}$$

Al igual que en el caso clásico, M es un módulo de Hopf si y sólo si δ es un morfismo de módulos, si y sólo si $\rightharpoonup$ es un morfismo de comódulos, tomando en ambos casos la estructura “diagonal” sobre $R \otimes M$, esto es,

$$R \otimes R \otimes M \xrightarrow{\Delta_R\otimes \mathrm{id}\,\otimes\,\mathrm{id}} R \otimes R \otimes R \otimes M \xrightarrow{\mathrm{id}\,\otimes c\otimes \mathrm{id}} R \otimes R \otimes R \otimes M \xrightarrow{m_R\otimes\rightharpoonup} R \otimes M$$

y

$$R \otimes M \xrightarrow{\Delta_R\otimes\delta} R \otimes R \otimes R \otimes M \xrightarrow{\mathrm{id}\,\otimes c\otimes \mathrm{id}} R \otimes R \otimes R \otimes M \xrightarrow{m_R\otimes \mathrm{id}\,\otimes\,\mathrm{id}} R \otimes R \otimes M.$$

1.4.2. Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal con ecualizadores. Si C es una coálgebra en $\mathcal{C}$ con unidad $u : \mathbf{1} \to C$ que es un morfismo de coálgebras y M es un C-comódulo a izquierda, se define el espacio de coinvariantes como

$$^{\mathrm{co}C}M = \mathrm{Eq}(\ M \underset{u\otimes \mathrm{id}}{\overset{\delta}{\rightrightarrows}} C \otimes M\ ).$$

Sea A un álgebra con counidad (o aumentación), esto es, un morfismo $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$ que es un morfismo de álgebras. Si se trabaja en una categoría interna a la de conjuntos (por ejemplo una categoría de Yetter–Drinfeld), se puede definir los invariantes de un A módulo M como

$$^{A}M = \{m \in M \mid a \rightharpoonup m = \varepsilon(a)m\ \forall a \in A\}.$$

Esta definición está hecha en términos de elementos, y por lo tanto no es categórica. En lugar de esto, para álgebras con counidad que además son objetos finitos, se define una estructura de comódulo a derecha δ sobre M por

$$\delta = M \xrightarrow{bl\otimes \mathrm{id}} {}^*A \otimes A \otimes M \xrightarrow{\mathrm{id}\,\otimes\rightharpoonup} {}^*A \otimes M \xrightarrow{c} M \otimes {}^*A, \tag{1.4.3}$$

y se toman los invariantes como los coinvariantes de ${}^*A$, esto es, $^{A}M = M^{\mathrm{co}\,{}^*A}$.

1.4.4. Observación. No es difícil comprobar que en el caso de categorías internas a la de espacios vectoriales (en tanto categorías monoidales) ambas definiciones de invariantes coinciden.

Copiando la demostración de [**Swe69**, Th. 4.1.1] se demuestra el teorema principal de módulos de Hopf para categorías trenzadas. Específicamente, se tiene

1.4.5. Proposición. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal y R un álgebra de Hopf en $\mathcal{C}$. Entonces la categoría de módulos de Hopf sobre R, ${}_R^R\mathcal{M}$, es equivalente a $\mathcal{C}$ mediante*

$$\mathcal{C} \ni V \mapsto (R \otimes V, m \otimes \mathrm{id}, \Delta \otimes \mathrm{id}) \in {}_R^R\mathcal{M},$$
$$\mathcal{C} \ni {}^{\mathrm{co}R}M \leftarrow\!\shortmid M \in {}_R^R\mathcal{M}.$$

Análogamente se prueba el teorema para módulos a derecha. □

1.4.6. Definición. Sea R un álgebra de Hopf rígida en la categoría trenzada $\mathcal{C}$. Definimos en R^* las estructuras de R-módulo y R-comódulo a derecha dadas por

$$\leftharpoonup := R^* \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathcal{S} \otimes br} R^* \otimes R \otimes R \otimes R^* \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes c \otimes \mathrm{id}} R^* \otimes R \otimes R \otimes R^*$$
$$\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}} R^* \otimes R \otimes R^* \xrightarrow{dr \otimes \mathrm{id}} R^*,$$
$$\delta := R^* \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes br} R^* \otimes R \otimes R^* \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}} R^* \otimes R \otimes R \otimes R^*$$
$$\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes c^{-1} \otimes \mathrm{id}} R^* \otimes R \otimes R \otimes R^* \xrightarrow{dr \otimes c} R^* \otimes R,$$

(en dibujos, se pueden ver en las Figura 1.4.a). Es sencillo probar que esto da una estructura de módulo de Hopf. Se prueba en la misma Figura 1.4.a que la estructura de comódulo es la misma que la de (1.4.3) construida sobre la acción regular a izquierda de R^* sobre sí mismo, es decir la acción $m_{R^*} : R^* \otimes R^* \to R^*$.

Con esto, definimos los espacios de integrales a izquierda de R por

$$\mathcal{I}_\ell(R^*) = {}^{R^*}R^* = (R^*)^{\mathrm{co}R}.$$

El teorema fundamental sobre módulos de Hopf dice que

$$R^* \simeq \mathcal{I}_\ell(R^*) \otimes R,$$

y cambiando el par (R, R^*) por $({}^*R, R)$ obtenemos

$$R \simeq \mathcal{I}_\ell(R) \otimes {}^*R.$$

En consecuencia, $R^* \simeq \mathcal{I}_\ell(R^*) \otimes \mathcal{I}_\ell(R) \otimes {}^*R \simeq \mathcal{I}_\ell(R^*) \otimes \mathcal{I}_\ell(R) \otimes R^*$.

1.4.7. Observación. Si la categoría $\mathcal{C}$ tiene coecualizadores, se puede aplicar a la última igualdad el funtor $- \otimes_{R^*} \mathbf{1}$ y obtenemos que

$$\mathbf{1} \simeq \mathcal{I}_\ell(R) \otimes \mathcal{I}_\ell(R^*),$$

con lo que $\mathcal{I}_\ell(R)$ es un objeto inversible en $\mathcal{C}$ (es decir, tiene un inverso para el producto tensorial).

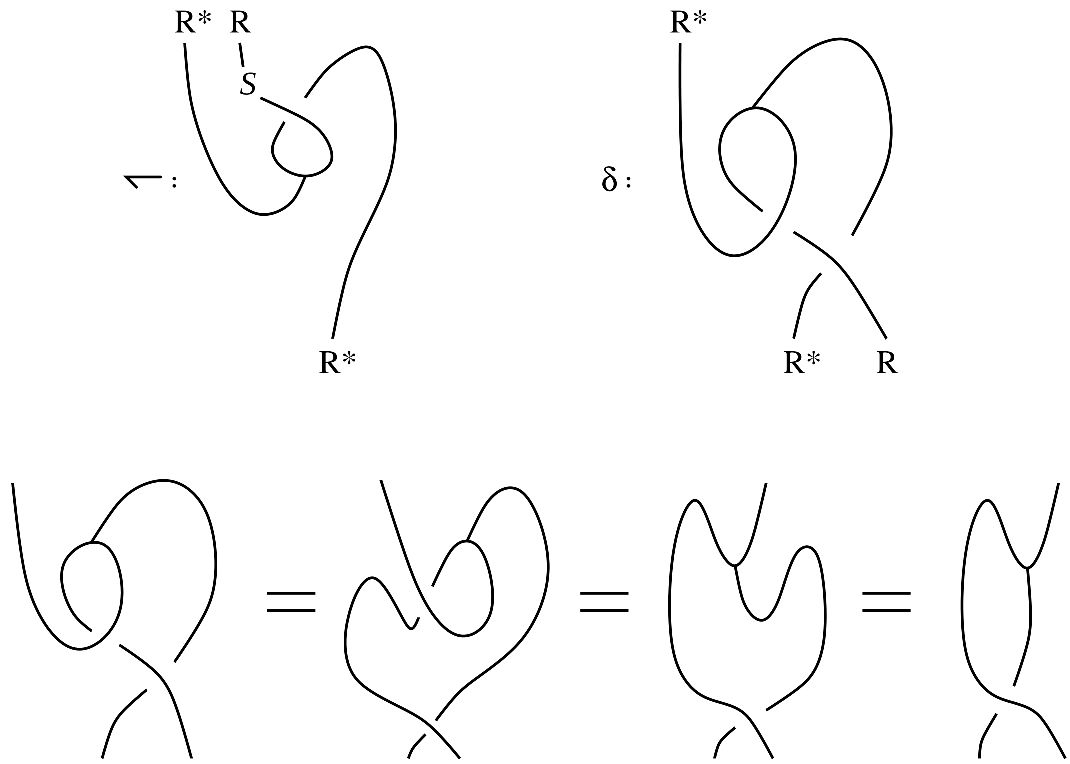

Figura 1.4.a. Acciones $\leftharpoondown$ y δ.

1.4.8. Observación. Denotemos por $\mathcal{I}$ el espacio de integrales a izquierda de R^*. Mirando la definición de la acción $\leftharpoondown$, vemos que el isomorfismo $R^* \simeq \mathcal{I} \otimes R$ se puede factorizar por $\mathcal{I} \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathcal{S}} \mathcal{I} \otimes R \xrightarrow{\beta} R^*$ para cierto morfismo β, lo que implica que $\mathcal{I} \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathcal{S}} \mathcal{I} \otimes R$ tiene una inversa a izquierda. Tensorizando con R a la izquierda y componiendo con el isomorfismo

$$R \otimes \mathcal{I} \otimes R \xrightarrow{c} \mathcal{I} \otimes R \otimes R \to R^* \otimes R,$$

obtenemos que $R^* \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathcal{S}} R^* \otimes R$ tiene una inversa a izquierda. Como el morfismo $\mathbf{1} \xrightarrow{\varepsilon^*} R^* \xrightarrow{u^*} \mathbf{1}$ es la identidad, se puede componer convenientemente $(\mathrm{id}\otimes\mathcal{S})$ y su inversa a izquierda con $\varepsilon^* \otimes \mathrm{id}_R$ y $u^* \otimes \mathrm{id}_R$, y se obtiene así una inversa a izquierda para $\mathcal{S}$. Como el mismo argumento sirve para $\mathcal{S}^*$, se tiene que $\mathcal{S}^*$ tiene una inversa a izquierda y por ende $\mathcal{S}$ tiene una inversa a derecha.

1.4.9. Observación. Supongamos que $\mathcal{C}$ es interna a la categoría $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ y sea R rígida en $\mathcal{C}$. Sea Λ una integral a izquierda no nula de R^*. Mirando la acción $\leftharpoondown$, se obtiene que la forma bilineal $R \otimes R \to \mathbf{1}$ dada por $\Lambda m_R(\mathrm{id}\otimes\mathcal{S})c$ es no degenerada. El hecho de que c y $\mathcal{S}$ sean inversibles implica que también la forma bilineal

$$R \otimes R \xrightarrow{m} R \xrightarrow{\Lambda} \mathbf{1}$$

es no degenerada.

Se define el espacio de integrales a derecha $\mathcal{I}_r({}^*R) = {}^*R^{{}^*R} = {}^{\mathrm{co}R}({}^*R)$ en forma análoga, de manera tal que ${}^*R \simeq R \otimes \mathcal{I}_r({}^*R)$, $R \simeq R^* \otimes \mathcal{I}_r(R)$.

Por lo observado en 1.4.4, tenemos para un álgebra de Hopf en una categoría interna a $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ (por ejemplo, una de Yetter–Drinfeld) la conocida ecuación

$$x \in \mathcal{I}_\ell(R) \Leftrightarrow yx = \varepsilon(y)x \quad \forall y \in R. \tag{1.4.10}$$

1.5. Categorías de Yetter–Drinfeld sobre grupos finitos

Durante toda la sección, Γ será un grupo finito cuyo orden no es múltiplo de la característica del cuerpo de base $\mathbf{k}$. Veremos que la categoría ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ es semisimple como categoría abeliana y daremos una descripción de los objetos irreducibles. En el lenguaje de los bimódulos de Hopf, esto se puede encontrar en [**DPR90**] y fue generalizado en [**CR97**, Prop 3.3] (ver también [**Cib97, Whi96**]). Como notación, si G es un grupo usaremos $\widehat{G}$ para el conjunto de representaciones irreducibles de G módulo isomorfismo.

Sea $\mathcal{Q} \subset \Gamma$ un subconjunto que tiene exactamente un elemento en cada clase de conjugación de Γ. Para $g \in \Gamma$, sea

$$\Gamma_g = \{h \in \Gamma \mid hg = gh\}, \quad \mathcal{O}_g = \{kgk^{-1} \mid k \in \Gamma\}.$$

Para una representación $\rho : \Gamma_g \to \mathrm{Aut}(Y)$ ponemos

1.5.1. Definición. Definimos en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ el objeto $M(g,\rho)$ por

$$M(g,\rho) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_g}^{\Gamma} Y = \mathbf{k}\Gamma \otimes_{\mathbf{k}\Gamma_g} Y,$$

con la acción usual (i.e. multiplicación en la componente de la izquierda) de $\mathbf{k}\Gamma$ y la coacción dada por $\delta(h \otimes y) = hgh^{-1} \otimes (h \otimes y)$. En otras palabras, si denotamos ${}^h y = h \otimes y$ y ${}^h g = hgh^{-1}$, tenemos

$$k \rightharpoonup {}^h y = {}^{kh} y, \quad \delta({}^h y) = {}^h g \otimes {}^h y.$$

De esta manera, tenemos que $\dim(M(g,\rho)) = [\Gamma : \Gamma_g] \times \dim(\rho)$.

1.5.2. Proposición. 1. *Los objetos $M(g,\rho)$, $g \in \mathcal{Q}$, $\rho \in \widehat{\Gamma_g}$ son irreducibles y no isomorfos entre sí.*
2. *Todo objeto de ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ se descompone como suma directa de estos objetos.*

Prueba. Sea $g \in \mathcal{Q}$, $\rho \in \widehat{\Gamma_g}$. Sea $0 \neq W \subseteq M(g,\rho)$ un submódulo de Yetter–Drinfeld. Tenemos que probar que $W = M(g,\rho)$. Sea E_g un conjunto de representantes de la coclases a izquierda de Γ módulo Γ_g, es decir, $\Gamma = \bigcup_{x \in E_g} x\Gamma_g$. Notamos que $M(g,\rho) = \bigoplus_{x \in E_g} \mathbf{k}x \otimes Y$ como espacios vectoriales, donde Y es el espacio de representación de ρ. Sea $0 \neq v \in W$, $v = \sum_{x \in E_g} x \otimes v_x = \sum_{x \in E_g} {}^x(v_x)$. Sea $p_x = \delta_{^x g} \in \mathbf{k}^\Gamma$ definido por $p_x(t) = \delta_{^x g, t}$. Se tiene entonces

$$\delta(v) = \sum_{x \in E_g} {}^x g \otimes {}^x(v_x) \in \mathbf{k}\Gamma \otimes W \Rightarrow {}^x(v_x) = (p_x \otimes \mathrm{id})(\delta(v)) \in W \quad \forall x \in E_g.$$

Ahora, como $v \neq 0$, resulta $v_y \neq 0$ para algún $y \in E_g$. Luego tenemos que $1 \otimes v_y = y^{-1} \rightharpoonup ({}^y(v_y)) \in \mathbf{k}\Gamma \rightharpoonup W = W$, pero $\mathbf{k}\Gamma_g \rightharpoonup (1 \otimes v_y) = \mathbf{k}1 \otimes Y$ por la irreducibilidad de ρ, y luego $\mathbf{k}1 \otimes Y \subseteq W$. Ergo,

$$\forall x \in E_g,\ \forall v \in Y, \quad {}^x v = (x \rightharpoonup (1 \otimes v)) \in (\Gamma \rightharpoonup W) \subseteq W,$$

de donde se sigue que $W = M(g, \rho)$.

Sea ahora $g' \in \mathcal{Q}$ y $\rho' : \Gamma_{g'} \to \mathrm{Aut}(Y')$ una representación irreducible de $\Gamma_{g'}$. Definimos $M(g', \rho')$ como antes. Si $g \neq g'$, es claro que $M(g, \rho) \not\simeq M(g', \rho')$ porque $M(g, \rho)$ tiene elementos de grado g y $M(g', \rho')$ no los tiene. Si $g = g'$ y $\rho \not\simeq \rho'$ entonces $M(g, \rho) \not\simeq M(g', \rho')$ porque cualquier isomorfismo, siendo un morfismo de comódulos, se restringe a un isomorfismo entre Y e Y'.

Luego, tenemos una colección $M(g, \rho)$ de objetos irreducibles no isomorfos entre sí tomando $g \in \mathcal{Q}$ y $\rho \in \widehat{\Gamma_g}$. Estos son todos los objetos irreducibles en ${}_H^H\mathcal{YD}$, ya que

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in \mathcal{Q}} \sum_{\rho \in \widehat{\Gamma_g}} (\dim M(g, \rho))^2 &= \sum_{g \in \mathcal{Q}} \sum_{\rho \in \widehat{\Gamma_g}} ([\Gamma : \Gamma_g] \dim \rho)^2 \\
&= \sum_{g \in \mathcal{Q}} ([\Gamma : \Gamma_g]^2 \sum_{\rho \in \widehat{\Gamma_g}} (\dim \rho)^2) = \sum_{g \in \mathcal{Q}} ([\Gamma : \Gamma_g])^2 (\# \Gamma_g) \\
&= \sum_{g \in \mathcal{Q}} (\# \mathcal{O}_g)^2 (\# \Gamma_g) = \sum_{g \in \mathcal{Q}} (\# \mathcal{O}_g)(\# \Gamma) \\
&= (\# \Gamma) \sum_{g \in \mathcal{Q}} (\# \mathcal{O}_g) = (\# \Gamma)(\# \Gamma) = \dim(\mathcal{D}(H)).
\end{aligned}$$

El teorema 1.1.21 se aplica para dar la tesis. ☐

Como corolario inmediato se tiene que

1.5.3. Corolario. *Si Γ es abeliano entonces todo módulo en ${}_H^H\mathcal{YD}$ se puede descomponer como suma directa de submódulos de dimensión* 1.

Prueba. Si $M(g, \rho)$ es irreducible, $\dim(M(g, \rho)) = [\Gamma : \Gamma_g] \times \deg \rho = 1$. ☐

1.6. q-números

Sea $\mathbf{q}$ una indeterminada sobre $\mathbf{k}$. Se usará a lo largo de toda la tesis los q-números, definidos por

$$\begin{aligned}(n)_{\mathbf{q}} &= \frac{\mathbf{q}^n - 1}{\mathbf{q} - 1} = 1 + \mathbf{q} + \mathbf{q}^2 + \cdots + \mathbf{q}^{n-1},\\ (n)_{\mathbf{q}}^! &= \prod_{i=1}^{n} (i)_{\mathbf{q}},\\ \binom{n}{m}_{\mathbf{q}} &= \frac{(n)_{\mathbf{q}}^!}{(m)_{\mathbf{q}}^! \, (n-m)_{\mathbf{q}}^!} \text{ para } n \geq m.\end{aligned}$$

Se puede probar por inducción que $\binom{n}{m}_{\mathbf{q}} \in \mathbb{Z}[\mathbf{q}]$, por lo que tiene sentido evaluar cualquiera de estas expresiones en $\mathbf{q} = q$ con cualquier elemento $q \in \mathbf{k}$. Definimos entonces $(n)_q$, $(n)_q^!$, $\binom{n}{m}_q$ como las expresiones anteriores evaluadas en $\mathbf{q} = q$. Los naturales, factoriales y combinatorios clásicos se recuperan en $\mathbf{q} = 1$.

En la literatura (v.g. [**Lus93**]) se suelen usar también otros q-números, que se los denota y define como sigue:

$$\begin{aligned}[n]_{\mathbf{q}} &= \frac{\mathbf{q}^n - \mathbf{q}^{-n}}{\mathbf{q} - \mathbf{q}^{-1}} = \mathbf{q}^{n-1} + \mathbf{q}^{n-3} + \cdots + \mathbf{q}^{-n+1},\\ [n]_{\mathbf{q}}^! &= \prod_{i=1}^{n} [i]_{\mathbf{q}},\\ \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_{\mathbf{q}} &= \frac{[n]_{\mathbf{q}}^!}{[m]_{\mathbf{q}}^! \, [n-m]_{\mathbf{q}}^!} \text{ para } n \geq m.\end{aligned}$$

Se prueba ahora que $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_{\mathbf{q}} \in \mathbb{Z}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^{-1}]$, y estas expresiones tienen sentido para $\mathbf{q} = q$ con $q \in \mathbf{k}^{\times}$. Es fácil encontrar una relación entre ambos tipos de q-números:

$$\mathbf{q}^{n-1}[n]_{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}^{2n} - 1}{\mathbf{q}^2 - 1} = (n)_{\mathbf{q}^2} = (2n)_{\mathbf{q}} / (2)_{\mathbf{q}}.$$

CAPíTULO 2

Álgebras de Nichols y álgebras de Hopf punteadas

2.1. Pares trenzados

Ciertos resultados (por ejemplo el lema 2.2.5) permitirán pasar de ciertas categorías trenzadas a otras. Por esto, a menudo será conveniente "olvidar" las categorías trenzadas en que viven los objetos con los que se trabaja. La mejor manera de hacerlo es usar el concepto de *par trenzado.*

2.1.1. Definición. Un par (V, c) se dice *par trenzado* (o PT) si V es un espacio vectorial y $c \in \operatorname{Aut}(V \otimes V)$ verifica la ecuación de trenzas de (1.1.10), tomando $M = N = P = V$. Esto es,

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c).$$

En 1.1.19 se definió la representación natural de $\mathbb{B}_n$ en $V^{\otimes n}$ para V un objeto de una categoría trenzada. Es claro que esta definición tiene sentido para (V, c) un par trenzado, con la misma representación $\sigma_i \mapsto c_{i,i+1}$.

2.1.2. Observación. La construcción hoy en día conocida como FRT permite ver todo par trenzado de dimensión finita como objeto de una categoría trenzada abeliana (más aun, con sumas directas para cualquier colección de objetos). La construcción asocia al par trenzado (V, c) una coálgebra co-quasi-triangular, de manera tal que V es un comódulo de la coálgebra y c es precisamente su trenza en la categoría. Más en general, si se tienen espacios vectoriales de dimensión finita $V_1, \dots, V_n$ e isomorfismos $c_{ij} : V_i \otimes V_j \to V_j \otimes V_i$ tal que se verifica la ecuación de trenzas de 1.1.10, reemplazando M, N, P por V_i, V_j, V_k para todos los i, j, k, entonces existe una coálgebra CQT tal que todos los V_i son comódulos sobre ella y las trenzas entre los V_i, V_j son precisamente los morfismos c_{ij}.

Tenemos entonces una manera no categórica de ver las las álgebras de Hopf trenzadas, como se hace en [**Tak99a**]. A menudo, cuando hablemos de "álgebras de Hopf trenzadas" estaremos refiriéndonos a esta definición no categórica.

2.1.3. Definición. Una 4-upla (R, c, m, Δ) es una *biálgebra trenzada* si (R, c) es un par trenzado, (R, m) es un álgebra con unidad u, (R, Δ) es una coálgebra con counidad ε y u es un morfismo de coálgebras, ε es multiplicativo y se verifica (1.2.2). Los distintos conjuntos de axiomas equivalentes que se presentan a continuación de la definición 1.2.1 se pueden presentar en este caso.

Un *álgebra de Hopf trenzada* es una biálgebra en el sentido anterior que tiene una inversa de la identidad con respecto al producto de convolución, es decir, $\mathcal{S} : R \to R$ que verifica (1.2.3).

Será muchas veces útil tener en cuenta el dual de un par trenzado. Esto no siempre se puede hacer, porque no siempre la trenza c permite dar una trenza entre V y V^*. La condición necesaria para poder hablar de trenza entre V y V^* es que c sea *rígida* o *clausurable*, noción que pasamos a definir.

Sea $f : X \otimes Y \to Y \otimes X$ una transformación lineal entre espacios de dimensión finita. Es costumbre denotar por $f^\flat : Y \otimes X^* \to X^* \otimes Y$ el morfismo definido por

$$\langle(\mathrm{id} \otimes x), f^\flat(y \otimes \alpha)\rangle = \langle f(x \otimes y), (\alpha \otimes \mathrm{id})\rangle,$$

donde usamos el "apareo" $\langle(a \otimes b), (\beta \otimes \alpha)\rangle = \langle a, \alpha\rangle\langle b, \beta\rangle$. En dibujos, la definición de $f^\flat$ se expresa como en la Figura 2.1.A.

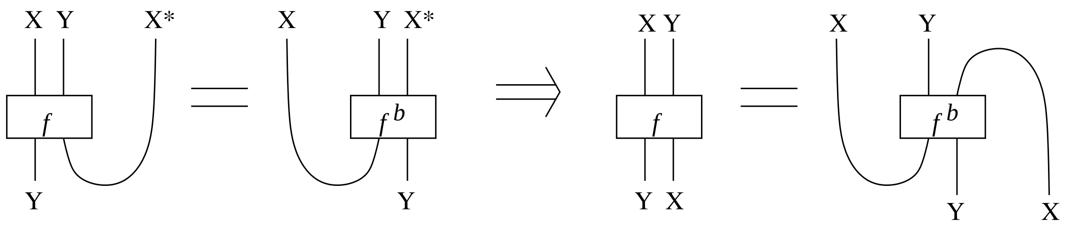

FIGURA 2.1.A. Definición de $f^\flat$.

2.1.4. DEFINICIÓN ([**Lyu86, Gur91**]). Sea (V, c) un PT tal que V es de dimensión finita. Decimos que (V, c) es *rígido*, o brevemente que es un *PTR* (también diremos que c es *clausurable*) si $c^\flat \in \mathrm{Hom}(V \otimes V^*, V^* \otimes V)$ es un isomorfismo.

En [**LS97**] se prueba que es equivalente que $c^\flat$ sea un isomorfismo a que $(c^{-1})^\flat$ lo sea. Gracias a esto, cuando (V, c) es un PTR podemos definir

$$c_{V,V^*} = (c^{-1})^\flat : V \otimes V^* \to V^* \otimes V,$$
$$c_{V^*,V} = (c^\flat)^{-1} : V^* \otimes V \to V \otimes V^* \text{ y}$$
$$c_{V^*,V^*} = c^* : V^* \otimes V^* \to V^* \otimes V^*,$$

donde se usa el apareo de arriba en la definición de c^*. En dibujos, la definición de c_{V,V^*} se da en la Figura 2.1.B. Más aun, en este caso tanto V como V^* se pueden considerar objetos de la misma categoría trenzada, y los morfismos de evaluación y coevaluación $e : V \otimes V^* \to \mathbf{k}$ y $b : \mathbf{k} \to V^* \otimes V$ (usamos aquí el

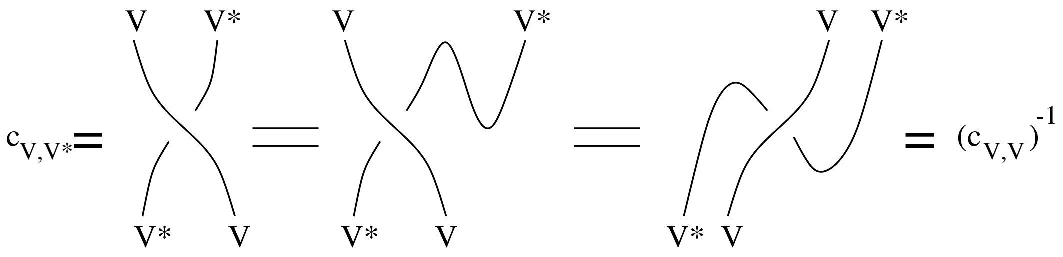

FIGURA 2.1.B. Definición de c_{V,V^*}.

isomorfismo entre $^*V$ y V^* de 1.1.17) son morfismos en la categoría. Luego, en virtud de 2.1.2, la condición de que c sea clausurable es equivalente a la condición de que V sea un objeto de una categoría trenzada rígida.

2.1.5. DEFINICIÓN. Decimos que un álgebra de Hopf trenzada de dimensión finita (R, c) es *rígida* si R es un álgebra de Hopf en una categoría rígida. Esto es equivalente a que (R, c) sea un PTR y que los morfismos de estructura de R conmuten con la trenza. En particular, reemplazando P por R y R^* se tiene

$$c_{P,R}(\mathrm{id}\otimes m_R) = (m_R \otimes \mathrm{id})c_{P,(R\otimes R)} : P \otimes R \otimes R \to R \otimes P,$$
$$(c_{R,P})^{-1}(\mathrm{id}\otimes m_R) = (m_R \otimes \mathrm{id})(c_{(R\otimes R),P})^{-1} : P \otimes R \otimes R \to R \otimes P,$$

e igualdades análogas para $\Delta, u, \varepsilon, \mathcal{S}$.

Muchos de los resultados "clásicos" para álgebras de Hopf de dimensión finita se pueden "trenzar" para dar resultados análogos en álgebras de Hopf trenzadas rígidas. En [**Tak99a**] se recopilan gran parte de estos resultados. En esta tesis usaremos la existencia de una integral no nula (tanto en R como en R^*) y la existencia de la forma no degenerada dada por esta, como en 1.4.9.

2.2. Vendrás del caso abeliano o serás de TGD

2.2.1. DEFINICIÓN. Sea (V, c) un PT. Decimos que $V = \oplus_i V_i$ es *una descomposición de* V si $c(V_i \otimes V_j) = V_j \otimes V_i$ $\forall i, j$. En este caso, llamamos c_{ij} a la restricción $c_{ij} = c|_{V_i\otimes V_j} : V_i \otimes V_j \to V_j \otimes V_i$.

El corolario 1.5.3 sugiere la siguiente definición:

2.2.2. DEFINICIÓN. Sea (V, c) un par trenzado. Diremos que V *viene del caso abeliano* (o que *es de TGD*) si se puede descomponer como $V = \oplus_{i=1}^n V_i$ donde cada V_i tiene dimensión 1. Si $0 \neq x_i \in V_i$, y $c(x_i \otimes x_j) = q_{ij}x_j \otimes x_i$ diremos que V es de TGD *con base* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *y matriz* (q_{ij}). La sigla "TGD" es por *Tipo Grupo Diagonal*, denominación que se explicará con detalle en 2.7.5.

Contentémonos, por ahora, con notar que en 1.5.3 se pedía que $\mathbf{k}\Gamma$ fuese semisimple. Es posible tener Γ abeliano con $\operatorname{car}\mathbf{k} \mid |\Gamma|$ y $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ que no viene del caso abeliano (tómese simplemente $\mathbf{k}$ de característica p, $\Gamma = C_p$ con generador g, ρ la representación de grado 2 dada por $\rho(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y se tiene $V = M(g, \rho)$ un módulo de este tipo). Una de las ventajas de la terminología de 2.7.5 es que distingue estos casos.

Por otra parte, es usual que aún siendo Γ no abeliano y $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ con $\dim V > 1$, resulte que V viene del caso abeliano mirado estrictamente como par trenzado (no como objeto en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$). Lo que a menudo sucede es que hay un subgrupo abeliano invariante $H \triangleleft \Gamma$ y V se puede considerar como un objeto de la categoría ${}^{\mathbf{k}H}_{\mathbf{k}H}\mathcal{YD}$. Usaremos el siguiente:

2.2.3. Lema. *Sea Γ un grupo finito y $V = \oplus_i M(g_i, \rho_i)$ un objeto en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$. Sea G el subgrupo generado por las órbitas $\mathcal{O}_{g_i}$ de todos los g_i. Entonces $G \triangleleft \Gamma$ y, si G es abeliano y $\operatorname{car}\mathbf{k}$ no divide a $|G|$, V viene del caso abeliano.*

Prueba. Consideremos la graduación $V = \oplus_{g\in\Gamma} V^g$, con

$$V^g = \{x \in V \mid \delta(x) = g \otimes x\}.$$

Se observa que como los elementos homogéneos de V tienen grados pertenecientes a las órbitas $\mathcal{O}_{g_i}$, restringiendo la acción de Γ a G se puede considerar V como un objeto en ${}^{\mathbf{k}G}_{\mathbf{k}G}\mathcal{YD}$, con lo que se puede descomponer como suma de G-submódulos de dimensión 1 (estos submódulos suelen no ser objetos de ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$). Lo único que resta observar es que G es invariante, pero esto es inmediato por estar generado por clases de conjugación. $\square$

2.2.4. Lema. *Sea $V = M(g, \rho)$ en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$, $\operatorname{car}\mathbf{k}$ no divide a $|\Gamma|$, y supongamos que Γ_g es invariante en Γ. Entonces V viene del caso abeliano.*

Prueba. En virtud del lema anterior, alcanza con probar que la órbita $\mathcal{O}_g$ genera un subgrupo abeliano de Γ, y para esto a su vez es suficiente ver que los elementos de $\mathcal{O}_g$ conmutan entre sí. Sea entonces $t \in \mathcal{O}_g$, $t = {}^x g$. Tenemos que $\Gamma_t = {}^x\Gamma_g = x\Gamma_g x^{-1} = \Gamma_g$, lo que implica que dados dos elementos t_1 y t_2 cualesquiera en $\mathcal{O}_g$ se tiene $\Gamma_{t_1} = \Gamma_g = \Gamma_{t_2}$. En particular, como $t_1 \in \Gamma_{t_1}$, resulta que t_1 y t_2 conmutan. $\square$

Los lemas anteriores se usarán junto al que sigue:

2.2.5. LEMA.

1. *Sea* $R \in \mathcal{C}$ *un álgebra de Hopf en una categoría trenzada que tiene ecualizadores y que es interna a la categoría de* $\mathbf{k}$*-espacios vectoriales. El subespacio de elementos primitivos*

$$\mathcal{P}(R) = \{x \in R \mid \Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1\}$$

   es un subobjeto de R *en* $\mathcal{C}$*.*
2. *Sea* $R \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ *un álgebra de Hopf que está generada como álgebra por* $\mathcal{P}(R)$*, y supongamos que* $\mathcal{P}(R) = M(g, \rho)$*. Sea* G *el subgrupo generado por* $\mathcal{O}_g$*. Se tiene entonces que la bosonización* $R\#\mathbf{k}\Gamma$ *es una extensión del álgebra de grupo* $\mathbf{k}(\Gamma/G)$ *por* $R\#\mathbf{k}G$*.*
3. *En las condiciones anteriores, si* $\dim \mathcal{P}(R) = 2$ *entonces* $R\#\mathbf{k}\Gamma$ *es una extensión de un álgebra de grupo* $\mathbf{k}(\Gamma/G)$ *por* $R\#\mathbf{k}G$*, para un subgrupo abeliano* $G \lhd \Gamma$*.*

PRUEBA.

1. Consideremos el morfismo $R \to R \otimes R$ dado por $u_R \otimes \mathrm{id}_R + \mathrm{id}_R \otimes u_R$. Es un morfismo en $\mathcal{C}$, lo mismo que Δ_R. Como $\mathcal{P}(R)$ es el ecualizador de ambos morfismos, se tiene el resultado.
2. Sea Y el espacio de representación de ρ, i.e. $\rho : \Gamma_g \to \mathrm{Aut}(Y)$. Ya sabemos que G es normal en Γ. Como $\mathcal{P}(R)$ genera R, se tiene que $\delta(R) \subseteq \mathbf{k}G \otimes R$, con lo que tiene sentido considerar R como un objeto de ${}^{\mathbf{k}G}_{\mathbf{k}G}\mathcal{YD}$. Más aun, es obvio que es un álgebra de Hopf en esta categoría. Luego, tenemos una inclusión de álgebras

$$A = R\#\mathbf{k}G \hookrightarrow R\#H = B.$$

   Esta inclusión es normal en el sentido de [**AD95**]: sea $h \in G$, $x \in \Gamma$, $r \in R$, $s = {}^t v \in M(g, \rho) \subset R$, donde $t \in E_g$ (las coclases a izquierda de Γ/Γ_g). Luego

$$\begin{aligned}
\Delta_B(s) &= \Delta_B(s\#1) = (s_{(1)}\#s_{(2)(-1)}) \otimes (s_{(2)(0)}\#1) = {}^t g \otimes s + s \otimes 1, \\
\mathcal{S}(s) &= \mathcal{S}(s\#1) = -({}^t g)^{-1} s, \\
\Delta_B(x) &= \Delta_B(1\#x) = (1\#x) \otimes (1\#x) = x \otimes x,
\end{aligned}$$

y con esto

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_s(h) &= s_{(1)}h\mathcal{S}(s_{(2)}) = -{}^tgh({}^tg)^{-1}s + sh = -{}^{({}^tg)}hs + sh \in R\#\mathbf{k}G,\\
\mathrm{Ad}_s(r) &= s_{(1)}r\mathcal{S}(s_{(2)}) = -{}^tgr({}^tg)^{-1}s + sr = -({}^tg \rightharpoonup r)s + sr \in R\#\mathbf{k}G,\\
\mathrm{Ad}_x(h) &= x_{(1)}h\mathcal{S}(x_{(2)}) = xhx^{-1} = {}^xh \in R\#\mathbf{k}G,\\
\mathrm{Ad}_x(r) &= x_{(1)}r\mathcal{S}(x_{(2)}) = xrx^{-1} = x \rightharpoonup r \in R\#\mathbf{k}G.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\forall s \in R,\ \mathrm{Ad}_s(R\#\mathbf{k}G) \subseteq R\#\mathbf{k}G$. ya que $\mathcal{P}(R)$ genera R. Luego se tiene una sucesión de álgebras de Hopf

$$\mathbf{k} \longrightarrow R\#\mathbf{k}G \longrightarrow R\#G \longrightarrow \mathbf{k}(\Gamma/G) \longrightarrow \mathbf{k}.$$

Es sencillo probar que esta sucesión verifica las condiciones de [**AD95**, 1.2.3], por lo que resulta exacta.

3. Hay tres posibilidades para $V = \mathcal{P}(R)$:
   (a) V se descompone como $M = M(g_1, \chi_1) \oplus M(g_2, \chi_2)$ con g_i central en Γ y χ_i caracteres.
   (b) $V = M(g, \rho)$ es simple, con $\Gamma_g = \Gamma$ y $\dim \rho = 2$, ó
   (c) $V = M(g, \chi)$ con $[\Gamma : \Gamma_g] = 2$ y χ un caracter.

   En el segundo y tercer caso se aplica directamente el punto 2. Como tenemos $[\Gamma : \Gamma_g] \leq 2$, resulta $\Gamma_g \lhd \Gamma$ y el lema 2.2.4 se aplica sin más. En el primer caso se toma G el subgrupo generado por g_1 y g_2 y se hace una construcción análoga a la del punto 2.

Como corolario tenemos que si $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ tiene dimensión 2 y $\operatorname{car}\mathbf{k}$ no divide a $|\Gamma|$ entonces V viene del caso abeliano. Esto será re-probado en 2.7.7 de manera más sencilla. □

2.3. Álgebras de Nichols: definición y construcciones

En el resto del capítulo se definirán y se darán las primeras propiedades de los objetos principales de estudio de la tesis: las álgebras de Nichols. Estas álgebras están íntimamente relacionadas con las álgebras de Hopf punteadas. Concretamente, un álgebra de Nichols en una categoría de Yetter–Drinfeld sobre un grupo produce por bosonización un álgebra de Hopf punteada, y un álgebra de Hopf punteada produce un álgebra de Hopf en una categoría de Yetter–Drinfeld que suele ser un álgebra de Nichols. Vamos a las definiciones.

2.3.1. Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría trenzada abeliana con sumas directas numerables (por ejemplo una categoría de Yetter–Drinfeld). Un álgebra de

Hopf graduada es simplemente un álgebra de Hopf $R = \oplus_n R(n)$ en $\mathcal{C}$ tal que los morfismos de estructura son morfismos graduados, i.e.

$$m(\bigoplus_{i+j=n}(R(i)\otimes R(j))) \subset R(n), \quad \Delta(R(n)) \subset \bigoplus_{i+j=n}(R(i)\otimes R(j))\,.$$

2.3.2. Proposición (Nichols). *Sea $R = \oplus_{i=0}^N R(i)$ un álgebra de Hopf trenzada en una categoría rígida $\mathcal{C}$, y supongamos que $R(N) \neq 0$. Entonces*

$$\dim R(i) = \dim R(N-i)\ \forall i.$$

Por su similitud con la encontrada en topología algebraica, esta igualdad será denominada *dualidad de Poincaré.*

Prueba. Como R es graduada, es claro que R^* es también graduada en $\mathcal{C}$. Sea $0 \neq \lambda \in R^*$ una integral a izquierda. Tenemos entonces $\lambda = \sum_i \lambda_i$, donde $\lambda_i \in R^*(i)$ es la componente de grado i. Es inmediato, mirando (1.4.10), que cada λ_i es una integral a izquierda en R^*. Luego, por ser el espacio de integrales de dimensión 1, se tiene que $\lambda = \lambda_j$ para algún j. Además, como gracias a 1.4.9 se tiene una forma bilineal no degenerada dada por

$$(x,y) = \langle \lambda, (x_{(-1)}y)\mathcal{S}(x_{(0)})\rangle,$$

se tiene que esta forma se restringe a $R(i)\otimes R(k)$ para $i+k=j$, y por lo tanto $\dim R(i) = \dim R(k)$. En particular, se tiene que $\dim R(i) = 0$ si $i > j$, de donde $j = N$. $\square$

Para nosotros los ejemplos básicos (porque sirven para construir los objetos de estudio de esta tesis) serán los siguientes. Vamos a considerar $\mathcal{C} = {}^H_H\mathcal{YD}$ y $V \in \mathcal{C}$. Se puede definir entonces el álgebra tensorial AV y el álgebra cotensorial CV. Como objetos de ${}^H_H\mathcal{YD}$, ambos coinciden con el espacio

$$AV = CV = TV = \oplus_{n\geq 0} T^n V = \oplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}.$$

La multiplicación de AV es la usual del álgebra tensorial. Denotando por $m_{ij}: A^iV \otimes A^jV \to A^{i+j}V$ la componente de grado (i,j), simplemente se pone $m_{ij} = \mathrm{id}\ \forall i,j$. La unidad de AV es la inclusión en grado 0 de $\mathbf{k}$. De manera dual, si la componente en grado (i,j) de la comultiplicación de CV se denota por $\Delta_{ij}: C^{i+j}V \to C^iV \otimes C^jV$, entonces se pone $\Delta_{ij} = \mathrm{id}$, y la counidad es la proyección sobre el grado 0.

Tanto AV como CV poseen una estructura de álgebras de Hopf trenzadas. La comultiplicación de AV está unívocamente definida una vez que se nota que, para ser graduada, los elementos de grado 1 son primitivos, consecuencia inmediata del axioma de counidad. Dualmente, la multiplicación de CV está determinada una vez que se nota que $m_{01} : \mathbf{k} \otimes C^1V \to C^1V$ y $m_{10} : C^1V \otimes \mathbf{k} \to C^1V$ son ambas una forma abstrusa de escribir la identidad $V \to V$, consecuencia inmediata del axioma de la unidad. Así, por ejemplo, si $x, y \in C^1V$ se tiene $\Delta_{11}m(x \otimes y) = m(x \otimes y)$ porque Δ_{11} es la identidad, pero por otra parte la compatibilidad entre multiplicación y comultiplicación establece que esto coincide con el sumando en grado $(1,1)$ de $(m \otimes m)(\mathrm{id} \otimes c \otimes \mathrm{id})(\Delta(x) \otimes \Delta(y))$, y a su vez esto es $x \otimes y + c(x \otimes y)$, esto es, $m_{11} = 1 + c$. Vamos a dar en breves instantes la definición general de m_{ij} de CV, así como la definición general de Δ_{ij} de AV. Antes, un corte:

2.3.3. Definición. Un álgebra de Hopf graduada $R = \oplus_{n \geq 0} R(n)$ en una categoría trenzada abeliana $\mathcal{C}$ se llama *Álgebra de Nichols* si

(2.3.4) $$R(1) \text{ es un objeto rígido de } \mathcal{C}$$

(2.3.5) $$R(0) \simeq \mathbf{k},$$

(2.3.6) $$(\oplus_{i \geq 1} R(i))^2 = \oplus_{i \geq 2} R(i),$$

(2.3.7) $$\mathcal{P}(R) = R(1).$$

2.3.8. Observación. Una biálgebra que cumple las condiciones anteriores es automáticamente un álgebra de Hopf, debido a [**Mon93**, Lemma 5.2.10].

Como R es graduada, la unidad y la counidad se factorizan por $R(0)$, esto es,

$$u = \mathbf{k} \xrightarrow{u} R(0) \hookrightarrow R, \qquad \varepsilon = R \twoheadrightarrow R(0) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k},$$

y, por ser $R(0) = \mathbf{k}$, automáticamente $1 \in R(0)$ y ε es la proyección canónica $R \twoheadrightarrow R(0)$.

Es fácil ver que en presencia de (2.3.5) la condición (2.3.7) es equivalente a la condición

$$R_1 = R_0 \wedge R_0 = R(0) \oplus R(1),$$

donde $\wedge$ es el producto "cuña" definido por ejemplo en [**Swe69**], y denotamos con $R_0 \subset R_1 \subset \dots$ la filtración corradical de R, también definida en [**Swe69**, Ch. 9]. Explícitamente, R_0 es el corradical de R y $R_{n+1} = R_0 \wedge R_n$.

También es fácil ver que la condición (2.3.6) es equivalente a que

$$(R(1))^n = R(n) \quad \forall n \geq 1,$$

que en presencia de (2.3.7) se puede escribir como

$$\mathcal{P}(R) \text{ genera } R.$$

Dualmente, se puede ver que (2.3.7) implica que R está *corradicalmente graduada*, esto es,

$$R_n = \oplus_{i \le n} R(i) \ \forall n.$$

Para verlo, alcanza notar que, simplemente por definición,

$$R_n = \Delta^{-1}\Big(\bigcap_{i+j=n-1} R_i \otimes R + R \otimes R_j \Big)$$

y que

$$\Delta(\oplus_{i \le n} R(n)) \subseteq \bigcap_{i+j=n-1} (\oplus_{k \le i} R(k)) \otimes R + R \otimes (\oplus_{k \le j} R(k)) \cap R(n) \otimes R \cap R \otimes R(n).$$

Por inducción, un elemento en $R(n) - \oplus_{i \le n} R(i)$ tendría componentes homogéneas de grado $> n$ que serían elementos primitivos, contradiciendo (2.3.7).

Vamos a probar que un álgebra de Nichols está determinada unívocamente por el submódulo de elementos primitivos. Para esto se dará una construcción explícita de un álgebra de Nichols a partir de un módulo V, y luego se verá que no hay otra posibilidad.

2.3.9. Definición. Consideramos la sucesión de inclusiones

$$\mathbb{B}_1 \hookrightarrow \mathbb{B}_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathbb{B}_n \hookrightarrow \mathbb{B}_{n+1} \hookrightarrow \dots$$

donde $\sigma_i \mapsto \sigma_i$. Consideramos $\mathbb{B}_\infty$ el límite de esta sucesión. Para $m < n$, denotamos por $\mathbb{B}_{m\_n}$ al subgrupo de $\mathbb{B}_n$ generado por $\sigma_m, \dots, \sigma_{n-1}$. Denotando por $\iota_{m\_n} : \mathbb{B}_{n-m+1} \to \mathbb{B}_n$ el morfismo $\sigma_i \mapsto \sigma_{i+m-1}$, se tiene que $\mathbb{B}_{m\_n} = \mathrm{Im}(\iota_{m\_n})$. Todos estos grupos se pueden ver como subgrupos de $\mathbb{B}_\infty$. Si x_1, x_2 son elementos respectivamente de $\mathbb{B}_{j_1}, \mathbb{B}_{j_2}$, denotamos

$$(x_1|x_2) = x_1 \cdot \iota_{(j_1+1)\_(j_1+j_2)}(x_2) \in \mathbb{B}_{j_1+j_2},$$

e inductivamente definimos

$$(x_1|\cdots|x_s) = (x_1|(x_2|\cdots|x_s)) \in \mathbb{B}_{j_1+\dots+j_s}.$$

Por ejemplo, si $x_1 = \sigma_2\sigma_1 \in \mathbb{B}_3$ y $x_2 = \sigma_1 \in \mathbb{B}_2$, tenemos $(x_1|x_2) = \sigma_2\sigma_1\sigma_4 \in \mathbb{B}_5$.

Como en 1.1.18, consideramos $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ los generadores de $\mathbb{S}_n$. Es bien sabido que existe una sección de conjuntos $s : \mathbb{S}_n \to \mathbb{B}_n$ de la proyección $\mathbb{B}_n \twoheadrightarrow \mathbb{S}_n$ que tiene la propiedad de que si $x = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_l}$, y $l = \ell(x)$ es la longitud de x (es decir, no hay una forma de escribir x como producto de menos de l elementos τ_i), entonces $s(x) = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_l}$ (ver por ejemplo [**CR94**, 64.20]). Es claro que esta sección verifica $s(xy) = s(x)s(y)$ si $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$.

Consideraremos también otra sección $\bar{s}$, definida por $\bar{s}(x) = \sigma_{i_1}^{-1} \cdots \sigma_{i_l}^{-1}$ cuando, como antes, $x = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_l}$ y $\ell(x) = l$.

En el álgebra de grupo $\mathbf{k}\mathbb{B}_n$ consideraremos los elementos

$$\mathbf{S}^n = \sum_{x\in\mathbb{S}_n} s(x), \quad (\text{resp. } \bar{\mathbf{S}} = \sum_{x\in\mathbb{S}_n} \bar{s}(x)).$$

Si $i_1 + \cdots + i_r = n$, denotaremos por $Sh_{i_1,\dots,i_r} \subseteq \mathbb{S}_n$ al conjunto

$$Sh_{i_1,\dots,i_r} = \{x \in \mathbb{S}_n \mid x^{-1}(i_1 + \cdots + i_j + 1) < x^{-1}(i_1 + \cdots + i_j + 2) < \cdots \\ \cdots < x^{-1}(i_1 + \cdots + i_j + i_{j+1}) \text{ para } j = 0, \dots, r-1\}.$$

Consideraremos también los elementos

$$\mathbf{S}_{i_1,\dots,i_r} = \sum_{x\in Sh_{i_1,\dots,i_r}} s(x) \in \mathbf{k}\mathbb{B}_{i_1+\cdots+i_r},$$
$$\mathbf{T}_{i_1,\dots,i_r} = \sum_{x^{-1}\in Sh_{i_1,\dots,i_r}} s(x) \in \mathbf{k}\mathbb{B}_{i_1+\cdots+i_r},$$
$$\mathbf{S}^{j_1|j_2|\cdots|j_s} = (\mathbf{S}^{j_1}|\mathbf{S}^{j_2}|\cdots|\mathbf{S}^{j_s}) \in \mathbf{k}\mathbb{B}_{j_1+\cdots+j_s}.$$

Se tiene entonces que

$$\mathbf{S}^{i|j}\mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{S}^{i+j} = \mathbf{T}_{i,j}\mathbf{S}^{i|j}. \tag{2.3.10}$$

En general, si $n = i_1 + \cdots + i_r$, se tiene

$$\mathbf{S}^{i_1|\cdots|i_r}\mathbf{S}_{i_1,\dots,i_r} = \mathbf{S}^n = \mathbf{T}_{i_1,\dots,i_r}\mathbf{S}^{i_1|\cdots|i_r}. \tag{2.3.11}$$

Es conveniente observar también que $\mathbf{S}^n = \mathbf{S}_{1,1,\dots,1} = \mathbf{T}_{1,1,\dots,1}$.

Como fue prometido anteriormente, vamos a dar la estructura de álgebras de Hopf de AV y CV. Sencillamente, cosa que se puede comprobar por inducción, se tiene:

$$\Delta_{ij} : A^{i+j}V \to A^iV \otimes A^jV = \mathbf{S}_{i,j},$$
$$m_{ij} : C^iV \otimes C^jV \to C^{i+j}V = \mathbf{T}_{i,j}.$$

En ambos casos la antípoda está determinada, usando el lema 1.2.4, por lo que vale en grado 1, y en grado 1 se tiene $\mathcal{S}(x) = -x$. Dado que AV está generada por V, se tiene un único morfismo (graduado) de álgebras $AV \to CV$ tal que en grado 1 coincide con la identidad $\mathrm{id} : V \to V$. En la suma $A^0V \oplus A^1V = \mathbf{k} \oplus V$ este morfismo es también la identidad. Como $A^0V \oplus A^1V$ es una subcoálgebra de AV y sobre ella la identidad es un morfismo de coálgebras, resulta que el morfismo ut-supra mencionado $AV \to CV$ es un morfismo de biálgebras, y a la postre de álgebras de Hopf. Es inmediato observar que este morfismo, en grado n, no es otra cosa que $\mathbf{T}_{1,1,\dots,1} = \mathbf{S}^n$. Luego, se tiene:

2.3.12. LEMA. *Sea $V \in \mathcal{C}$ un objeto en una categoría trenzada abeliana con sumas numerables. Se toman AV y CV las álgebras tensorial y cotensorial respectivamente. Ambas son álgebras de Hopf trenzadas, y existe un único morfismo de álgebras de Hopf $AV \to CV$ tal que su restricción al grado 1 de AV es la identidad* $\mathrm{id} : V \to V$. *Este morfismo es*

$$\mathbf{S} = (\oplus_n \mathbf{S}^n) : AV \to CV, \quad \mathbf{S}^n : A^n V \to C^n V$$

(estamos escribiendo objetos de $\mathbf{k}\mathbb{B}_n$ como morfismos, esto no es otra cosa que pensar en las acciones dadas por los objetos). □

Tenemos entonces ahora una forma de construir álgebras de Nichols, gracias al siguiente resultado.

2.3.13. PROPOSICIÓN. *Sea R un álgebra de Nichols en $\mathcal{C}$ y $V = R(1)$. Como R está generada por V, se tiene un epimorfismo de álgebras $p : AV \twoheadrightarrow R$. Sea I el núcleo de p. Entonces $I = \ker(\mathbf{S})$.*

PRUEBA. Probamos primero que $I \supseteq \ker(\mathbf{S})$. Como I y $\ker(\mathbf{S})$ son homogéneos, tenemos que probar que $I_n \supseteq \ker(\mathbf{S}^n)$, donde I_n es la componente homogénea de I de grado n. Procedemos por inducción:

Para $n = 1$ no hay nada que probar, dado que $\mathbf{S}^1 = \mathrm{id}$. Sea $p : A(V) \to R$ la proyección, y supóngase que la inclusión es cierta para $m < n$. Sea $x \in \ker(\mathbf{S}^n)$. Se tiene que

$$\Delta(x) = \sum_{k+l=n} \mathbf{S}_{k,l} x \in \sum_{k+l=n} A^k \otimes A^l,$$

pero $\mathbf{S}^n = (\mathbf{S}^k \otimes \mathbf{S}^l)\mathbf{S}_{k,l}$, y luego

$$\mathbf{S}_{k,l}(x) \in \ker(\mathbf{S}^k \otimes \mathbf{S}^l) = \ker \mathbf{S}^k \otimes V^{\otimes l} + V^{\otimes k} \otimes \ker \mathbf{S}^l,$$

de donde $\mathbf{S}_{k,l}(x) \in I \otimes A + A \otimes I$ si $k, l < n$. Luego, $(p \otimes p)(\mathbf{S}_{k,l}(x)) = 0$ si $k, l < n$, lo que implica que

$$\Delta(p(x)) = \sum_{k+l=n} (p \otimes p)\mathbf{S}_{k,l}(x) = (p \otimes p)(\mathbf{S}_{n,0}(x) + \mathbf{S}_{0,n}(x)) = p(x) \otimes 1 + 1 \otimes p(x).$$

Se concluye que $p(x) \in \mathcal{P}(R)$, pero $p(x) \in R(n)$ y $n > 1$, con lo que $p(x) = 0$. Luego $x \in I$. Esto prueba la primera inclusión.

Tenemos ahora un morfismo cociente de coálgebras (de álgebras de Hopf trenzadas, de hecho)

$$A(V)/\ker \mathbf{S} \to R,$$

que es inyectivo en $(A(V)/\ker(\mathbf{S}))_1$ (el segundo término de la filtración corradical), dado que

$$(A(V)/\ker(\mathbf{S}))_1 = \mathbf{k} \oplus V = R(0) \oplus R(1).$$

Por [**Mon93**, Thm. 5.3.1], el morfismo cociente es inyectivo, lo que dice que $\ker(\mathbf{S}) = I$. □

2.3.14. Definición. Como por la proposición el espacio de primitivos determina al álgebra de Nichols, se denotará $\mathfrak{B}(V)$ la única álgebra de Nichols con espacio de primitivos V.

2.3.15. Observación. La proposición también implica que $\mathfrak{B}(V)$ no depende, en tanto álgebra de Hopf trenzada en el sentido de 2.1.3, de la categoría $\mathcal{C}$, sino sólo de la trenza $c : V \otimes V \to V \otimes V$, dado que estos ($V$ y c) son los únicos datos a partir de los que se construye el álgebra de Nichols.

Definimos entonces un álgebra de Nichols de manera "no categórica":

2.3.16. Definición. Sea (V, c) un par trenzado. Llamamos álgebra q-simétrica a $\mathfrak{B}(V) = \mathrm{Im}(\mathbf{S} : AV \to CV)$, con AV, CV y $\mathbf{S}$ definidos de la misma manera que dentro de una categoría. Llamamos a $\mathfrak{B}(V)$ *álgebra de Nichols* si (V, c) es un PTR. Posteriormente (en 2.4.13) se verá la diferencia entre ambos conceptos.

2.3.17. Definición. Si (V, c) es un PTR y $\mathfrak{B}(V)$ es de dimensión finita, llamaremos $\operatorname{top} V$ al grado de la integral de $\mathfrak{B}(V)$. Por 2.3.2, tenemos

$$\dim \mathfrak{B}^i(V) = \dim \mathfrak{B}^{\operatorname{top} V - i}(V).$$

Diremos que $\dim(\mathfrak{B}(V))$ es el *rango de Nichols* de V. Llamaremos recíprocamente *rango de* $\mathfrak{B}(V)$ a la dimensión de V. El nombre proviene de la relación con los núcleos de Frobenius–Lusztig.

2.3.18. Observación. Es fácil verificar que la ecuación de trenzas implica que

$$c_{V,V^{\otimes n}} \circ (\mathrm{id}_V \otimes \mathbf{S}^n) = (\mathbf{S}^n \otimes \mathrm{id}_V) \circ c_{V,V^{\otimes n}},$$
$$c_{V^{\otimes \cdot},V} \circ (\mathbf{S}^n \otimes \mathrm{id}_V) = (\mathrm{id}_V \otimes \mathbf{S}^n) \circ c_{V^{\otimes \cdot},V}.$$

Estas igualdades permiten ver $\mathfrak{B}(V)$ como álgebra de Hopf en el sentido de 2.1.3 y permiten verificar que si V es un PTR y $\mathfrak{B}(V)$ es de dimensión finita entonces $\mathfrak{B}(V)$ es rígida.

El nombre de "álgebra de Nichols" proviene del hecho de que fue Nichols el primero en tratar estas álgebras en su tesis de doctorado, publicada en lo esencial en [**Nic78**]. En este trabajo, en realidad él considera lo que denomina "álgebras de tipo I", que son álgebras de Nichols en categorías de Yetter–Drinfeld, en el sentido de esta tesis, una vez bosonizadas. Veamos la definición de Nichols y la afirmación precedente.

2.3.19. Definición (Nichols). Una biálgebra graduada $B = \bigoplus_{i\geq 0} B(i)$ se llama *biálgebra de tipo I* si verifica que

$$(\oplus_{i\geq 1} B(i))^2 = \oplus_{i\geq 2} B(i), \tag{2.3.20}$$

$$B(0) \wedge B(0) = B(0) \oplus B(1). \tag{2.3.21}$$

Se define en forma similar la noción de *álgebra de Hopf de tipo I.*

Si $B = \bigoplus_{i\geq 0} B(i)$ es una biálgebra, al igual que en el caso trenzado se sigue de [**Mon93**, Lemma 5.2.10] que B tiene una antípoda si y sólo si $B(0)$ tiene antípoda. Al igual que en 2.3.8, si $\dim B < \infty$ y $B(0)$ es semisimple, la condición 2.3.20 es equivalente a que B sea radicalmente graduada (en 2.3.8 $R(0)$ es el cuerpo de base, así que esto se cumple trivialmente). Dualmente, 2.3.21 es equivalente a que B sea corradicalmente graduada si $B(0)$ es co-semisimple (en 2.3.8 es el cuerpo de base).

2.3.22. Lema. *Sea H un álgebra de Hopf, $R = \bigoplus_{n\geq 0} R(n)$ un álgebra de Hopf graduada en ${}^H_H\mathcal{YD}$ y $A = R\#H$. Esta última es un álgebra de Hopf graduada, con graduación dada por*

$$A = \bigoplus_{n\geq 0} A(n), \ A(n) = (R(n) \otimes H) \subseteq R\#H.$$

Si R es un álgebra de Nichols entonces A es una biálgebra de tipo I tal que $A(0) \simeq H$. Recíprocamente, sea $B = \bigoplus_{n\geq 0} B(n)$ un álgebra de Hopf graduada. Se tienen morfismos canónicos de álgebras de Hopf $B(0) \hookrightarrow B$ y $B \twoheadrightarrow B(0)$, y sea $R = B^{\mathrm{co}\pi}$. Esta última es un álgebra de Hopf graduada en ${}^{B(0)}_{B(0)}\mathcal{YD}$. Si B es un álgebra de Hopf de tipo I entonces R es un álgebra de Nichols.

Prueba. Se ve fácilmente que la condición (2.3.5) es equivalente a la condición $A(0) = H$. Luego, la equivalencia entre (2.3.6) y (2.3.20) es consecuencia del siguiente hecho general: sean M y N dos subespacios de R. Si N es un H-submódulo entonces $(MN)\#H = (M\#H)(N\#H)$. Para verlo, sean $m \in M$, $n \in N$, $h \in H$. Luego $(mn\#h) = (m\#1)(n\#h) \in (M\#H)(N\#H)$, que demuestra una de las inclusiones. La otra es inmediata gracias a la hipótesis de que N es un submódulo.

Es fácil ver, como se dijo anteriormente, que (2.3.7) es equivalente a la condición $\mathbf{k}\wedge\mathbf{k} = R(0)\oplus R(1)$. La equivalencia entre las condiciones (2.3.7) y (2.3.21) es consecuencia del siguiente hecho general: sean M y N dos subespacios de R. Si N es un H-subcomódulo entonces $(M\#H)\wedge(N\#H) = (M\wedge N)\#H$. Para verlo, consideramos ambos subespacios como núcleos de morfismos: denotemos por τ la trasposición usual $x\otimes y\mapsto y\otimes x$. Si X es un subespacio de Y, denotamos por $p_X : Y\to Y/X$ a la proyección canónica. Como N es un subcomódulo, R/N tiene una estructura de H-comódulo, que denotamos también por δ. Luego,

$$\begin{aligned}
(M\wedge N)\#H &= \ker((p_M\otimes p_N)\Delta_R)\#H\\
&= \ker((p_M\otimes p_N\otimes \mathrm{id})(\Delta_R\otimes \mathrm{id}))\\
&= \ker((p_M\otimes \mathrm{id}\otimes p_N\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\tau\otimes \mathrm{id})(\Delta_R\otimes\Delta_H))\\
&= \ker((\mathrm{id}\otimes m_H\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\tau\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes \mathrm{id}\otimes\delta\otimes \mathrm{id})\\
&\qquad\qquad (p_M\otimes \mathrm{id}\otimes p_N\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\tau\otimes \mathrm{id})(\Delta_R\otimes\Delta_H))\\
&= \ker((p_M\otimes m_H\otimes p_N\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes \mathrm{id}\otimes\tau\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\delta\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})(\Delta_R\otimes\Delta_H))\\
&= \ker((p_M\otimes \mathrm{id}\otimes p_N\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c\otimes \mathrm{id})(\Delta_R\otimes\Delta_H))\\
&= \ker((p_{(M\#H)}\otimes p_{(N\#H)})\Delta_{R\#H})\\
&= (M\#H)\wedge(N\#H).
\end{aligned}$$

□

Si $B = \oplus_i B(i)$ es una biálgebra de tipo I, entonces $B(1)$ es un bimódulo de Hopf sobre $B(0)$. Recíprocamente, si se tiene una biálgebra $B(0)$ y un bimódulo de Hopf sobre esta, $B(1)$, existe una única biálgebra de tipo I, B, que tiene a $B(0)$ y $B(1)$ como sus componentes de grados 0 y 1. La construcción se puede llevar a cabo con los mismos morfismos $\mathbf{S}$, pero se efectúa en la categoría trenzada ${}^H_H\mathcal{M}^H_H$ en lugar de hacerse en ${}^H_H\mathcal{YD}$. Si $B(0)$ es de Hopf, entonces gracias a 1.1.22 se puede considerar $B(1) = V\otimes B(0)$, donde V es un objeto en ${}^{B(0)}_{B(0)}\mathcal{YD}$. En este caso, ambas construcciones se pueden relacionar a través del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
{}^H_H\mathcal{Y}D \arrow[r, "\mathfrak{B}"] \arrow[d, "S"'] & \mathcal{H}f({}^H_H\mathcal{YD}) \arrow[d, "\#"] \\
{}^H_H\mathcal{M}^H_H \arrow[r, "\mathfrak{B}"'] & \mathcal{H}f({}_{\mathbf{k}}\mathcal{M}),
\end{tikzcd}$$

donde S es el funtor de 1.1.22, $\#$ es el de bosonización y $\mathfrak{B}$ es el funtor de construcción del álgebra de Nichols en la línea de arriba y del álgebra de Hopf de tipo I en la de abajo. Los detalles de este diagrama están hechos en [**AG99**].

Hay una manera alternativa de construir álgebras de Nichols y es por medio de una forma bilineal. Esta es la manera en que Lusztig construye su álgebra $\mathbf{f}$ a partir de $'\mathbf{f}$ en [**Lus93**]. En pocas palabras, Lusztig usa trenzas relacionadas con álgebras de Lie semisimples, y en esos casos el álgebra $\mathbf{f}$ resulta ser una cuantización de $\mathfrak{n}_+$, la parte nilpotente de una subálgebra de Borel. A partir de $\mathbf{f}$ se construye la cuantización de toda el álgebra semisimple. De hecho, la relación con la construcción de Lusztig es, por el momento, la herramienta más fuerte con que se cuenta para calcular dimensiones, bases de PBW o modelar la intuición para álgebras de Nichols. Veamos entonces su construcción.

Si bien Lusztig usa una forma bilineal que aparea $\mathbf{f}$ consigo misma, nosotros usaremos dos álgebras tensoriales en principio distintas. Empezamos con un lema.

2.3.23. LEMA. *Sean U, Z dos $\mathbf{k}$-espacios vectoriales con una acción de $\mathbb{B}_n$ (en los casos usuales, $U = V^{\otimes n}$, $Z = W^{\otimes n}$). Como en la definición 1.1.18, consideramos $\mathbb{B}_n$ generado por σ_i ($i = 1, \dots, n-1$) y $\mathbf{S}^n = \sum_{x \in \mathbb{S}_n} s(x)$. Supongamos que se tiene una forma bilineal $(|) : U \otimes Z \to \mathbf{k}$ tal que para todo $1 \leq i < n$ se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

1. $(\sigma_i u | z) = (u | \sigma_i z)$ *ó*
2. $(\sigma_i u | z) = (u | \sigma_{n-i} z)$.

Tenemos entonces $(\mathbf{S}^n u | z) = (u | \mathbf{S}^n z)$ si $u \in U$, $z \in Z$.

PRUEBA. Sea $x \in \mathbb{S}_n$, $x = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_d}$ con $\ell(x) = d$. Luego $s(x) = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_d}$ y $s(x^{-1}) = \sigma_{i_d} \cdots \sigma_{i_1}$, ya que $x^{-1} = \tau_{i_d} \cdots \tau_{i_1}$ y $\ell(x^{-1}) = \ell(x) = d$. Definimos $T \in \mathbb{S}_n$ por $T : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, $T(i) = n + 1 - i$ y consideramos D el automorfismo interior dado por T (esto es, $D : \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n$, $D(x) = TxT^{-1}$). Observemos que $D(\tau_i) = \tau_{n-i}$ si $1 \leq i \leq n-1$. Más aun, como $T^2 = \mathrm{id}$, se tiene que $D^2 = \mathrm{id}$. Luego, si $x \in \mathbb{S}_n$, $x = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_d}$ y $\ell(x) = d$, tenemos que $D(x^{-1}) = D(\tau_{i_d} \cdots \tau_{i_1}) = \tau_{n-i_d} \cdots \tau_{n-i_1}$, de donde se obtiene $\ell(D(x^{-1})) \leq \ell(x)$. Como se tiene $D((D(x^{-1}))^{-1}) = (D^2(x^{-1}))^{-1} = x$ y la igualdad anterior es válida $\forall x \in \mathbb{S}_n$, tenemos que $\ell(D(x^{-1})) = \ell(x)$. Luego,

$$s(D(x^{-1})) = s(\tau_{n-i_d} \cdots \tau_{n-i_1}) = \sigma_{n-i_d} \cdots \sigma_{n-i_1}.$$

Tenemos ahora en el caso 1 que

$$(s(x)u|z) = (\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_d} u | z) = (u | \sigma_{i_d} \cdots \sigma_{i_1} z) = (u | s(x^{-1}) z),$$

y luego

$$(\mathbf{S}^n u | z) = \sum_{x \in \mathbb{S}_n} (s(x) u | z) = \sum_{x \in \mathbb{S}_n} (u | s(x^{-1}) z) = (u | \mathbf{S}^n z).$$

En el caso 2, tenemos

$$(s(x)u|z) = (\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_d} u|z) = (u|\sigma_{n-i_d} \cdots \sigma_{n-i_1} z) = (u|s(D(x^{-1}))z),$$

y luego

$$(\mathbf{S}^n u|z) = \sum_{x \in \mathbb{S}_n} (s(x)u|z) = \sum_{x \in \mathbb{S}_n} (u|s(D(x^{-1}))z) = (u|\mathbf{S}^n z).$$

□

2.3.24. Observación. Formas bilineales como las de 2.3.23 se encuentran a menudo. Sea por ejemplo que tenemos una forma bilineal $(|) : V \otimes W \to \mathbf{k}$ que cae en alguno de los casos siguientes

1. $(c_V(v_1 \otimes v_2)|w_1 \otimes w_2) = (v_1 \otimes v_2|c_W(w_1 \otimes w_2))$
   para la forma $(v_1 \otimes v_2|w_1 \otimes w_2) = (v_1|w_1)(v_2|w_2)$.
2. $(c_V(v_1 \otimes v_2)|w_1 \otimes w_2) = (v_1 \otimes v_2|c_W(w_1 \otimes w_2))$
   para la forma $(v_1 \otimes v_2|w_1 \otimes w_2) = (v_1|w_2)(v_2|w_1)$.

En el caso 1 definimos

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n|w_1 \otimes \ldots \otimes w_n)_> = \prod_i (v_i|w_i), \tag{2.3.25}$$

y esta forma cae en el caso 1 de 2.3.23.

En el caso 2 definimos

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n|w_1 \otimes \ldots \otimes w_n)_< = \prod_i (v_i|w_{n+1-i}), \tag{2.3.26}$$

y esta forma cae en el caso 2 de 2.3.23.

Es claro que si $(|)$ es no degenerada, entonces $(|)_>$ (resp. $(|)_<$) es no degenerada. En los siguientes ejemplos se cae en alguno de los casos precedentes.

2.3.27. Ejemplo. Sea $(i \cdot j)_{1 \le i,j \le n}$ un dato de Cartan (ver la definición en [**Lus93**]), y sea q una indeterminada sobre $\mathbf{k}$. Tomamos $V = \mathbf{k}(q)\theta_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{k}(q)\theta_n$ y definimos $c_V(\theta_i \otimes \theta_j) = q^{i \cdot j}\theta_j \otimes \theta_i$. Tomamos además $(|) : V \otimes V \to \mathbf{k}(q)$, dado por

$$(\theta_i|\theta_j) = (1 - q^{-2i \cdot i})^{-1}\delta_{i,j}.$$

Es fácil ver que esta es una forma bilineal no degenerada tal que

$$(c(\theta_{i_1} \otimes \theta_{i_2})|\theta_{j_1} \otimes \theta_{j_2}) = (\theta_{i_1} \otimes \theta_{i_2}|c(\theta_{j_1} \otimes \theta_{j_2})),$$

de donde se sigue que estamos en el caso 1 de la observación anterior.

2.3.28. Ejemplo. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana trenzada en la que hay sumas directas numerables, y sea $V \in \mathcal{C}$ un objeto rígido. Sea ${}^*V$ el dual a izquierda de V en $\mathcal{C}$, y $(|) : V \otimes {}^*V \to \mathbf{k}$ el morfismo de evaluación. El lema 1.3.2 dice que estamos en el caso 2 de la observación anterior.

2.3.29. Ejemplo (El ejemplo anterior de manera "no categórica").
Sea (V, c) un PTR, $W = V^*$, $c_W = c_{V^*} = (c_V)^*$ como en la definición 2.1.4. Sea $(|) : V \otimes V^* \to \mathbf{k}$ la evaluación. La definición de c_W asegura que se está en el caso 2.

2.3.30. Definición. Sean U y Z dos $\mathbf{k}\mathbb{B}_n$-módulos con una forma bilineal $(|) : U \otimes Z \to \mathbf{k}$. Denotamos

$$[,] : U \otimes Z \to \mathbf{k}, \quad [u, z] = (\mathbf{S}^n u|z).$$

En particular, si V, W son PT con una forma bilineal $(|) : V \otimes W \to \mathbf{k}$ que satisface 1 (resp. 2) de la observación 2.3.24, definimos $[,] : AV \otimes AW \to \mathbf{k}$ por

1. $[1, 1] = 1$.
2. $[u, z] = 0$ si $u \in A^i V$, $z \in A^j W$ y $i \neq j$.
3. $\begin{cases} [u, z] = [u, z]_> = (\mathbf{S}^n u|z)_> & \text{si } u \in A^n V,\ z \in A^n W \text{ para el caso 1} \\ [u, z] = [u, z]_< = (\mathbf{S}^n u|z)_< & \text{si } u \in A^n V,\ z \in A^n W \text{ para el caso 2} \end{cases}$

2.3.31. Lema. *Sean V, W como en la definición. Supongamos que estamos en el caso 1 (resp. 2) de la observación 2.3.24. Entonces tenemos, respectivamente,*

1 $[u, z \cdot z']_> = [u_{(1)}, z]_> [u_{(2)}, z']_>, \quad [u \cdot u', z]_> = [u, z_{(1)}]_> [u', z_{(2)}]_>.$

2 $[u, z \cdot z']_< = [u_{(1)}, z']_< [u_{(2)}, z]_<, \quad [u \cdot u', z]_< = [u, z_{(2)}]_< [u', z_{(1)}]_<.$

Prueba. Para $u \in A^n V$ e $i + j = n$, denotamos

$$(\mathbf{S}_{i,j}(u))_i \otimes (\mathbf{S}_{i,j}(u))_j = \mathbf{S}_{i,j}(u) \in A^i V \otimes A^j V.$$

En el caso 1 tenemos, para $z \in A^i W$, $z' \in A^j W$ y $u \in A^n V$,

$$\begin{aligned} [u, z \cdot z'] &= (\mathbf{S}^n u|z \cdot z') = ((\mathbf{S}^i \otimes \mathbf{S}^j)(\mathbf{S}_{i,j} u)|z \cdot z') \\ &= (\mathbf{S}^i (\mathbf{S}_{i,j} u)_i |z)(\mathbf{S}^j (\mathbf{S}_{i,j} u)_j |z'). \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos

$$\begin{aligned} [u_{(1)}, z][u_{(2)}, z'] &= \sum_{k+l=n} [(\mathbf{S}_{k,l} u)_k, z][(\mathbf{S}_{k,l} u)_l, z'] \\ &= [(\mathbf{S}_{i,j} u)_i, z][(\mathbf{S}_{i,j} u)_j, z'] \\ &= (\mathbf{S}^i (\mathbf{S}_{i,j} u)_i |z)(\mathbf{S}^j (\mathbf{S}_{i,j} u)_j |z'). \end{aligned}$$

La otra igualdad para el caso 1 es análoga, usando el lema 2.3.23. Reemplazando $(\mathbf{S}_{i,j}(u))_i \otimes (\mathbf{S}_{i,j}(u))_j$ por $(\mathbf{S}_{i,j}(u))_j \otimes (\mathbf{S}_{i,j}(u))_i$, la misma prueba se aplica al caso 2. $\square$

Ahora podemos dar la prometida construcción a lo Lusztig de las álgebras de Nichols.

2.3.32. Definición. Sean (V, c_V), (W, c_W) dos PT y sea $(|) : V \otimes W \to \mathbf{k}$ una forma bilineal no degenerada que satisface 1 (resp. 2) de la observación 2.3.24. Tomamos $[,] : A(V) \otimes A(W) \to \mathbf{k}$ como en la definición 2.3.30. Sean $\mathcal{I} = \{v \in AV \mid [v,w] = 0 \ \forall w \in AW\}$, $\mathcal{I}' = \{w \in AW \mid [v,w] = 0 \ \forall v \in AV\}$ los radicales de la forma $[,]$. Como $(|)$ es no degenerada, es claro que

$$\mathcal{I} = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{I}_n = \oplus_{n\geq 0} \ker(\mathbf{S}^n : A^nV \to A^nV), \text{ e}$$
$$\mathcal{I}' = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{I}'_n = \oplus_{n\geq 0} \ker(\mathbf{S}^n : A^nW \to A^nW).$$

Luego, otra forma de definir $\mathfrak{B}(V)$ es tomar $A(V)$ y dividir por el radical a izquierda de la forma $[,]$ (resp. para $\mathfrak{B}(W)$ se toma $A(W)$ y se divide por el radical a derecha).

2.3.33. Observación. El hecho de que $(|)$ sea no degenerada es necesario para definir un álgebra de Nichols, aunque no lo es para la definición de la forma $[,]$ en 2.3.30.

2.3.34. Observación. En el caso del ejemplo 2.3.27 obtenemos el álgebra $\mathbf{f} = \mathfrak{B}(\mathbf{k}(q)\theta_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{k}(q)\theta_n)$. Para $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$, $W = {}^*V \in {}^H_H\mathcal{YD}$, o para (V, c) un PTR, obtenemos el mismo objeto $\mathfrak{B}(V)$ que antes, y por lo tanto esta es realmente una forma alternativa para hacer la construcción.

Finalmente, tenemos

2.3.35. Teorema. *Sean V, W como en el lema 2.3.31. Hay una única forma bilineal no degenerada $\mathfrak{B}(V) \otimes \mathfrak{B}(W) \to \mathbf{k}$ tal que*

1. $[1,1] = 1$,
2. $[\mathfrak{B}^i(V), \mathfrak{B}^j(W)] = 0$ *si* $i \neq j$,
3. $[v,w] = (v|w)$ *si* $v \in \mathfrak{B}^1(V)$, $w \in \mathfrak{B}^1(W)$,
4. $[u, z \cdot z'] = \begin{cases} [u_{(1)}, z][u_{(2)}, z'] & \textit{en caso 1}, \\ [u_{(1)}, z'][u_{(2)}, z] & \textit{en caso 2}, \end{cases}$
5. $[u \cdot u', z] = \begin{cases} [u, z_{(1)}][u', z_{(2)}] & \textit{en caso 1}, \\ [u, z_{(2)}][u', z_{(1)}] & \textit{en caso 2}, \end{cases}$

donde denotamos por $\mathfrak{B}^n(V) = A^nV/\mathcal{I}_n$ la componente en grado n.

Prueba. Como en la definición 2.3.30, se define la forma $[,] = [,]_>$ en el caso 1, y $[,] = [,]_<$ en 2. El lema 2.3.31 permite considerar $[,] : \mathfrak{B}(V) \otimes \mathfrak{B}(W) \to \mathbf{k}$, la inducida por $[,] : AV \otimes AW \to \mathbf{k}$, que resulta ser una forma bilineal no degenerada que satisface 1–5. La unicidad se sigue fácilmente por inducción. $\square$

Observemos entonces que

$$[\mathbf{S}^n u, \mathbf{S}^n z] = (\mathbf{S}^n u|z) \qquad \forall u \in A^n V,\ z \in A^n W. \tag{2.3.36}$$

Cuando V, W son objetos de $\mathcal{C}$, una categoría abeliana trenzada, y la forma $[,] : AV \otimes AW \to \mathbf{k}$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, tenemos una relación entre $\mathfrak{B}(W)$ y ${}^*\mathfrak{B}(V)$, suponiendo que este último objeto exista en la categoría $\mathcal{C}$. Esta relación no es otra que

$$\mathfrak{B}({}^*V) \simeq ({}^*\mathfrak{B}(V))^{\mathrm{bop}}.$$

Si (V, c) es un PTR se tiene esta misma relación entre entre $\mathfrak{B}(V^*)$ y $(\mathfrak{B}(V))^*$. Cabe notar que si para definir la multiplicación y la comultiplicación de R^* se hubiera usado en 1.3.4 la composición Δ^* y m^* con ψ (sin usar c y c^{-1}), tendríamos en forma directa $\mathfrak{B}(V^*) = (\mathfrak{B}(V))^*$. De todas maneras, no hay gran diferencia gracias a 1.3.7.

Si bien se puede dar una prueba particular, más adelante daremos una demostración general de este hecho.

2.4. Ejemplos

En esta sección daremos los ejemplos más importantes, los "ladrillos" de las álgebras de Nichols.

2.4.1. Ejemplo. Sea Γ un grupo finito. Tomemos en Γ un elemento central g y una representación de grado 1, $\chi : \Gamma \to \mathbf{k}^\times$. Sea $q = \chi(g)$. Sea $x \neq 0$ un elemento del espacio de representación de χ. Se tiene entonces $AV \simeq \mathbf{k}[x]$, y $\mathbf{S}^n(x^n) = (n)_q^! x^n$, cosa que es fácil probar por inducción. Tenemos entonces varios casos, que ameritan la siguiente definición:

2.4.2. Definición. Sea $q \in \mathbf{k}^\times$. Definimos $N(q) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ como:

$$N(q) = \begin{cases} \text{orden de } q & \text{si } q \neq 1 \text{ y es raíz de la unidad,} \\ \infty & \text{si } q \text{ no es raíz de 1,} \\ \infty & \text{si } q = 1 \text{ y } \operatorname{car} \mathbf{k} = 0, \\ \operatorname{car} \mathbf{k} & \text{si } q = 1 \text{ y } \operatorname{car} \mathbf{k} > 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que $N(q)$ es el menor natural n tal que $(n)_q^! = 0$.

2.4.1. Ejemplo (Continuación). Si $N = N(q)$, entonces $\mathfrak{B}(V) \simeq \mathbf{k}[x]/(x^N)$ como álgebra. Como coálgebra, la estructura está determinada de manera única ya que x es primitivo, y está dada por

$$\Delta(x^n) = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i}_q x^i \otimes x^j. \tag{2.4.2}$$

Dijimos que $N(q)$ es el menor natural n tal que $(n)_q^! = 0$, y en este sentido se asemejan dos teorías: la de q una raíz de la unidad $\neq 1$ y la de $q = 1$ en característica positiva. En el primer caso las álgebras de Nichols van a tener un sabor que recuerda a las álgebras de Lie restringidas en característica positiva. Hay, sin embargo, una diferencia sutil pero importante, y se puede observar mirando los números combinatorios.

Supongamos primero que $\operatorname{car} \mathbf{k} = 0$, que q es una raíz de la unidad $\neq 1$, y pongamos $N = N(q)$. Usaremos la siguiente notación. Si m es un número natural, ponemos

$$D_N(m) = \#(N\mathbb{Z} \cap \{1, 2, \dots, m\}).$$

Es decir, $D_N(m)$ cuenta cuántos divisores de N hay en el intervalo $[1, m]$. Es claro que el número $(n)_q$ es un polinomio en q que se anula si y sólo si n es múltiplo de N, y en este caso q es una raíz simple del polinomio. Como consecuencia, el factorial $(m)_q^!$ es un polinomio en el que la multiplicidad de q como raíz es exactamente $D_N(m)$. Luego, el número combinatorio $\binom{m}{j}_q$ se anula en q si y sólo si la multiplicidad de q en $(m)_q^!$ es mayor que la suma de las multiplicidades en $(j)_q^!$ y $(m-j)_q^!$. En otras palabras,

$$\binom{m}{j}_q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_N(m) > D_N(j) + D_N(m-j).$$

Luego, si dibujamos en el cuadrante $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ un punto en la coordenada (i, j) en el caso en que $\binom{i+j}{i}_q$ no se anule, lo que tendremos es una Figura como la 2.4.a. Supongamos entonces que R es un álgebra de Hopf trenzada, que $x \in \mathcal{P}(R)$ y que $c(x \otimes x) = qx \otimes x$ (q y N como hasta ahora). Si R es de dimensión finita, a la fuerza tendremos un polinomio minimal de x, digamos $p(x) = 0$ y p genera el ideal de anulación de x. Pongamos $n = \deg p$, y observemos que, como $\varepsilon x = 0$, tenemos $p(0) = 0$. Sea entonces W de dimensión 1 con base z y $c(z \otimes z) = qz \otimes z$. Tenemos un morfismo de álgebras de Hopf trenzadas $AW \to R$, cuyo núcleo es

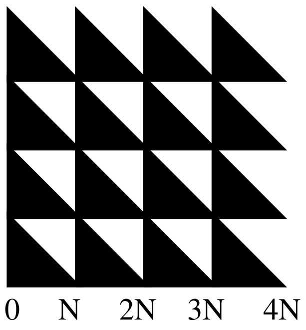

FIGURA 2.4.A. q-combinatorios.

el ideal $(p(z))$, y por lo tanto es también un coideal. Luego

$$\Delta(p(z)) \in (p(z)) \otimes AW + AW \otimes (p(z)).$$

Consideremos por comodidad el isomorfismo $AW \otimes AW \simeq \mathbf{k}[z_1, z_2]$ dado por $z^i \otimes z^j \mapsto z_1^i z_2^j$, y sea f la imagen de $\Delta(p(z))$ por este isomorfismo. La igualdad anterior dice que $f(z_1, z_2) = p(z_1)q_1(z_1, z_2) + p(z_2)q_2(z_1, z_2)$ para ciertos polinomios $q_1, q_2 \in \mathbf{k}[z_1, z_2]$. Además $\deg f = n$. Dividimos entonces q_1 por $p(z_1)$ y tenemos entonces una nueva escritura $f(z_1, z_2) = p(z_1)r_1(z_1, z_2) + p(z_2)r_2(z_1, z_2)$, pero ahora el grado de r_1 en la variable z_2 es menor que n. Escribimos $f = \sum_{i,j} f_{ij} z_1^i z_2^j$. Como tenemos $f_{ij} = 0$ si $i > 0$, $j \geq n$, automáticamente tenemos que r_2 es una constante, y esto implica que r_1 es también una constante. Luego $f_{ij} = 0$ si $ij \neq 0$. En particular, si $p(z) = \sum_{i=1}^n p_i z^i$, tenemos $\Delta(z^i) = \alpha z^i \otimes 1 + \beta 1 \otimes z^i$, pero esto es sólo posible para $i = 1$ e $i = N$, por lo que $p(z) = \alpha z + \beta z^N$. Por otra parte, se debe tener $c(z \otimes p(z)) \in (p(z)) \otimes AW + AW \otimes (p(z))$, pero esto es posible si $\alpha\beta = 0$. Como $p \neq 0$ y $x \neq 0$, debemos tener $\alpha = 0$, y podemos suponer $\beta = 1$. Hemos probado entonces

2.4.4. LEMA. *Sea R un álgebra de Hopf trenzada de dimensión finita y supongamos* $\operatorname{car} \mathbf{k} = 0$. *Sea $x \in \mathcal{P}(R)$ tal que $c(x \otimes x) = qx \otimes x$, con $q \neq 1$ una raíz de la unidad de orden N. Luego en R tenemos la relación $x^N = 0$.* $\square$

La diferencia de la que se hablaba con el caso $q = 1$ y $\operatorname{car} \mathbf{k} = N > 0$ es que en este caso $(m)_q^!$ no se anula en q con multiplicidad $D_N(m)$ sino con multiplicidad $D'_N(m)$, donde

$$D'_N(m) = \sum_{i \geq 1} \#(N^i \mathbb{Z} \cap \{1, 2, \dots, m\}),$$

esto es, $D'_N(m)$ cuenta la cantidad de múltiplos de N menores que m, pero los cuenta "con multiplicidad". Así, por ejemplo, $D_N(N^2) = N$, mientras que $D'_N(N^2) = N + 1$, ya que el N^2 aparece dos veces en la suma de arriba. Esto implica que p pueda tomar otra forma, como $p(z) = \sum_{i>0} p_i z^{N^i}$. Por ejemplo, podríamos tener en R cualquiera de las relaciones $x^{N^i} = 0$ con $i > 0$.

Más en general, si q es una raíz de la unidad $\neq 1$ y $\operatorname{car} \mathbf{k} = M > 0$, entonces lo que hay que tener en cuenta es la multiplicidad

$$D'_{N,M}(m) = \sum_{i \geq 0} \#(NM^i\mathbb{Z} \cap \{1, 2, \dots, m\})$$

(que cuando $q = 1$ coincide con la definición de $D'_N(m)$ anterior). Esto permite juntar los casos $\operatorname{car} \mathbf{k} = 0$ y $\operatorname{car} \mathbf{k} > 0$ agregando la hipótesis de no divisibilidad:

2.4.5. Proposición. *Sea R un álgebra de Hopf trenzada de dimensión finita y no divisible por* $\operatorname{car} \mathbf{k}$. *Supongamos que $\exists x \in \mathcal{P}(R)$ tal que $c(x \otimes x) = qx \otimes x$ y tal que R es libre como módulo sobre B, la subálgebra generada por x. Entonces q es una raíz de la unidad $\neq 1$ y en R se tiene la relación $x^N = 0$, con $N = N(q)$.*

Esta diferencia explica que sea sencillo encontrar álgebras que verifican (2.3.4), (2.3.5) y (2.3.6) pero no (2.3.7) en característica positiva, y aún este abierto este problema en característica 0. La proposición se usará con 3.4.1 parte 1, donde se prueba que la condición de libertad de R sobre B es el caso típico si $R = \mathfrak{B}(V)$ y V es un módulo de YD sobre un grupo finito.

2.4.6. Ejemplo. Supongamos que V es de TGD con matriz (q_{ij}) en la base $\{x_1, \dots, x_n\}$. Definimos $N_i = N(q_{ii})$. Si $q_{ij}q_{ji} = 1$ $\forall i \neq j$ entonces $\mathfrak{B}(V)$ es el álgebra con generadores $x_1, \dots, x_n$ y relaciones

$$x_i^{N_i} = 0, \quad x_i x_j = q_{ij} x_j x_i \ i \neq j.$$

Un álgebra de Nichols así se suele llamar *Quantum Linear Space*, o *Espacio Lineal Cuántico*, que se abreviará por ELC. A un ELC de dimensión 1 lo llamaremos *Línea Cuántica* (o LC) y a un ELC de dimensión 2 lo llamaremos *Plano Cuántico* (o PC). Que las relaciones incluyen a los monomios $x_i^{N_i}$ es una simple consecuencia del ejemplo anterior. Que incluyen a los elementos $r_{ij} = x_i x_j - q_{ij} x_j x_i$ para $i \neq j$ es una simple consecuencia del cálculo de $\mathbf{S}^2$ en ellos: $\mathbf{S}^2 = 1 + c$ y $c(r_{ij}) = q_{ij} x_j x_i - q_{ji} q_{ij} x_i x_j = -r_{ij}$. Finalmente, que todas las relaciones están generadas por estas es consecuencia de 2.5.1, más abajo.

Los ejemplos que siguen están tratados en [**Lus93**], donde se construyen los así llamados *Núcleos de Frobenius–Lusztig*. Luego, en [**ASa**] se da un proceso de simetrización que permite llevar una gran cantidad de pares trenzados (V, c) que vienen del caso abeliano a núcleos de Frobenius–Lusztig. Esta simetrización, al nivel del álgebra bosonizada, es una deformación por un 2-cociclo y por lo tanto respeta dimensión, bases, multiplicación.

2.4.7. Ejemplo. Este ejemplo se puede hacer con mayor generalidad, pero por simplicidad en la presentación restringiremos un poco las hipótesis. Sea $p > 3$ un primo y sea q una raíz de la unidad de orden p. Sea (a_{ij}) una matriz de Cartan generalizada simetrizable de orden n, es decir, es una matriz de $n \times n$ tal que

- $a_{ii} = 2$,
- $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$,
- $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$
- existen enteros d_i con $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$.

Se toma la forma bilineal $i \cdot j = d_i a_{ij}$, se toma V un espacio vectorial de dimensión n con base $\{x_1, \dots, x_n\}$ y trenza $c(x_i \otimes x_j) = q^{i \cdot j} x_j \otimes x_i$. Supongamos que (a_{ij}) es una matriz de Cartan (no generalizada). En otras palabras, que la matriz $(d_i a_{ij})$ es definida positiva. Se toma entonces $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie semisimple con matriz (a_{ij}), y $\mathfrak{n}$ la parte nilpotente de una subálgebra de Borel. Sea t la dimensión de $\mathfrak{n}$ (tenemos $\dim \mathfrak{g} = 2t + n$). Entonces $\mathfrak{B}(V)$ tiene dimensión t^p. Esto es consecuencia de 2.3.35 más los teoremas de [**Lus93**]. Hay una base de PBW de $\mathfrak{B}(V)$ dada por

$$\{x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} x_{n+1}^{i_{n+1}} \cdots x_t^{i_t} \mid 0 \leq i_j < p\},$$

donde los elementos x_k $(k > n)$ se consiguen aplicando sucesivas adjuntas trenzadas (la definición se dará luego) entre los x_j $(j \leq n)$, de la misma manera en que los elementos de $\mathfrak{n}$ se consiguen a partir de adjuntas entre los elementos de Δ^+, los vectores que corresponden a raíces simples positivas de $\mathbf{h}$, una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Más aun, si (a_{ij}) no es de Cartan, lo que resulta es la "cuantización" del álgebra de Kac–Moody asociada, por lo que $\mathfrak{B}(V)$ es de dimensión infinita.

2.4.8. Ejemplo. Ahora generalizamos el caso A_2 del ejemplo anterior. Sea V con base $\{x_1, x_2\}$ y matriz (q_{ij}) tal que $q_{11} = q_{22}$, es una raíz de la unidad de orden > 2, y tal que $q_{12}q_{21}q_{11} = 1$. Sea $N = N(q_{11}q_{12}q_{21}q_{22}) = N(q_{11})$. Entonces, tomando $z = \mathrm{Ad}_{x_1}(x_2) = x_1x_2 - q_{12}x_2x_1$, resulta que $\mathfrak{B}(V)$ tiene una base de PBW dada por

$$\{x_1^{i_1} x_2^{i_2} z^j \mid 0 \leq i_1, i_2, j < N\},$$

y en particular $\dim \mathfrak{B}(V) = N^3$.

Se verá más adelante que la adjunta Ad_{x_1} tiene orden de nilpotencia exactamente 2 en x_2, es decir $\mathrm{Ad}_{x_1}(z) = 0$, y se generalizará este ejemplo al caso $q_{11} = -1$, $q_{12}q_{21}q_{22} = 1$ y al caso $q_{11} = q_{22} = -1$ (ver 2.6.1 para la definición y 2.6.5 para el resultado).

2.4.9. Ejemplo. Los ejemplos de dimensión finita que no vienen del caso abeliano son pocos. El más "chico" tiene dimensión 12, y es el que sigue. Se toma $\Gamma = \mathbb{D}_3$ generado por r, s con relaciones $r^3 = s^2 = srsr = 1$. Se toma $g = s$ y se tiene $\Gamma_g = \{1, s\}$. Se toma $\rho(s) = -1$ (la única representación no trivial de este grupo). El módulo $V = M(g,\rho)$ tiene dimensión 3. Sea Y el espacio de la representación ρ y considérese x una base. Tomamos en $M(g,\rho) = \mathbf{k}\Gamma \otimes_{\mathbf{k}\Gamma_g} Y$ los elementos $x_i = r^i \otimes x$ para $i = 0, 1, 2$ (es cómodo considerar i en $\mathbb{Z}_3$, de manera que por ejemplo $x_3 = x_0$). Se tiene entonces $\delta(x_i) = r^i s r^{-i} \otimes x_i = r^{2i} s \otimes x_i$, por lo que

$$\begin{aligned} c(x_i \otimes x_j) &= r^{2i}s \rightharpoonup x_j \otimes x_i = r^{2i}sr^j \rightharpoonup x_0 \otimes x_i \\ &= r^{2i-j}s \rightharpoonup x_0 \otimes x_i = r^{2i-j} \rightharpoonup \rho(s)x_0 \otimes x_i \\ &= -x_{2i-j} \otimes x_i. \end{aligned}$$

En particular, $c(x_i \otimes x_i) = -x_i \otimes x_i$, de donde $x_i^2 = 0$ ($i = 0, 1, 2$). Por otra parte, $c(x_0 \otimes x_1) = -x_2 \otimes x_0$. Calculamos entonces $c(x_2 \otimes x_0) = -x_1 \otimes x_2$, y finalmente $c(x_1 \otimes x_2) = -x_0 \otimes x_1$, de donde $(1 + c)(x_0x_1 + x_2x_0 + x_1x_2) = 0$, o, lo que es lo mismo, $x_0x_1 + x_2x_0 + x_1x_2 = 0$ en $\mathfrak{B}(V)$. Análogamente, se tiene la relación $x_0x_2 + x_1x_0 + x_2x_1 = 0$. Se puede calcular la base de Gröbner del ideal generado por estas relaciones. Tomando el orden dado por $x_0 > x_1 > x_2$, simplemente se agrega la relación dada por $x_1x_2x_1 = -x_2x_0x_1 = x_2x_1x_2$, es decir, la relación $x_1x_2x_1 - x_2x_1x_2 = 0$. Es fácil encontrar ahora la dimensión y una base de TV/I, donde I es el ideal generado por estas relaciones. Se puede pensar que se tiene un triángulo con vértices denominados x_0, x_1, x_2. Cada monomio es un camino dentro del triángulo, y los elementos se escriben en su forma normal con respecto al orden especificado, es decir, de la manera en que sus sumandos tengan el orden menor posible. Luego, tenemos caminos que permiten "bajar" el orden de los monomios que los incluyan. Estos caminos son los términos de mayor orden de cada una de las relaciones: x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, $x_1x_2x_1$. La base está dada por todos los monomios que no contengan como submonomios a ninguno de estos, y es

$$\{1,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_1x_0,\ x_1x_2,\ x_2x_0,\ x_2x_1,\ x_1x_2x_0,\ x_2x_1x_0,\ x_2x_1x_2,\ x_2x_1x_2x_0\}.$$

Como anticipamos, esta es la base del álgebra de Nichols generada por V. Para ver esto, se observa que como las relaciones que generan I están en $\ker \mathbf{S}$, tenemos $I \subseteq \ker \mathbf{S}$. Por otra parte, $\mathfrak{B}(V)$ verifica la dualidad de Poincaré de 2.3.2. Luego, si $I \neq \ker \mathbf{S}$ y n es el grado de la integral de $\mathfrak{B}(V)$, tenemos las siguientes posibilidades.

1. $n = 2$ y entonces $\dim \mathfrak{B}^2(V) = 1$,
2. $n = 3$ y entonces $\dim \mathfrak{B}^2(V) = 3$,
3. $n = 4$ y $\dim \mathfrak{B}^2(V) < 4$.

En cualquier caso, deberíamos tener más relaciones de las que tenemos en grado 2, pero es fácil ver que no hay más que estas. Simplemente se calcula el subespacio de $V \otimes V$ asociado al autovalor -1 para c, y enseguida se ve que tiene dimensión 5, de donde $\mathfrak{B}^2(V) = T^2V/\ker(1 + c)$ tiene dimensión 4.

En forma más general, tenemos:

2.4.10. Ejemplo. Sea $\Gamma = \mathbb{D}_p$ el grupo dihedral, generado por r, s con relaciones $r^p = s^2 = rsrs = 1$, donde p es un primo impar. Tenemos $\Gamma_s = \{1, s\}$ y sea sgn la representación no trivial de Γ_s. Tomamos $V = M(s, \mathrm{sgn})$, que tiene base $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ con $\delta(x_i) = r^{2i}s \otimes x_i$, $r_i \rightharpoonup x_j = x_{i+j}$, $s \rightharpoonup x_i = -x_{-i}$. Tenemos entonces $c(x_i \otimes x_j) = -x_{2i-j} \otimes x_i$ (como antes, tomamos los subíndices en $\mathbb{Z}/p$).

Para calcular $\ker \mathbf{S}^2$ es conveniente tomar otra base de $V \otimes V$. Sea ξ una raíz p-ésima primitiva de la unidad. Sea

$$w_k^r = \sum_{i=0}^{p-1} \xi^{ri} x_i \otimes x_{i+k}, \qquad 0 \le r, k < p.$$

Entonces los w_k^r forman una base de $V^{\otimes 2}$, y $c_{V,V}(w_k^r) = -\xi^{rk} w_k^r$, de donde

$$\ker(\mathbf{S}^2) = \ker(\mathrm{id} + c) = \langle w_k^r,\ rk = 0\rangle \qquad (\text{y luego } \dim \ker(\mathbf{S}^2) = 2p - 1).$$

Es fácil ver que $\langle w_0^0, w_0^1, \dots, w_0^{p-1}\rangle = \langle (x_0 \otimes x_0),\ (x_1 \otimes x_1), \dots,\ (x_{p-1} \otimes x_{p-1})\rangle$. Definimos entonces $R_p = A(V)/I$, donde I está generado por

$$\begin{aligned}
& x_i \otimes x_i, \qquad 0 \le i < p,\\
w_1^0 = {} & x_0 \otimes x_1 + x_1 \otimes x_2 + \dots + x_{p-1} \otimes x_0,\\
w_2^0 = {} & x_0 \otimes x_2 + x_1 \otimes x_3 + \dots + x_{p-1} \otimes x_1,\\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
w_{p-1}^0 = {} & x_0 \otimes x_{p-1} + x_1 \otimes x_0 + \dots + x_{p-1} \otimes x_{p-2}.
\end{aligned}$$

Está claro que se tiene una proyección $R_p \twoheadrightarrow \mathfrak{B}(V)$. El núcleo $\ker \mathbf{S}$ es más complicado de calcular. Si fuera exactamente igual a I, estas álgebras de Nichols serían de dimensión infinita para $p > 7$. Esto es consecuencia del teorema de

2.4.11. Teorema (Golod–Shafarevich). *Sea $V = \oplus_{n>0} V_n$ un espacio vectorial graduado, y sea $A = T(V)$ el álgebra tensorial (graduada) de V. Sea I un* *ideal homogéneo, y supongamos que I está generado (como ideal) por los subespacios $\oplus_{n>0} I_n$. Sea $R = T(V)/I$ el álgebra cociente. Sean P_V y P_I las series de Hilbert de V e I, esto es,*

$$P_V(t) = \sum_{n>0} \dim(V_n)t^n, \qquad P_I(t) = \sum_{n>0} \dim(I_n)t^n.$$

Sea $g(t) = \sum g_n t^n = (1 - P_V(t) + P_I(t))^{-1}$ como serie formal. Si $g_n \geq 0 \quad \forall n$, entonces R es de dimensión infinita.

PRUEBA. Ver [**Ufn95**]. □

2.4.12. PROPOSICIÓN. *Las álgebras R_p son de dimensión infinita si $p > 7$.*

PRUEBA. Aplicamos el teorema. Tenemos $P_V(t) = pt$, y $P_I(t) = (2p-1)t^2$. Entonces

$$g(t) = (1 - pt + (2p-1)t^2)^{-1} = (1 - t/a)^{-1}(1 - t/b)^{-1} = (\sum_{n\geq 0}(t/a)^n)(\sum_{n\geq 0}(t/b)^n)$$

para a, b las raíces de $(1 - pt + (2p-1)t^2)$. Si a y b son ambas reales y positivas entonces $g_n \geq 0 \ \forall n$. Esto sucede si $p^2 - 4(2p-1) \geq 0$, que equivale a $p > 7$. □

Si p no es primo se puede tomar un módulo de manera análoga, pero las relaciones se vuelven un poco más engorrosas de escribir.

2.4.13. EJEMPLO. Prometimos ver la diferencia entre un álgebra de Nichols y un álgebra q-simétrica. Este ejemplo muestra las dificultades de trabajar con álgebras q-simétricas en general. Sea V un espacio vectorial, de dimensión finita para fijar ideas, y pongamos $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base de V. Sea $q \in \mathbf{k}^{\times}$. Definimos $c \in \operatorname{Aut}(V \otimes V)$ por $c = q$, esto es, $c(x_i \otimes x_j) = q x_i \otimes x_j$. Es claro entonces que $\mathbf{S}^i = (i)_q^!$, por lo que si $N(q) = \infty$ tenemos $\mathfrak{B}(V) = CV$, y si $N = N(q) < \infty$ tenemos $\mathfrak{B}(V) = CV/(V^{\otimes N})$. En este último caso tenemos $\dim \mathfrak{B}^i(V) = n^i$, por lo que no se verifica la dualidad de Poincaré, y en particular $\mathfrak{B}(V)$ no tiene integral pese a ser de dimensión finita. Más aun, sea $W = \operatorname{span}\{x_1\}$. Tenemos $\mathfrak{B}(W) = \mathbf{k}[x_1]/(x_1^N)$, que es una subálgebra de Hopf trenzada. Sin embargo $\dim \mathfrak{B}(V) = \sum_{i=0}^{N-1} n^i = (n^N - 1)/(n-1)$ mientras que $\dim \mathfrak{B}(W) = N$, por lo que en general $\mathfrak{B}(V)$ no es libre como módulo sobre $\mathfrak{B}(W)$. Esto prueba la necesidad de tomar categorías trenzadas rígidas para dar una versión trenzada del teorema de Nichols–Zoeller, y también prueba la necesidad de tomar un PTR en el teorema que se verá en el capítulo 3, explícitamente, el Teorema 3.4.1.

2.4.14. EJEMPLO. Sea (V, c) un PTR y consideremos $(\bar{V}, \bar{c})$ el PTR dado por $\bar{V} = V$, $\bar{c} = c^{-1}$. Afirmamos que $\mathfrak{B}(\bar{V}) \simeq \mathfrak{B}(V)$.

PRUEBA. Sea $D \in \mathbb{S}_n$ el elemento de longitud máxima, esto es,

$$D = (\tau_1\tau_2\cdots\tau_{n-1})(\tau_1\tau_2\cdots\tau_{n-2})\cdots(\tau_1\tau_2)\tau_1.$$

Sea R un sistema de raíces de tipo A_n y sea Δ^+ una base. Sabemos que el grupo de Weyl de R es $\mathbb{S}_n$ y que, como con todo grupo de Weyl, la longitud de un elemento cuenta exactamente cuántas raíces de R^+ manda ese elemento a R^-. Esto es, si $w \in W$, entonces $\ell(w) = \#\{\alpha \in R^+ \mid w\alpha \in R^-\}$. Luego,

$$\begin{aligned}\ell(Dw) &= \#\{\alpha \in R^+ \mid Dw\alpha \in R^-\}\\ &= \#\{\alpha \in R^+ \mid w\alpha \in R^+\}\\ &= \#R^+ - \ell(w) = \ell(D) - \ell(w),\end{aligned}$$

con lo que $\ell(Dww^{-1}) = \ell(D) = \ell(Dw)+\ell(w) = \ell(Dw)+\ell(w^{-1})$. De esta manera, $s(D) = s(Dww^{-1}) = s(Dw)s(w^{-1})$. Por otra parte, si $w = \tau_{i_1}\cdots\tau_{i_l}$, $l = \ell(w)$, entonces $w^{-1} = \tau_{i_l}\cdots\tau_{i_1}$ y

$$s(w^{-1}) = \sigma_{i_l}\cdots\sigma_{i_1} = (\sigma_{i_l}^{-1}\cdots\sigma_{i_1}^{-1})^{-1} = (\bar{s}(w))^{-1}.$$

Luego, $s(D)\bar{s}(w) = s(Dw)$. Esto dice que

$$s(D)\bar{\mathbf{S}}^n = s(D)\sum_{w\in\mathbb{S}_n}\bar{s}(w) = \sum_{w\in\mathbb{S}_n}s(Dw) = \sum_{w\in\mathbb{S}_n}s(w) = \mathbf{S}^n.$$

Tenemos entonces que $\mathfrak{B}^n(V) = \operatorname{Im}\mathbf{S}^n = s(D)\operatorname{Im}\bar{\mathbf{S}}^n = s(D)\mathfrak{B}^n(\bar{V})$. En particular, como $s(D)$ es un isomorfismo, $\dim\mathfrak{B}^n(V) = \dim\mathfrak{B}^n(\bar{V})$, y más aun hay un isomorfismo lineal cuya expresión explícita es $s(D)$ en cada grado. $\square$

2.5. Generalización de los ELC

Sea $V = \oplus_i V_i$ una descomposición del PT (V, c). Vimos por ejemplo en 2.4.8 que no necesariamente $\mathfrak{B}(V)$ coincide con el producto tensorial de los $\mathfrak{B}(V_i)$, si bien podemos encontrar una relación entre las dimensiones. Este resultado generaliza [**AS98b**, Lemma 3.4 y Prop. 3.5].

2.5.1. TEOREMA. *Sea (V, c) un PT que se descompone como $V = \oplus_{i=1}^n V_i$ y supongamos que $\mathfrak{B}(V_i)$ es de dimensión finita $\forall i$. Entonces*

$$\dim\mathfrak{B}(V) \geq \prod_{i=1}^n \dim\mathfrak{B}(V_i).$$

Más aun, la igualdad vale si y sólo si $c_{ij} = c_{ji}^{-1}$ $\forall i \neq j$.

Prueba. Sea $\{v_i^1, \dots, v_i^{M_i}\}$ una base de vectores homogéneos de TV_i módulo $\ker(\mathbf{S})$, y sea d_i^j el grado de v_i^j. En otras palabras, el conjunto

$$\{\mathbf{S}^{d_i^1}(v_i^1), \dots, \mathbf{S}^{d_i^{M_i}}(v_i^{M_i})\}$$

es una base de $\mathfrak{B}(V_i)$. El conjunto

$$\mathcal{B} = \{v_1^{k_1} \otimes \cdots \otimes v_n^{k_n} \in T(V_1) \otimes \cdots \otimes T(V_n) \mid 1 \leq k_i \leq M_i\}$$

es linealmente independiente en $T(V)$, y tiene cardinal $(\prod_i \dim \mathfrak{B}(V_i))$. Nótese entonces que el conjunto

$$\{\mathbf{S}^{d_1^{k_1}} v_1^{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{S}^{d_n^{k_n}} v_n^{k_n} \mid 1 \leq k_i \leq M_i\}$$

es también linealmente independiente. Es suficiente para probar la primera parte ver que $\mathcal{B}$ es l.i. después de aplicarle $\mathbf{S}$. Para esto, supongamos que alguna combinación lineal $\sum \lambda_{k_1,\dots,k_n} v_1^{k_1} \otimes \cdots \otimes v_n^{k_n}$ cae en $\ker \mathbf{S}$. El espacio $T(V)$ se puede descomponer en componentes homogéneas con respecto a los V_i, y gracias a las hipótesis sobre c se tiene que $\mathbf{S}$ es un morfismo multi-graduado. Luego, la combinación lineal de arriba se puede tratar para cada componente homogénea, y podemos entonces suponer que existen $d_1, \dots, d_n$ tales que $\lambda_{k_1,\dots,k_n} = 0$ si $d_i^{k_i} \neq d_i$ para algún i. Sea $m = d_1 + \cdots + d_n$. Ahora, por (2.3.11), tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{S}^m\left(\sum \lambda_{k_1,\dots,k_n} v_1^{k_1} \otimes \cdots \otimes v_n^{k_n}\right) \\
&= \mathbf{T}_{d_1,\dots,d_n}(\mathbf{S}^{d_1|\cdots|d_n})\left(\sum \lambda_{k_1,\dots,k_n} v_1^{k_1} \otimes \cdots \otimes v_n^{k_n}\right) \\
&= \sum_{x^{-1} \in Sh_{d_1,\dots,d_n}} s(x)(\mathbf{S}^{d_1|\cdots|d_n})\left(\sum \lambda_{k_1,\dots,k_n} v_1^{k_1} \otimes \cdots \otimes v_n^{k_n}\right),
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

donde $Sh_{d_1,\dots,d_n} \subset \mathbb{S}_m$ es el shuffle. Además la componente homogénea de grados $(d_1, \dots, d_n)$ de CV se puede descomponer como una suma directa tomando todos los órdenes posibles para d_i tensores de V_i. Explícitamente, sean

$$Z_{d_1,\dots,d_n} = \{f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\} \mid \#(f^{-1}(i)) = d_i \ \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

La descomposición de la que se hablaba es

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{f \in Z_{d_1,\dots,d_n}} V_f &:= (\text{componente } (d_1, \dots, d_n) \text{ de } CV) \\
&= \bigoplus_{f \in Z_{d_1,\dots,d_n}} V_{f(1)} \otimes V_{f(2)} \otimes \cdots \otimes V_{f(m)}
\end{aligned}$$

Es claro que existe una biyección $\gamma : (Sh_{d_1,\dots,d_n})^{-1} \to Z_{d_1,\dots,d_n}$ tal que para $x \in (Sh_{d_1,\dots,d_n})^{-1}$ se tiene $s(x)(V_1^{\otimes d_1} \otimes \cdots \otimes V_n^{\otimes d_n}) = V_{\gamma(x)}$. Luego, (2.5.2) implica, para cada $x \in (Sh_{d_1,\dots,d_n})^{-1}$, que

$$0 = s(x)(\mathbf{S}^{d_1|\cdots|d_n})\left(\sum \lambda_{k_1,\dots,k_n} v_1^{k_1} \otimes \cdots \otimes v_n^{k_n}\right),$$

pero como $s(x)$ es un isomorfismo para cada $x \in \mathbb{S}_n$, esto significa que

$$0 = (\mathbf{S}^{d_1|\cdots|d_n})\left(\sum \lambda_{k_1,\dots,k_n} v_1^{k_1} \otimes \cdots \otimes v_n^{k_n}\right) = \sum \lambda_{k_1,\dots,k_n} (\mathbf{S}^{d_1} v_1^{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{S}^{d_n} v_n^{k_n}),$$

que, a su vez, implica que $\lambda_{k_1,\dots,k_n} = 0 \ \forall k_1, \dots, k_n$. Esto prueba la primera parte.

Para la segunda parte, supóngase que existen i, j, $(i \neq j)$ tal que $c_{ji}c_{ij} \neq \mathrm{id}$, y sea $v \in V_i$, $w \in V_j$ tal que $c_{ji}c_{ij}(v \otimes w) \neq (v \otimes w)$. Considérese el elemento $z \in T(V)$ dado por $z = (\mathrm{id} - c_{ij})(v \otimes w)$. Como el espacio generado por el conjunto $\mathbf{S}(\mathcal{B}) = \{\mathbf{S}(y), y \in \mathcal{B}\}$ es un subespacio de $\mathfrak{B}(V)$ con dimensión $\prod_l \dim \mathfrak{B}(V_l)$, es suficiente probar que $\mathbf{S}(z)$ no cae en este espacio. Notemos que como $\deg z = 2$, se tiene $\mathbf{S}(z) = (\mathrm{id} + c)(z)$. Supongamos que

$$\mathbf{S}(z) = \mathbf{S}\left(\sum \lambda_{k_1,\dots,k_n} v_1^{k_1} \otimes \cdots \otimes v_n^{k_n}\right).$$

Es fácil ver, mirando las componentes homogéneas, que se debe tener $\lambda_{k_1,\dots,k_n} = 0$ cuando $(d_1^{k_1}, \dots, d_n^{k_n}) \neq e_i + e_j$, donde $e_l = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ con el 1 en la coordenada l. En otras palabras, si $i < j$ existen $u_1, \dots, u_s \in V_i$, $u'_1, \dots, u'_s \in V_j$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbf{k}$ tal que $\mathbf{S}(z) = \mathbf{S}(\sum_t \lambda_t u_t \otimes u'_t)$ (si $i > j$, $\mathbf{S}(z) = \mathbf{S}(\sum_t \lambda_t u'_t \otimes u_t)$ y es análogo). Ahora, como $z = (1-c)(v \otimes w)$ y $\mathbf{S}(z) = (1+c)(z)$, tenemos

$$(1 - c^2)(v \otimes w) = (1+c)(\sum_t \lambda_t u_t \otimes u'_t) \in V_i \otimes V_j \oplus V_j \otimes V_i,$$

pero la componente en $V_j \otimes V_i$ del lado izquierdo se anula, y luego tenemos $c(\sum_t \lambda_t u_t \otimes u'_t) = 0$. Como c es un isomorfismo, debemos tener $\sum_t \lambda_t u_t \otimes u'_t = 0$, pero esto implica que la componente $V_i \otimes V_j$ del lado derecho se anula, de donde $c^2(v \otimes w) = (v \otimes w)$, lo que es una contradicción.

Solo resta probar que si $c_{ij}c_{ji} = \mathrm{id} \ \forall i \neq j$ entonces $\mathbf{S}(\mathcal{B})$ es una base de $\mathfrak{B}(V)$. Esto es lo mismo que decir que $\mathcal{B}$ genera $T(V)$ módulo $\ker \mathbf{S}$. Sea $\{w_i^1, \dots, w_i^{\theta_i}\}$ una base de V_i. Sea

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{w_{a_1}^{r_1} \otimes \cdots \otimes w_{a_m}^{r_m} \mid m \in \mathbb{N},\ 1 \leq r_t \leq \theta_{a_t} \text{ y } a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m\}.$$

Como, módulo $\ker(\mathbf{S})$, los elementos de $\tilde{\mathcal{B}}$ son combinaciones lineales de los elementos de $\mathcal{B}$, alcanza con probar que $\tilde{\mathcal{B}}$ genera $T(V)$ módulo $\ker(\mathbf{S})$. Para ver esto, es suficiente ver que si $i < j$ y $1 \leq r_i \leq \theta_i$, $1 \leq r_j \leq \theta_j$, entonces $w_j^{r_j} \otimes w_i^{r_i}$ se puede expresar en términos de los elementos en $\tilde{\mathcal{B}}$. Sea $z = (1-c)(w_j^{r_j} \otimes w_i^{r_i})$. Dado que $c_{ij}c_{ji} = \mathrm{id}$, tenemos que $\mathbf{S}(z) = (1+c)(z) = 0$, lo cual da la relación

$$w_j^{r_j} \otimes w_i^{r_i} = c_{ji}(w_j^{r_j} \otimes w_i^{r_i}) \mod \ker(\mathbf{S}).$$

Ahora, $c_{ji}(w_j^{r_j} \otimes w_i^{r_i}) \in V_i \otimes V_j$, y se puede escribir como una combinación lineal de elementos en $\tilde{\mathcal{B}}$. $\square$

2.5.3. Definición. A un álgebra así la llamaremos *Espacio Lineal Cuántico (o ELC) entre los V_i.*

2.5.4. Observación. Veremos en el próximo capítulo (teorema 3.4.1) que $\dim \mathfrak{B}(V)$ es divisible por $\prod_i \dim \mathfrak{B}(V_i)$ bajo ciertas hipótesis técnicas adicionales, que se verifican en particular si $V = \oplus_i V_i = \oplus_i M(g_i, \rho_i) \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$, Γ un grupo finito.

2.6. Relaciones de Serre cuánticas

Ahora veremos una generalización de las relaciones cuánticas de Serre. Para ello, se define:

2.6.1. Definición. Sea (R, m, Δ) un álgebra de Hopf trenzada con trenza c. Definimos la adjunta como la composición

$$\mathrm{Ad} = R \otimes R \xrightarrow{\Delta\otimes\mathrm{id}} R \otimes R \otimes R \xrightarrow{id\otimes c} R \otimes R \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathcal{S}} R \otimes R \otimes R \xrightarrow{m(m\otimes\mathrm{id})} R$$

Si se trabaja en una categoría interna a la de conjuntos, se pone para $x \in R$ la adjunta $\mathrm{Ad}_x(y) = \mathrm{Ad}(x \otimes y)$. Nótese que si x es primitivo, se tiene

$$\mathrm{Ad}_x(y) = xy - m(c(x \otimes y)).$$

2.6.2. Definición. Sea V un espacio vectorial $x \in V$ y $T \in \mathrm{End}(V)$. Llamaremos *orden de nilpotencia de T en x* al menor $d \in \mathbb{N}$ tal que $T^d(x) = 0$.

Veremos ahora una igualdad en el álgebra de grupo del grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$, de la que las relaciones de Serre serán consecuencia inmediata.

Sea 1 el elemento identidad de $\mathbb{B}_n$ (o de $\mathbb{B}_{n+1}$) Para $1 \le i \le j \le n$, consideramos los siguientes elementos de $\mathbf{k}\mathbb{B}_{n+1}$:

$$\begin{aligned} U_i^j &= \sigma_j \sigma_{j-1} \cdots \sigma_i, \\ D_i^j &= \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_j, \\ R_i^j &= (1 - \sigma_j\sigma_j)(1 - D_{j-1}^j\sigma_j)(1 - D_{j-2}^j\sigma_j) \cdots (1 - D_i^j\sigma_j). \end{aligned}$$

2.6.3. Lema. *Se tienen las siguientes identidades:*

1. *Sea $y \in \mathbb{B}_n \hookrightarrow \mathbb{B}_{n+1}$ y pongamos $x = \iota_{2\text{-}(n+1)}(y)$. Entonces $U_1^n x = yU_1^n$; $xD_1^n = D_1^n y$.*
2. *Sea $x \in \mathbb{B}_{2\text{-}(n+1)}$. Entonces $xD_1^n U_1^n = D_1^n U_1^n x$.*

3. $U_1^j D_2^n \sigma_n = D_1^n \sigma_n U_1^{j-1}$ *para* $j < n$.
4. $(1 + U_1^1 + U_1^2 + \cdots + U_1^{n-1} - D_n^n U_1^n - D_{n-1}^n U_1^n - \cdots - D_1^n U_1^n) R_2^n$
$= R_1^n (1 + U_1^1 + U_1^2 + \cdots + U_1^{n-1})$ *para* $n \geq 2$.

PRUEBA. 1. Como ι_{2_n} es un morfismo, lo podemos probar para los generadores. Sea $y = \sigma_{j-1}$, $2 \leq j \leq n$. Luego $x = \sigma_j$, y tenemos

$$\begin{aligned} U_1^n x &= \sigma_n \cdots \sigma_1 \sigma_j = (\sigma_n \cdots \sigma_{j+1}) \sigma_j \sigma_{j-1} \sigma_j (\sigma_{j-2} \cdots \sigma_1) \\ &= (\sigma_n \cdots \sigma_{j+1}) \sigma_{j-1} \sigma_j \sigma_{j-1} (\sigma_{j-2} \cdots \sigma_1) = \sigma_{j-1} \sigma_n \cdots \sigma_1 \\ &= y U_1^n. \end{aligned}$$

Para D_1^n es análogo.

2. Como en el caso anterior, lo probamos para los generadores σ_j, $2 \leq j \leq n$. Tenemos

$$\sigma_j D_1^n U_1^n = D_1^n \sigma_{j-1} U_1^n = D_1^n U_1^n \sigma_j.$$

3. Simplemente

$$\begin{aligned} U_1^j D_2^n \sigma_n = U_2^j D_1^n \sigma_n = \sigma_j \cdots \sigma_2 D_1^n \sigma_n = \sigma_j \cdots \sigma_3 D_1^n \sigma_1 \sigma_n = \dots \\ \dots = D_1^n \sigma_{j-1} \cdots \sigma_1 \sigma_n = D_1^n \sigma_n \sigma_{j-1} \cdots \sigma_1 = D_1^n \sigma_n U_1^{j-1}. \end{aligned}$$

Es interesante notar que estas igualdades son obvias con dibujos. En la Figura 2.6.A se ve la primera igualdad de 1 y la igualdad de 2.

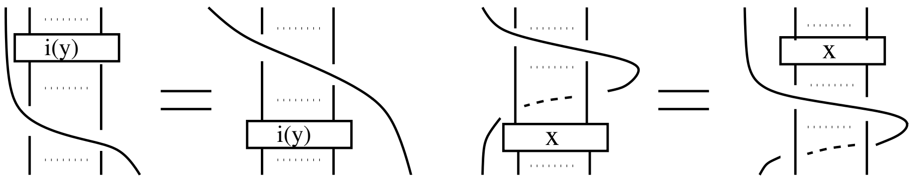

FIGURA 2.6.A. Prueba de 1 y 2.

4. Por inducción. Notemos primero que

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+1} &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+1} \sigma_i. \end{aligned}$$

Para $n = 2$ tenemos

$$\begin{aligned}
&(1+\sigma_1-\sigma_2\sigma_2\sigma_1-\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1)(1-\sigma_2\sigma_2)\\
&\quad= 1-\sigma_2\sigma_2+\sigma_1-\sigma_1\sigma_2\sigma_2-\sigma_2\sigma_2\sigma_1+\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2-\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1+\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\\
&\quad= 1-\sigma_2\sigma_2+\sigma_1-\sigma_1\sigma_2\sigma_2-\sigma_2\sigma_2\sigma_1+\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2-\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1+\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\\
&\quad= (1-\sigma_2\sigma_2-\sigma_1\sigma_2\sigma_2+\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2)(1+\sigma_1)\\
&\quad= (1-\sigma_2\sigma_2)(1-\sigma_1\sigma_2\sigma_2)(1+\sigma_1)
\end{aligned}$$

Supongamos que la igualdad vale para n. Entonces

$$\begin{aligned}
&(1+U_1^1+U_1^2+\cdots+U_1^n-D_{n+1}^{n+1}U_1^{n+1}-D_n^{n+1}U_1^{n+1}-\cdots-D_1^{n+1}U_1^{n+1})R_2^{n+1}\\
&\quad= R_2^{n+1}+(U_1^1+U_1^2+\cdots+U_1^n-D_{n+1}^{n+1}U_1^{n+1}-\cdots-D_2^{n+1}U_1^{n+1})R_2^{n+1}\\
&\qquad\qquad - D_1^{n+1}U_1^{n+1}R_2^{n+1}\\
&\quad= R_2^{n+1}+(1+U_2^2+\cdots+U_2^n-D_{n+1}^{n+1}U_2^{n+1}-\cdots-D_2^{n+1}U_2^{n+1})\sigma_1R_2^{n+1}\\
&\qquad\qquad - D_1^{n+1}U_1^{n+1}R_2^{n+1}\\
&\quad= R_2^{n+1}+(1+U_2^2+\cdots+U_2^n-D_{n+1}^{n+1}U_2^{n+1}-\cdots-D_2^{n+1}U_2^{n+1})\\
&\qquad\qquad \times\sigma_1R_3^{n+1}(1-D_2^{n+1}\sigma_{n+1})-R_2^{n+1}D_1^{n+1}U_1^{n+1}\ \text{(por 2)}\\
&\quad= R_2^{n+1}+(1+U_2^2+\cdots+U_2^n-D_{n+1}^{n+1}U_2^{n+1}-\cdots-D_2^{n+1}U_2^{n+1})\\
&\qquad\qquad \times R_3^{n+1}\sigma_1(1-D_2^{n+1}\sigma_{n+1})-R_2^{n+1}D_1^{n+1}U_1^{n+1}\ (R_3^{n+1}\in\mathbf{k}\mathbb{B}_{3_n+2})\\
&\quad= R_2^{n+1}+\iota_{2_(n+2)}((1+U_1^1+\cdots+U_1^{n-1}-D_n^nU_1^n-\cdots-D_1^nU_1^n)R_2^n)\\
&\qquad\qquad \times\sigma_1(1-D_2^{n+1}\sigma_{n+1})-R_2^{n+1}D_1^{n+1}U_1^{n+1}\\
&\quad= R_2^{n+1}+\iota_{2_(n+2)}(R_1^n(1+U_1^1+U_1^2+\cdots+U_1^{n-1}))\sigma_1(1-D_2^{n+1}\sigma_{n+1})\\
&\qquad\qquad - R_2^{n+1}D_1^{n+1}U_1^{n+1}\ \text{(por HI)}\\
&\quad= R_2^{n+1}+R_2^{n+1}(1+U_2^2+U_2^3+\cdots+U_2^n)\sigma_1(1-D_2^{n+1}\sigma_{n+1})-R_2^{n+1}D_1^{n+1}U_1^{n+1}\\
&\quad= R_2^{n+1}[1+\sigma_1+U_2^2\sigma_1+\cdots+U_2^n\sigma_1-\sigma_1D_2^{n+1}\sigma_{n+1}\\
&\qquad\qquad -U_2^2\sigma_1D_2^{n+1}\sigma_{n+1}-\cdots-U_2^n\sigma_1D_2^{n+1}\sigma_{n+1}-D_1^{n+1}U_1^{n+1}]\\
&\quad= R_2^{n+1}(1+U_1^1+U_1^2+\cdots+U_1^n-D_1^{n+1}\sigma_{n+1}-U_1^2D_2^{n+1}\sigma_{n+1}-\cdots\\
&\qquad\qquad -U_1^nD_2^{n+1}\sigma_{n+1}-D_1^{n+1}\sigma_{n+1}U_1^n)\\
&\quad= R_2^{n+1}(1+U_1^1+\cdots+U_1^n-D_1^{n+1}\sigma_{n+1}-D_1^{n+1}\sigma_{n+1}U_1^1-\cdots-D_1^{n+1}\sigma_{n+1}U_1^{n-1}\\
&\qquad\qquad -D_1^{n+1}\sigma_{n+1}U_1^n)\ \text{(por 3)}\\
&\quad= R_2^{n+1}(1-D_1^{n+1}\sigma_{n+1})(1+U_1^1+U_1^2+\cdots+U_1^n)\\
&\quad= R_1^{n+1}(1+U_1^1+U_1^2+\cdots+U_1^n),
\end{aligned}$$

lo que prueba la afirmación.

$\square$

2.6.4. PROPOSICIÓN. *$\mathbf{S}^{n+1}(1-U_1^n)(1-U_2^n)\cdots(1-U_n^n) = R_1^n\mathbf{S}^{n|1}$ para $n \geq 1$.*

PRUEBA. Por inducción. Para $n = 1$ es

$$\mathbf{S}^2(1-\sigma_1) = (1+\sigma_1)(1-\sigma_1) = 1 - \sigma_1\sigma_1.$$

Si la igualdad vale para n, tenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}^{n+2}(1-U_1^{n+1})(1-U_2^{n+1})\cdots(1-U_{n+1}^{n+1})\\
&\quad = \mathbf{S}^{n+2}(1-U_2^{n+1})\cdots(1-U_{n+1}^{n+1}) - \mathbf{S}^{n+2}U_1^{n+1}(1-U_2^{n+1})\cdots(1-U_{n+1}^{n+1})\\
&\quad = \mathbf{T}_{1,n+1}\mathbf{S}^{1|n+1}(1-U_2^{n+1})\cdots(1-U_{n+1}^{n+1})\\
&\qquad\qquad - \mathbf{T}_{n+1,1}\mathbf{S}^{n+1|1}U_1^{n+1}(1-U_2^{n+1})\cdots(1-U_{n+1}^{n+1})\\
&\quad = \mathbf{T}_{1,n+1}\mathbf{S}^{1|n+1}(1-U_2^{n+1})\cdots(1-U_{n+1}^{n+1})\\
&\qquad\qquad - \mathbf{T}_{n+1,1}U_1^{n+1}\mathbf{S}^{1|n+1}(1-U_2^{n+1})\cdots(1-U_{n+1}^{n+1}) \text{ (por 2.6.3,1)}\\
&\quad = (\mathbf{T}_{1,n+1} - \mathbf{T}_{n+1,1}U_1^{n+1})\mathbf{S}^{1|n+1}(1-U_2^{n+1})\cdots(1-U_{n+1}^{n+1})\\
&\quad = (\mathbf{T}_{1,n+1} - \mathbf{T}_{n+1,1}U_1^{n+1})\iota_{2_n+2}(\mathbf{S}^{n+1}(1-U_1^n)\cdots(1-U_n^n))\\
&\quad = (\mathbf{T}_{1,n+1} - \mathbf{T}_{n+1,1}U_1^{n+1})\iota_{2_n+2}(R_1^n\mathbf{S}^{n|1}) \text{ (por HI)}\\
&\quad = (\mathbf{T}_{1,n+1} - \mathbf{T}_{n+1,1}U_1^{n+1})(R_2^{n+1}\mathbf{S}^{1|n|1})\\
&\quad = (1 + U_1^1 + U_1^2 + \cdots + U_1^{n+1} - U_1^{n+1} - D_{n+1}^{n+1}U_1^{n+1} - \cdots - D_1^{n+1}U_1^{n+1})\\
&\qquad\qquad \times R_2^{n+1}\mathbf{S}^{1|n|1}\\
&\quad = (1 + U_1^1 + \cdots + U_1^n - D_{n+1}^{n+1}U_1^{n+1} - \cdots - D_1^{n+1}U_1^{n+1})R_2^{n+1}\mathbf{S}^{1|n|1}\\
&\quad = R_1^{n+1}(1 + U_1^1 + \cdots + U_1^n)\mathbf{S}^{1|n|1} \text{ (por 2.6.3,4)}\\
&\quad = R_1^{n+1}(\mathbf{T}_{1,n}|1)(\mathbf{S}^{1|n}|1)\\
&\quad = R_1^{n+1}(\mathbf{S}^{n+1}|1)\\
&\quad = R_1^{n+1}\mathbf{S}^{(n+1)|1}.
\end{aligned}$$

$\square$

2.6.5. COROLARIO. *Sean $x_1, x_2 \in V$ linealmente independientes tales que la trenza verifica $c(x_i \otimes x_j) = q_{ij}x_j \otimes x_i$ para $i, j = 1, 2$. Sea $N = N(q_{11})$ y sea t el menor número natural (si existe) tal que $q_{11}^t q_{12}q_{21} = 1$. Sea $r = \min\{t, N-1\}$. Entonces el orden de nilpotencia de Ad_{x_1} en x_2 es exactamente $r+1$, esto es, $\mathrm{Ad}_{x_1}^r(x_2) \neq 0$ y $\mathrm{Ad}_{x_1}^{r+1}(x_2) = 0$.*

PRUEBA. Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos $\mathbf{S}^{n+1}(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{x_1}^n(x_2)) \in \mathfrak{B}(V)$, donde $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ es la adjunta en AV. Es fácil ver que este elemento es el resultado de multiplicar el lado izquierdo de 2.6.4 con $x_1^n x_2$. Por otra parte, el lado derecho actúa sobre $x_1^n x_2$ por el escalar

$$(1 - q_{12}q_{21})(1 - q_{11}q_{12}q_{21})(1 - q_{11}^2 q_{12}q_{21}) \cdots (1 - q_{11}^{n-1} q_{12}q_{21})(n)_{q_{11}}^! .$$

La conclusión es inmediata. □

2.7. Ser de Tipo Grupo y sus derivaciones

Una herramienta extremadamente útil para el estudio de las álgebras de Nichols es la de las derivaciones, que pasamos a definir.

2.7.1. Definición. Sea (V, c) un par trenzado rígido y sea $\alpha \in V^*$ un elemento del dual. Definimos el operador ∂_α, de grado -1, por

$$\partial_\alpha(x) = \alpha \rightharpoonup x = x_{(1)}\alpha(x_{(2)}),$$

donde se entiende que α se anula sobre las componentes de grado distinto de 1. En otras palabras, si $x = \mathbf{S}^n(y) \in \mathfrak{B}^n(V)$, entonces $\partial_\alpha(x) = \mathbf{S}^{n-1}(\mathrm{id} \otimes \alpha)\mathbf{S}_{n-1,1}(y)$. Si se tiene una base de V $\{x_1, \dots, x_n\}$ y se denota por $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ la base dual, usaremos el abuso de notación $\partial_i = \partial_{\partial_i}$.

2.7.2. Ejemplo. Sea V de dimensión 1 generado por x y sea $\partial(x) = 1$. En 2.4.1 se calculó $\Delta(x^n)$, y es inmediato ver entonces que $\partial(x^n) = (n)_q \, x^{n-1}$. Iterando, tenemos $\partial^n(x^n) = (n)_q^!$. Esto demuestra por otra vía que $x^n \neq 0$ si $n < N$ para $N = N(q)$.

El contexto aparentemente más propicio para usar derivaciones es el de objetos en categorías de Yetter–Drinfeld sobre álgebras de grupo. La razón es que tales objetos tienen bases que se comportan bien con respecto a la trenza, como lo demuestra el siguiente lema, que fue probado por el réferi de [**Gra99**].

2.7.3. Lema. *Sea (V, c) un PT. Son equivalentes*

1. *V es objeto de ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ para un grupo Γ (posiblemente infinito),*
2. *V tiene una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ y existen $g_i \in \mathrm{Aut}(V)$ $(i = 1, \dots, n)$ tales que $c(x_i \otimes v) = g_i(v) \otimes x_i$,*
3. *V tiene una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ tal que $c(x_i \otimes V) = V \otimes x_i$ $\forall i$.*

Prueba. Es claro que 2 y 3 son equivalentes. Probemos que 1 es equivalente a 2. Supongamos primero que V es objeto de ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$. En particular, V es un $\mathbf{k}\Gamma$-comódulo. Esto da sobre V una graduación sobre Γ (si bien ya lo usamos, no está demás aclarar que esto sucede porque $\mathbf{k}\Gamma$ es cosemisimple y punteada, ver 2.8.2)

$$V = \oplus_{g \in \Gamma} V^g, \qquad \delta(x) = g \otimes x \quad \forall x \in V^g.$$

Se toma entonces una base en cada V^g y con ella se forma la base $\{x_1, \dots, x_n\}$. Abusando de la notación, los morfismos g_i son las acciones asociadas a los elementos g_i tales que $x_i \in V^{g_i}$. La definición de la trenza en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ hace el resto.

Supongamos ahora 2. Tomamos $\Gamma \subset \mathrm{GL}(V)$ el grupo generado por por los g_i. Tenemos entonces una coacción y una acción de Γ sobre V, determinadas por

$$\delta(x_i) = g_i \otimes x_i, \qquad g_i \rightharpoonup v = g_i(v).$$

Afirmamos que $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ con esta estructura. Para probarlo solo falta ver la compatibilidad entre δ y $\rightharpoonup$, es decir, $\delta(g \rightharpoonup y) = gy_{(-1)}g^{-1} \otimes gy_{(0)}$ para $g \in \Gamma$, $\delta(y) = y_{(-1)} \otimes y_{(0)}$. Es suficiente probar esta igualdad en el caso $y = x_i$ y $g = g_j$, lo que es equivalente a probar que

$$g_j(x_i) \in V^{g_j g_i g_j^{-1}}. \tag{2.7.4}$$

Sea $g_j x_i = \sum_k c_k x_k$. Si aplicamos la ecuación de trenzas a $x_j \otimes x_i \otimes z$, obtenemos que

$$\sum_k g_j g_i(z) \otimes c_k x_k \otimes x_j = \sum_k g_k g_j(z) \otimes c_k x_k \otimes x_j \quad \forall z \in V,$$

lo que dice que $c_k = 0$ si $g_j g_i \neq g_k g_j$. $\square$

Introducimos entonces la siguiente terminología, cuyo objetivo es trabajar con los objetos de ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ como pares trenzados, olvidando la categoría a la que pertenecen.

2.7.5. Definición. Sea (V, c) un PT. Diremos que es de *tipo grupo* (o de *TG*) si verifica las condiciones de 2.7.3. Diremos que V *tiene base* $\{x_1, \dots, x_n\}$ y automorfismos $\{g_1, \dots, g_n\}$ si estos verifican 2.7.3-2. Diremos que es de *tipo grupo abeliano* (resp. *tipo grupo finito*), o brevemente de *TGA* (resp. *TGF*), si el grupo Γ generado por los g_i es abeliano (resp. finito). Diremos que V es de *tipo grupo diagonal*, o brevemente de *TGD*, si Γ actúa en forma diagonal sobre V. Es claro entonces que TGD implica TGA, y que si $\operatorname{car} \mathbf{k}$ no divide al orden de Γ (en particular, si $\operatorname{car} \mathbf{k} = 0$) entonces vale la recíproca. Esta es la distinción de la que se hablaba en 2.2.2. Acuñamos los neologismos *PTTG, PTTGA, PTTGF* y *PTTGD* respectivamente para "par trenzado de tipo grupo", "PTTG abeliano", "PTTG finito" y "PTTG diagonal". Obsérvese que un PTTG es automáticamente un PTR. Obsérvese también que los automorfismos $\{g_1, \dots, g_n\}$ de un par trenzado de TG actúan sobre $V^{\otimes m}$, dado que $V^{\otimes m}$ es un objeto de ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$.

2.7.6. LEMA. *Sea (V,c) un PTTG con base $\{x_1,\dots,x_n\}$ y automorfismos $\{g_1,\dots,g_n\}$. Sea $\{\partial_1,\dots,\partial_n\}$ la base de V^* dual a $\{x_1,\dots,x_n\}$. Entonces se verifica la regla de Leibniz*

$$\partial_i(yz) = \partial_i(y)g_i(z) + y\partial_i(z).$$

PRUEBA. Como ambos lados de la igualdad son lineales en $y \otimes z$, alcanza verlo para elementos homogéneos. Supongamos entonces $y = \mathbf{S}^j(a) \in \mathfrak{B}^j(V)$, $z = \mathbf{S}^k(b) \in \mathfrak{B}^k(V)$. Primero obsérvese que, usando la notación de 2.6.3,

$$(\mathrm{id}\otimes\partial_i)U_1^k(x_l \otimes b) = g_l(b)\partial_i(x_l) = g_i(b)\delta_{il} = \partial_i(x_l)g_i(b).$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\partial_i(yz) &= \mathbf{S}^{j+k-1}(\mathrm{id}_{V^{\otimes j+k-1}}\otimes\partial_i)\mathbf{S}_{j+k-1,1}(ab)\\ &= \mathbf{S}^{j+k-1}(\mathrm{id}_{V^{\otimes j+k-1}}\otimes\partial_i)(U_j^{j+k-1}(\mathbf{S}_{j-1,1}\otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes k}}) + (\mathrm{id}_{V^{\otimes j}}\otimes\mathbf{S}_{k-1,1}))(ab)\\ &= \mathbf{S}^{j+k-1}((\mathrm{id}_{V^{\otimes j-1}}\otimes\partial_i\otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes k}})(\mathbf{S}_{j-1,1}\otimes g_i)\\ &\qquad\qquad + (\mathrm{id}_{V^{\otimes j+k-1}}\otimes\partial_i)(\mathrm{id}_{V^{\otimes j}}\otimes\mathbf{S}_{k-1,1}))(ab),\end{aligned}$$

que es la igualdad afirmada. □

Como se prometió en 2.2.5, tenemos ahora una demostración sencilla de aquel hecho.

2.7.7. LEMA. *Un PTTG de dimensión 2 es de TGA. En particular, en característica 0 es de TGD.*

PRUEBA. Sea (V,c) un PTTG de dimensión 2, con automorfismos $\{g_1,g_2\}$. Como Γ está generado por ellos, alcanza con ver que conmutan entre sí. Si $g_1 = g_2$ no hay nada que probar. Si no, se cuenta con (2.7.4): $g_1(x_1) \in V^{g_1}$, y luego $g_1(x_2) \in V^{g_2}$, dado que g_1 es biyectivo. Esto dice que $g_1g_2g_1^{-1} = g_2$. □

2.8. Álgebras de Hopf punteadas

2.8.1. DEFINICIÓN. Sea C una coálgebra y $C_0 \subseteq C_1 \subseteq \dots$ su filtración corradical; C_0 es entonces una suma de coálgebras simples. Se dice que C es *punteada* sii C_0 es un álgebra de grupo (que no es otro que $\mathbf{k}G(C)$). De manera equivalente, si las subcoálgebras simples de C tienen dimensión 1. Un álgebra de Hopf se dice punteada si lo es su coálgebra subyacente.

2.8.2. OBSERVACIÓN. De manera categórica, "punteada" quiere decir que los comódulos irreducibles son de dimensión 1. Este es el concepto dual a que un álgebra A verifique que $A/\mathrm{Jac}\,A \simeq \mathbf{k}\times\cdots\times\mathbf{k}$. Se suele decir que un álgebra como esta es *básica*.

Un resultado ampliamente conocido para coálgebras punteadas es el

2.8.3. Teorema (Taft–Wilson). *Sea C una coálgebra punteada y $\Gamma = G(C)$. Para $g, h \in \Gamma$, sea $\mathcal{P}'_{g,h}(C) \subset C$ un subespacio tal que*

$$\mathcal{P}_{g,h}(C) = \mathbf{k}(g - h) \oplus \mathcal{P}'_{g,h}(C).$$

Entonces

1. $C_1 = \mathbf{k}\Gamma \oplus (\oplus_{g,h\in\Gamma}\mathcal{P}'_{g,h}(C))$.
2. *Si* $n \geq 1$ *y* $c \in C_n$,

$$c = \sum_{g,h\in\Gamma} c_{g,h}, \text{ donde } \Delta(c_{g,h}) = g \otimes c_{g,h} + c_{g,h} \otimes h + w,$$

para algún $w \in C_{n-1} \otimes C_{n-1}$.

Prueba. Ver [**Mon93**, Thm. 5.4.1]. □

En el capítulo 5 veremos el procedimiento del levante, donde se muestra cómo las álgebras de Nichols se pueden usar para clasificar álgebras de Hopf punteadas.

CAPíTULO 3

Un teorema de libertad para álgebras de Nichols

3.1. Una base trenzada para módulos en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$

Sea Γ un grupo finito. Sea $V = \oplus_i M(g_i, \rho_i) \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ de dimensión finita, con $\rho_i : \Gamma_{g_i} \to \operatorname{Aut}(Y_i)$ representaciones irreducibles (ver 1.5.1).

3.1.1. Observación. Como g_i pertenece al centro de Γ_{g_i}, $\rho_i(g_i)$ es un escalar, digamos q_i.

Sea $\{x_1^i, \dots, x_{r_i}^i\}$ una base de Y_i y sea $\{h_1^i, \dots, h_{s_i}^i\}$ un conjunto de representantes de coclases a izquierda de Γ/Γ_{g_i}. Luego $M(g_i, \rho_i) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_i}^{\Gamma}(Y_i)$ tiene base $\{z_{jl}^i = h_j^i \otimes x_l^i,\ 1 \le j \le s_i,\ 1 \le l \le r_i\}$, y consecuentemente $\{z_{jl}^i\}_{i,j,l}$ es una base de V. Sea $\{\partial_{jl}^i\}_{i,j,l}$ la base dual. Sea $t_j^i = h_j^i g_i (h_j^i)^{-1}$ (con lo que la clase de conjugación de g_i es $\{t_1^i, \dots, t_{s_i}^i\}$), y nótese que $\delta(z_{jl}^i) = t_j^i \otimes z_{jl}^i$. Sea $W_{jl}'^i = \operatorname{span}\{z_{j_2 l_2}^{i_2} \mid (i_2, j_2, l_2) \neq (i, j, l)\}$. Calculemos

$$\begin{aligned}(\operatorname{id} \otimes \partial_{j_1 l_1}^{i_1}) c(z_{j_2 l_2}^{i_2} \otimes z_{j_3 l_3}^{i_3}) &= (\operatorname{id} \otimes \partial_{j_1 l_1}^{i_1})(t_{j_2}^{i_2} \rightharpoonup z_{j_3 l_3}^{i_3} \otimes z_{j_2 l_2}^{i_2}) \\ &= \delta_{i_1, i_2} \delta_{j_1, j_2} \delta_{l_1, l_2} (t_{j_1}^{i_1} \rightharpoonup z_{j_3 l_3}^{i_3}).\end{aligned}$$

Más aun

$$(\partial_{j_1 l_1}^{i_1} \otimes \operatorname{id}) c(z_{j_1 l_1}^{i_1} \otimes z_{j_2 l_2}^{i_2}) = \partial_{j_1 l_1}^{i_1}(t_{j_1}^{i_1} \rightharpoonup z_{j_2 l_2}^{i_2}) z_{j_1 l_1}^{i_1} = \delta_{i_1, i_2} \partial_{j_1 l_1}^{i_1}(t_{j_1}^{i_1} \rightharpoonup z_{j_2 l_2}^{i_1}) z_{j_1 l_1}^{i_1}. \tag{3.1.2}$$

Ahora, se tiene $\delta(t_{j_1}^{i_1} \rightharpoonup z_{j_2 l_2}^{i_1}) = (t_{j_1}^{i_1} t_{j_2}^{i_1} (t_{j_1}^{i_1})^{-1}) \otimes t_{j_1}^{i_1} \rightharpoonup (z_{j_2 l_2}^{i_1})$, de donde (3.1.2) se anula si $t_{j_1}^{i_1} t_{j_2}^{i_1} (t_{j_1}^{i_1})^{-1} \neq t_{j_1}^{i_1}$, i.e. si $t_{j_2}^{i_1} \neq t_{j_1}^{i_1}$, pero por la definición de t_j^i y h_j^i esto es equivalente a que $j_1 \neq j_2$. Además, para $y \in Y_{i_1}$,

$$t_{j_1}^{i_1} \rightharpoonup (h_{j_1}^{i_1} \otimes y) = h_{j_1}^{i_1} g_{i_1} (h_{j_1}^{i_1})^{-1} h_{j_1}^{i_1} \otimes y = h_{j_1}^{i_1} \otimes \rho_{i_1}(g_{i_1})(y) = q_{i_1} h_{j_1}^{i_1} \otimes y,$$

de donde (3.1.2) se anula si $l_1 \neq l_2$. Luego, probamos que

- $c(z_{jl}^i \otimes z_{jl}^i) = q_i z_{jl}^i \otimes z_{jl}^i$,
- $c(z_{jl}^i \otimes W_{jl}'^i) = W_{jl}'^i \otimes z_{jl}^i$ (probamos que $c(z_{jl}^i \otimes W_{jl}'^i \subseteq W_{jl}'^i \otimes z_{jl}^i$, y V es de dimensión finita),
- $\delta(W_{jl}'^i) \subseteq \mathbf{k}\Gamma \otimes W_{jl}'^i$.

Para uso posterior, le pondremos un número a la primera de estas igualdades:

$$c(z^i_{jl} \otimes z^i_{jl}) = q_i z^i_{jl} \otimes z^i_{jl}. \tag{3.1.3}$$

3.2. Algunas dualidades

3.2.1. PROPOSICIÓN. *Sea (V, c) un PTR. Consideramos $\partial : V^* \to \operatorname{End}\mathfrak{B}(V)$ la función dada en 2.7.1, y denotamos por $\bar{\partial} : T(V^*) \to (\operatorname{End}\mathfrak{B}(V))^{\mathrm{op}}$ el (único) morfismo de álgebras que extiende ∂ al álgebra tensorial. Entonces $\bar{\partial}$ se factoriza por $\mathfrak{B}(V^*)$ como sigue:*

$$\bar{\partial} = T(V^*) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{B}(V^*) \overset{\iota}{\hookrightarrow} (\operatorname{End}\mathfrak{B}(V))^{\mathrm{op}}.$$

PRUEBA. Usamos la forma bilineal $(|)$ de (2.3.26). Nótese que si $z \in T^n(V)$, $z' \in T^m(V)$, $w \in T^n(V^*)$, $w' \in T^m(V^*)$, entonces

$$(z \cdot z'|w' \cdot w) = (z'|w')(z|w). \tag{3.2.2}$$

Para $w \in T^n(V^*)$, $z \in T^m(V)$ tomamos el "apareo" $[,]$ de 2.3.30 $[z, w] = (\mathbf{S}^n z|w)$. Por definición este apareo produce una funcional $w \in (\mathfrak{B}(V))^*$, y definimos el operador $h(w) \in \operatorname{End}\mathfrak{B}(V)$ por $h(w)(x) = w \rightharpoonup x$, i.e. $h(w)(x) = x_{(1)}(x_{(2)}|w)$. En otros términos, si $z \in T^m(V)$ entonces $\mathbf{S}(z) \in \mathfrak{B}^m(V)$ y tenemos, usando (2.3.23),

$$\begin{aligned} h(w)(\mathbf{S}(z)) &= \mathbf{S}(z_{(1)})(\mathbf{S}(z_{(2)})|w) = (\mathbf{S}(z_{(1)}))(z_{(2)}|\mathbf{S}^n w) \\ &= (\mathbf{S}^{m-n} \otimes (\bullet|\mathbf{S}^n w))\mathbf{S}_{m-n,n}(z). \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Probamos ahora que $h = \bar{\partial}$. En grado 1 esto es simplemente la definición de h, por lo que es suficiente probar que h es multiplicativa. Sea $w_i \in T^{n_i}(V^*)$ para $i = 1, 2$ y $z \in T^{n_1+n_2+n_3}(V)$. Luego

$$\begin{aligned} (h(w_1) \cdot_{\mathrm{op}} h(w_2))\,(\mathbf{S}z) &= h(w_2)(\mathbf{S}z_{(1)})(z_{(2)}|w_1) = \mathbf{S}(z_{(1)})(\mathbf{S}(z_{(2)})|w_2)(\mathbf{S}(z_{(3)})|w_1) \\ &= (\mathbf{S}^{n_3} \otimes (\mathbf{S}^{n_2} \bullet |w_2)(\mathbf{S}^{n_1}|w_1))\mathbf{S}_{n_3,n_2,n_1}(z) \\ &= (\mathbf{S}^{n_3} \otimes (\mathbf{S}^{n_2|n_1} \bullet |w_1 \cdot w_2))\mathbf{S}_{n_3,n_2,n_1}(z) \quad \text{(por (3.2.3))} \\ &= (\mathbf{S}^{n_3} \otimes (\mathbf{S}^{n_2+n_1} \bullet |w_1 \cdot w_2))\mathbf{S}_{n_3,n_2+n_1}(z) \\ &= h(w_1 \cdot w_2)(\mathbf{S}z). \end{aligned}$$

Que se puede factorizar a través de $\mathfrak{B}(V^*)$ es consecuencia de (3.2.3). La inyectividad de ι sigue inmediatamente de la no degeneración de $(|)$. ☐

Como primera consecuencia de este resultado, tenemos

3.2.4. COROLARIO. *Sea $\partial_0 \in V^*$ tal que $c(\partial_0 \otimes \partial_0) = q\partial_0 \otimes \partial_0$ $(q \in \mathbf{k}^\times)$, y sea $N = N(q)$. Entonces $(\partial_0)^N = 0$ como operador en $\mathfrak{B}(V)$.* ☐

3.2.5. DEFINICIÓN. Vamos a denotar por $[,]$ la acción dada por $\bar{\partial}$, i.e. para $\mathbf{S}^n z \in \mathfrak{B}^n(V)$, $\mathbf{S}^m w \in \mathfrak{B}^m(V^*)$ $(n \geq m)$,

$$[\mathbf{S}^n z, \mathbf{S}^m w] = \mathbf{S}^{n-m}(z_{(1)})(\mathbf{S}^m z_{(2)}|w) \in \mathfrak{B}^{n-m}(V).$$

Obsérvese que si $n = m$ esta definición coincide con 2.3.36.

3.2.6. LEMA. *Sea (V, c) un PTR.*

1. $\mathfrak{B}^n(V^*) \simeq (\mathfrak{B}^n(V))^*$ *vía la forma $[,]$ de 3.2.5.*
2. *Si $\mathfrak{B}(V)$ es de dimensión finita y $n \leq \operatorname{top}(V)$, entonces*

$$[\Lambda_{\mathfrak{B}(V)}, \mathfrak{B}^{\operatorname{top}(V)-n}(V^*)] = \mathfrak{B}^n(V).$$

PRUEBA. 1. Es parte del contenido de 3.2.1.

2. Si $D \in \mathfrak{B}^{\operatorname{top}(V)-n}(V^*)$ es tal que $[\Lambda_{\mathfrak{B}(V)}, D] = 0$, podemos tomar D' en $\mathfrak{B}^n(V^*)$ tal que $\Lambda_{\mathfrak{B}(V^*)} = DD'$ (gracias a la dualidad de Poincaré), y luego $[\Lambda_{\mathfrak{B}(V)}, \Lambda_{\mathfrak{B}(V^*)}] = [[\Lambda_{\mathfrak{B}(V)}, D], D'] = 0$, que contradice 1. Se tiene entonces un monomorfismo $\mathfrak{B}^{\operatorname{top}(V)-n}(V^*) \hookrightarrow \mathfrak{B}^n(V)$. Como por 1 y la dualidad de Poincaré ambos espacios tienen la misma dimensión, hemos terminado.

$\square$

3.3. Operadores q-diferenciales

3.3.1. DEFINICIÓN. Sea (V, c) un PTR, y sea $\iota : \mathfrak{B}(V^*) \to \operatorname{End} \mathfrak{B}(V)^{\mathrm{op}}$ la función de 3.2.1. Dado $x \in \mathfrak{B}(V)$, denotamos por $X_x \in \operatorname{End} \mathfrak{B}(V)^{\mathrm{op}}$ el operador dado por la multiplicación a derecha por x. Lo denotaremos simplemente por x cuando el contexto lo permita. Tenemos entonces acciones a derecha de $\mathfrak{B}(V)$ y $\mathfrak{B}(V^*)$ sobre $\mathfrak{B}(V)$. Definimos el *álgebra de operadores diferenciales cuánticos* $\mathcal{A}V$ como la subálgebra de $\operatorname{End} \mathfrak{B}(V)^{\mathrm{op}}$ generada por $\mathfrak{B}(V)$ y $\mathfrak{B}(V^*)$.

Aquí empezaremos a usar fuertemente la estructura de los pares trenzados de tipo grupo.

3.3.2. LEMA. *Sea (V, c) un PTTG con base $\{x_1, \dots, x_n\}$ y automorfismos $\{g_1, \dots, g_n\}$. Sea $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ la base de V^* dual a $\{x_1, \dots, x_n\}$. Como en la prueba de 2.7.3, sea $\Gamma \subset \mathrm{GL}(V)$ el grupo generado por los g_i. Entonces*

1. *$\mathcal{A}V$ se puede presentar con generadores $\{\partial_1, \dots, \partial_n, x_1, \dots, x_n\}$ y relaciones*

$$\begin{cases} \ker \mathbf{S}^m : TV \to \mathfrak{B}(V), \ m \geq 0, & \textit{(las relaciones de } \mathfrak{B}(V)\textit{)}, \\ \ker \mathbf{S}^m : TV^* \to \mathfrak{B}(V^*), \ m \geq 0, & \textit{(las relaciones de } \mathfrak{B}(V^*)\textit{), y} \\ x_i \partial_j = \delta_{ij} + \partial_j g_j(x_i) \ \textit{para} \ 1 \leq i, j \leq n. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Más aun, para $m \geq 0$ tomemos $\{z_1^m, \dots, z_{d_m}^m\}$ una base de $\mathfrak{B}^m(V)$, y sea $\{w_1^m, \dots, w_{d_m}^m\}$ la base dual de $\mathfrak{B}^m(V^*)$ (dada por la dualidad de 3.2.6). Entonces el conjunto

$$\{w_k^i z_l^j \mid i, j \geq 0,\ 1 \leq k \leq d_i,\ 1 \leq l \leq d_j\}$$

es una base de $\mathcal{A}V$.

2. *Supongamos que $W \subset V$ es un subespacio tal que existen un subgrupo $\Gamma' \subseteq \Gamma$ y un subespacio $W' \subset V$, con $V = W \oplus W'$, $\delta(W) \subset \mathbf{k}\Gamma' \otimes W$, W' es un $\mathbf{k}\Gamma$-subcomódulo y tanto W como W' son $\mathbf{k}\Gamma'$-submódulos de V. Entonces $c(W \otimes W) = W \otimes W$, el par $(W, c_W = c|_{W \otimes W})$ es un PTTG y luego se puede considerar $\mathfrak{B}(W)$. Supongamos además que $V = W \oplus W'$, con W' un subespacio que es $\mathbf{k}\Gamma$-subcomódulo y $\mathbf{k}\Gamma'$-submódulo de V. Sea $W^* \hookrightarrow V^*$ el morfismo dado por la identificación $W^* = (W')^{\perp}$. Entonces hay un monomorfismo de álgebras*

$$\mathcal{A}W \hookrightarrow \mathcal{A}V,$$

inducido por $W \hookrightarrow V$ y $W^* \hookrightarrow V^*$.

Antes de dar la prueba, nótese que en la sección 3.1 de este capítulo se prueba que para V de TGF se tiene una base $\{z_{jl}^i\}$ tal que si $W = W_{jl}^i = \operatorname{span}\{z_{jl}^i\}$ y $W' = W_{jl}'^i = \operatorname{span}\{z_{j_1 l_1}^{i_1} \mid (i_1, j_1, l_1) \neq (i, j, l)\}$, entonces W y W' verifican las condiciones de la segunda parte del lema. Los automorfismos g_i son los t_j^i de la sección 3.1.

Prueba. 1. Las relaciones de $\mathfrak{B}(V)$ se verifican en $\mathcal{A}V$ porque esta álgebra actúa por la representación regular. Las relaciones de $\mathfrak{B}(V^*)$ se verifican en $\mathcal{A}V$ por 3.2.1.

Recordemos que las derivaciones ∂_i verifican la regla de Leibniz

$$\partial_j(ab) = \partial_j(a) g_j(b) + a\partial_j(b),$$

lo que implica inmediatamente el último conjunto de relaciones, tomando $b = x_i$.

Sea B el álgebra definida con generadores $\{\partial_1, \dots, \partial_n, x_1, \dots, x_n\}$ y las relaciones de 3.3.3. Se tiene entonces una suryección $B \twoheadrightarrow \mathcal{A}V$. El último conjunto de relaciones implica que todo monomio de B se puede escribir en la forma $\sum_r a_r b_r$, donde los a_r están generados por los ∂_i y los b_r están generados por los x_i. Ahora, los primeros dos conjuntos de relaciones garantizan que se pueden tomar los a_r y b_r dentro de los conjuntos $\{w_k^i\}$ y $\{z_l^j\}$. Lo último que hay que probar es la independencia lineal del conjunto

$\{w_k^i z_l^j\}$. Como $\mathcal{A}V$ está generado por $\{x_i\}_i$ y $\{\partial_i\}_i$, que actúan en $\mathfrak{B}(V)$ de manera graduada, $\mathcal{A}V$ resulta ser un álgebra graduada, con grados dados por $\deg(x_i) = 1$ y $\deg(\partial_i) = -1$. Es suficiente entonces probar la independencia lineal de los subconjuntos de un grado fijo. Sea

$$T = \sum_{\substack{-i+j=n \\ k,l}} \alpha_{ijkl} w_k^i z_l^j = 0,$$

y supóngase que para algunos i, j, k, l se tiene $\alpha_{ijkl} \neq 0$. Tomamos entonces $m = \min\{i \mid \exists j, k, l \text{ t.q. } \alpha_{ijkl} \neq 0\}$ y sea

$$\tilde{T} = \sum_{\substack{j=n+m,\, i=m \\ k,l}} \alpha_{ijkl} w_k^i z_l^j.$$

Como T y $T - \tilde{T}$ actúan trivialmente en $\mathfrak{B}^m(V)$, también actúa trivialmente $\tilde{T}$. Luego, para todo k' tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{T}(z_{k'}^m) &= [z_{k'}^m, \sum_k w_k^m] \sum_l \alpha_{m,n+m,k,l} z_l^{n+m} \\ &= \sum_l \alpha_{m,n+m,k',l} z_l^{n+m}, \end{aligned}$$

pero la independencia del conjunto $\{z_l^{n+m}\}_l$ implica que $\alpha_{m,n+m,k,l} = 0\ \forall k, l$, lo que contradice la definición de m.

2. Es claro que W es objeto de ${}^{\mathbf{k}\Gamma'}_{\mathbf{k}\Gamma'}\mathcal{YD}$, por lo que es un PT de tipo grupo. La descomposición $V = W \oplus W'$ como comódulos sobre $\mathbf{k}\Gamma$ permite tomar una base $\{x_1, \dots, x_m\}$ de W y una base $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$ de W' tal que la base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V verifica 2.7.3-2 con automorfismos $\{g_1, \dots, g_n\}$, donde $g_i \in \Gamma'$ si $1 \leq i \leq m$. Tomemos $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ la base de V^* dual a $\{x_1, \dots, x_n\}$, lo que define la inclusión $W^* = (W')^\perp \hookrightarrow V^*$. Tenemos entonces un morfismo del álgebra libre generada por $\{x_1, \dots, x_m, \partial_1, \dots, \partial_m\}$ en $\mathcal{A}V$, y queremos ver que las relaciones de $\mathcal{A}W$ están en el núcleo de este morfismo. Gracias a 2.7.6 tenemos la regla de Leibniz $x_i \partial_j = \delta_{ij} + \partial_j g_j(x_i)$, en particular para $1 \leq i, j \leq m$ (aquí se usa implícitamente la condición de que W' es un $\mathbf{k}\Gamma$-subcomódulo). Ahora, el hecho de que c_{V^*} sea la traspuesta de c_V (definición 2.1.4), sumado al hecho de que W' es un $\mathbf{k}\Gamma$-submódulo, permiten verificar de manera sencilla que $c_{V^*}(W^* \otimes W^*) = W^* \otimes W^*$ y que esta es la traspuesta de $c_W = c_V|_{W \otimes W}$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned} \ker(\mathbf{S}^n : (W^*)^{\otimes n} \to (W^*)^{\otimes n}) &= \ker(\mathbf{S}^n : (V^*)^{\otimes n} \to (V^*)^{\otimes n}) \cap (W^*)^{\otimes n}, \\ \ker(\mathbf{S}^n : W^{\otimes n} \to W^{\otimes n}) &= \ker(\mathbf{S}^n : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}) \cap W^{\otimes n}. \end{aligned}$$

Esto prueba que el morfismo mencionado arriba desciende a un morfismo $\mathcal{A}W \to \mathcal{A}V$. Para ver que es inyectivo, usamos nuevamente la primera parte: si $\{z_i\}$ es una base de $\mathfrak{B}(W)$ y $\{w_j\}$ es una base de $\mathfrak{B}(W^*)$ entonces $\{z_i w_j\}$ es una base de $\mathcal{A}W$ y, completando a una base de $\mathfrak{B}(V)$ y de $\mathfrak{B}(V^*)$, resulta ser linealmente independiente en $\mathcal{A}V$.

$\square$

3.3.4. Ejemplo. Si $V = \mathbf{k}x$ y $c(x \otimes x) = qx \otimes x$, sea $\partial \in V^*$ tal que $\partial(x) = 1$. Entonces $\mathcal{A}V$ tiene base $\{\partial^i x^j \mid 0 \leq i, j < N(q)\}$, y se puede ver por inducción que la relación $x\partial = q\partial x + 1$ implica que si $i, j \geq 0$ entonces

$$x^i \partial^j = \sum_{l \geq 0} \binom{i}{l}_q \binom{j}{l}_q (l)_q^! \, q^{(j-l)(i-l)} \partial^{j-l} x^{i-l}.$$

3.3.5. Observación. Sea (V, c) un PTTG. Notamos que las relaciones en $\mathcal{A}V$ implican que si $\partial \in V^*$ está asociado al automorfismo g (esto es, $\partial(x) = 0$ $\forall x \in V^h$, $h \neq g$) y $z \in \mathfrak{B}(V)$, entonces $z\partial = [z, \partial] + \partial g(z)$. Luego, si $w \in \mathfrak{B}(V^*)$, tenemos

$$zw = [z, w] + \text{ términos que empiezan con elementos de grado positivo en } \mathfrak{B}(V^*).$$

3.3.6. Definición. Para un espacio graduado $A = \oplus_{i=0}^n A_i$ de dimensión finita denotamos el polinomio de Hilbert $P_A(t) = \sum_{i=0}^n \dim(A_i) t^i$.

Podemos ahora probar el teorema principal del capítulo.

3.4. El teorema de libertad

3.4.1. Teorema. *Sea (V, c) un PT de tipo grupo.*

1. *Supongamos que W es como en 3.3.2 parte 2 y tal que $\mathfrak{B}(W)$ es de dimensión finita. Tómese la base $\{x_1, \dots, x_m\}$ de W y la base dual $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$ de W^* mirados en V^* vía $W^* = (W')^\perp \hookrightarrow V^*$. Considérese los ∂_i como operadores en $\mathfrak{B}(V)$ y sea $K = \cap_{i=1}^m \ker(\partial_i)$ que en virtud de la regla de Leibniz es una subálgebra. Entonces $\mathfrak{B}(V) \simeq K \otimes \mathfrak{B}(W)$ vía un isomorfismo de $(K, \mathfrak{B}(W))$-bimódulos. En particular, si $\mathfrak{B}(V)$ es de dimensión finita,*
$$P_{\mathfrak{B}(V)}(t) = P_K(t) P_{\mathfrak{B}(W)}(t),$$
y luego $\dim \mathfrak{B}(W)$ *divide a* $\dim \mathfrak{B}(V)$.
2. *Supongamos que $\mathfrak{B}(V)$ tiene dimensión finita y $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\theta$ es una descomposición de (V, c). Para cada $1 \leq i \leq \theta$, sea $W_i \subseteq V_i$ un subespacio (eventualmente nulo) de V_i como en 3.3.2 parte 2, i.e., para cada i hay un*

subgrupo $\Gamma_i' \subseteq \Gamma$ *y un subespacio* W_i'*, con* $V = W_i \oplus W_i'$*,* $\delta(W_i) \subset \mathbf{k}\Gamma_i' \otimes W_i$*,* W_i' *es un* $\mathbf{k}\Gamma$*-subcomódulo y ambos son* $\mathbf{k}\Gamma_i'$*-submódulos. Luego, si* $P_i(t)$ *es el polinomio de Hilbert de* $\mathfrak{B}(W_i)$*, el producto* $\prod_{i=1}^{\theta} P_i(t)$ *divide* $P_{\mathfrak{B}(V)}(t)$ *y el cociente vive en* $\mathbb{Z}[t]$*. En particular,* $\prod_{i=1}^{\theta} \dim \mathfrak{B}(W_i)$ *divide* $\dim \mathfrak{B}(V)$*.*

Prueba. 1. Como $\mathfrak{B}(W)$ es de dimensión finita, podemos fijar integrales $\Lambda_{\mathfrak{B}(W)}$ y $\Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)}$ tales que $[\Lambda_{\mathfrak{B}(W)}, \Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)}] = 1$. Sea $\{z_1, \dots, z_n\}$ una base de elementos homogéneos de $\mathfrak{B}(W)$, y sea $\{\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n\}$ la base dual con respecto a la dualidad de Poincaré, i.e. $[\tilde{z}_i z_j, \Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)}] = \delta_{ij}$. Sea $p_i \in \mathcal{A}W$ definido por $p_i = z_i \Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)} \tilde{z}_i$. Ahora, por 3.3.5 tenemos que si $z \in \mathfrak{B}(W)$ y $w \in \mathfrak{B}(W^*)$, entonces en $\mathcal{A}W$ se tiene $\Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)} z w = \Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)}[z, w]$. Luego,

$$p_i p_j = z_i \Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)} \tilde{z}_i z_j \Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)} \tilde{z}_j = z_i \Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)} [\tilde{z}_i z_j, \Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)}] \tilde{z}_j = \delta_{ij} p_i,$$

por lo que los p_i son idempotentes ortogonales. Más aun, sea $z \in \mathfrak{B}(W)$, $z = \sum_j \alpha_j \tilde{z}_j$. Luego

$$(\sum_i p_i)(z) = \sum_{i,j} \alpha_j [\tilde{z}_j z_i, \Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)}] \tilde{z}_i = \sum_j \alpha_j \tilde{z}_j = z,$$

de donde $\sum_i p_i = 1$. Gracias a la inmersión $\mathcal{A}W \hookrightarrow \mathcal{A}V$, se tiene $\sum_i p_i = 1$ también en $\mathcal{A}V$. Ahora, como la imagen de $\Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)}$ cae en K, tenemos que

$$\mathfrak{B}(V) = \sum_i \mathfrak{B}(V) z_i \Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)} \tilde{z}_i \subseteq \sum_i K \tilde{z}_i.$$

Esto dice que la función canónica $\mu : K \otimes \mathfrak{B}(W) \to \mathfrak{B}(V)$ dada por la multiplicación es suryectiva. Probemos que la suma es directa y que μ restringida a $K \otimes \tilde{z}_i$ es inyectiva $\forall i$, lo que completa la prueba. Para ver esto, si $0 = \sum_i k_i \tilde{z}_i$ con $k_i \in K$, entonces para cada j tenemos

$$\begin{aligned} 0 = p_j(\sum_i k_i \tilde{z}_i) &= \sum_i k_i \tilde{z}_i z_j \Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)} \tilde{z}_j \\ &= \sum_i k_i ([\tilde{z}_i z_j, \Lambda_{\mathfrak{B}(W^*)}] + \text{términos que empiezan con elementos} \\ &\qquad \text{de grado positivo en } \mathfrak{B}(W^*)) \tilde{z}_j \\ &= k_j \tilde{z}_j, \end{aligned}$$

lo que implica que la suma es directa. Ahora, si $k \in K$ y, para algún i, $k\tilde{z}_i = 0$, entonces sea d el grado de $\tilde{z}_i$ y sea w_i un elemento en $\mathfrak{B}^d(W^*)$, tal que $[\tilde{z}_i, w_i] = 1$ (que existe por 3.2.6 parte 1). Tenemos

$$\begin{aligned} 0 = k\tilde{z}_i w_i = k[\tilde{z}_i, w_i] + k(&\text{ términos que empiezan con} \\ &\text{elementos de grado positivo en } \mathfrak{B}(W^*)) = k, \end{aligned}$$

lo que implica la inyectividad de μ.

2. Consideremos en AV el multi-grado en $\mathbb{Z}^\theta$ dado por la descomposición $V = \oplus_i V_i$. La condición de que los V_i sean una descomposición de (V, c) implica que para cada n la función $\mathbf{S}^n$ es multi-graduada. Entonces el multi-grado de AV da un multi-grado en $\mathfrak{B}(V)$, y podemos tomar el polinomio de Hilbert de $\mathfrak{B}(V)$ en $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_\theta]$, i.e.
$$P_{\mathfrak{B}(V)}(t_1, \dots, t_\theta) = \sum_{i_1,\dots,i_\theta} \dim \mathfrak{B}^{i_1,\dots,i_\theta}(V) t_1^{i_1} \cdots t_\theta^{i_\theta}$$
(notamos por $\mathfrak{B}^{i_1,\dots,i_\theta}(V)$ la componente homogénea de grado $(i_1, \dots, i_\theta)$). Sea ahora $K_i = \cap_{\partial \in W_i^*} \ker \partial \subset \mathfrak{B}(V)$. Podemos tomar también el polinomio de Hilbert de K_i en $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_\theta]$, ya que los elementos de W_i^* actúan en forma homogénea. Por la primera parte del teorema, tenemos que $\mathfrak{B}(V) \simeq K_i \otimes \mathfrak{B}(W_i)$, por lo que $P_{\mathfrak{B}(V)} = P_{K_i} P_{\mathfrak{B}(W_i)}$, donde $P_{\mathfrak{B}(W_i)} \in \mathbb{Z}[t_i]$. Luego, para cada i el polinomio $P_{\mathfrak{B}(W_i)}$ divide $P_{\mathfrak{B}(V)}$, y como estos polinomios son coprimos, su producto también divide $P_{\mathfrak{B}(V)}$. Más aun, como el producto es un polinomio mónico (porque $\dim \mathfrak{B}^{\mathrm{top}(W_i)}(W_i) = 1$) el cociente cae en $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_\theta]$. El resultado sigue tomando $t_1 = \cdots = t_\theta = t$.

□

3.4.2. Observación. Es importante ensayar una defensa de este resultado: si bien existen versiones del teorema de Nichols–Zoeller para álgebras de Hopf trenzadas en categorías rígidas (ver por ejemplo [**Tak99b**], [**Sch**]) estas versiones no se aplican aquí. La razón es que $\mathfrak{B}(W)$ no es, en el lenguaje de Takeuchi, una subálgebra "categórica". Esto es, no hay una categoría en la que vivan simultáneamente $\mathfrak{B}(V)$ y $\mathfrak{B}(W)$, y esto se debe a que, en general,
$$c(V \otimes W) \not\subset W \otimes V \Rightarrow c(\mathfrak{B}(V) \otimes \mathfrak{B}(W)) \not\subset \mathfrak{B}(W) \otimes \mathfrak{B}(V).$$
Un ejemplo de esto es $V = \operatorname{span}\{x_0, x_1, x_2\}$ como en 2.4.9 y $W = \operatorname{span}\{x_0\}$ (ó $W = \operatorname{span}\{x_1\}$, ó $W = \operatorname{span}\{x_2\}$).

3.4.3. Observación. Sea $V = M(g, \rho)$ en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$, Γ un grupo finito, $q = \rho(g)$, $N = N(q)$, $d = \deg \rho$. La primera parte del teorema asegura entonces que N divide a $\dim \mathfrak{B}(V)$ (en caso de ser ésta finita). Si bien, como veremos después, $\dim \mathfrak{B}(V) \geq N^d$, no es cierto en general que N^d divida a $\dim \mathfrak{B}(V)$. Verbigracia, en el ejemplo de 2.4.9 que citamos recién, tenemos $N = 2$, $d = 3$ y $\dim \mathfrak{B}(V) = 12$.

3.4.4. Observación. Sea (V, c) de TG y supongamos que se descompone como $V = \oplus_i V_i$. Tomando $W_i = V_i$, $W_i' = \oplus_{j \neq i} V_j$, $\Gamma_i' = \Gamma$, la segunda parte del teorema dice que

$$\prod_i \dim \mathfrak{B}(V_i) \mid \dim \mathfrak{B}(V),$$

que es más fuerte que la desigualdad obtenida en 2.5.1. Nótese que aquella desigualdad se prueba para pares trenzados en general (incluso sin la condición de que sean rígidos).

CAPíTULO 4

Resultados de clasificación de álgebras de Nichols

En este capítulo se aplicarán los resultados anteriores a problemas de clasificación de álgebras de Nichols. Para eso, primero probaremos algunas cotas sobre la dimensión y luego clasificaremos los módulos de dimensión baja en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$. A lo largo de todo el capítulo, como de costumbre, cuando trabajemos sobre PTTGF consideraremos solo el caso semisimple, es decir, $\operatorname{car}\mathbf{k}$ no divide al orden de Γ. En particular, un par trenzado de TGF y TGA será de TGD.

4.1. Cotas inferiores

4.1.1. LEMA. *Sea (V, c) un PTTG con base $\{x_1, \dots, x_n\}$, y supongamos que $c(x_i \otimes x_i) = q_i x_i \otimes x_i$ para $q_i \in \mathbf{k}^\times$ (obsérvese que por (3.1.3) siempre se puede encontrar una base así si V es de TGF). Sea $N_i = N(q_i)$. Entonces*

$$\prod_i N_i \leq \dim(\mathfrak{B}(V)).$$

PRUEBA. Sea $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ la base de V^* dual a $\{x_1, \dots, x_n\}$. Nótese que $x_i^{N_i-1} \neq 0$ porque $\mathfrak{B}(\mathbf{k}x_i) \hookrightarrow \mathfrak{B}(V)$, o simplemente haciendo la cuenta, ya que $\partial_i(x_i^j) = (j)_{q_i} x^{j-1}$ y luego $(\partial_i)^j(x_i^j) = (j)^!_{q_i}$, que es no nulo si $j < N_i$ (usamos la regla de Leibniz para hacer las cuentas, ver 2.7.6). Probamos ahora que el conjunto $\{x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \mid 0 \leq j_i < N_i\}$ es linealmente independiente. Lo hacemos por inducción: supóngase que el subconjunto con $j_m = 0$ para $m \geq m_0$ es l.i. y considérese una combinación lineal

$$\sum_{j_1, \dots, j_{m_0}} \alpha_{j_1, \dots, j_{m_0}} x_1^{j_1} \cdots x_{m_0}^{j_{m_0}} = 0.$$

Aplicando $(\partial_{m_0})^{N_{m_0}-1}$ obtenemos

$$\sum_{j_1, \dots, j_{m_0-1}} \alpha_{j_1, \dots, j_{m_0-1}, N_{m_0}-1} (N_{m_0} - 1)^!_{q_{m_0}} x_1^{j_1} \cdots x_{m_0-1}^{j_{m_0-1}} = 0,$$

de donde los coeficientes $\alpha_{j_1, \dots, j_{m_0-1}, N_{m_0}-1}$ se anulan. Podemos aplicar entonces $(\partial_{m_0})^{N_{m_0}-2}$, y obtenemos que los coeficientes $\alpha_{j_1, \dots, j_{m_0-1}, N_{m_0}-2}$ se anulan. Procediendo así, se ve que todos los coeficientes $\alpha_{j_1, \dots, j_{m_0}} = 0$, y la tesis inductiva sigue de aquí. $\square$

4.1.2. Observación. Como caso particular del lema, si $V = \oplus_i M(g_i, \rho_i)$ en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ (Γ un grupo finito) y $d_i = \dim M(g_i, \rho_i)$, $q_i = \rho_i(g_i)$, $N_i = N(q_i)$, entonces $\prod_i N_i^{d_i} \leq \dim(\mathfrak{B}(V))$. Para probarlo simplemente se usa (3.1.3), donde se ve que para i fijo, todos los z^i_{jl} están asociados a la misma raíz de la unidad q_i.

Esto permite dar una cota superior para el rango de un álgebra de Nichols:

4.1.3. Definición. Sea $n = \prod_{i=1}^R p_i^{v_i}$, donde los p_i son primos distintos, los $v_i > 0$ y $p_i > p_1$ para $i > 1$. Definimos $r(n) = \log_{p_1}(n)$.

4.1.4. Observación. Aplicando 3.4.1 parte 1 junto a 4.1.1, tenemos que si V es de TGF y tiene rango de Nichols n, entonces $d = \dim V \leq r(n)$. Aplicando 3.4.1 parte 2 junto a 4.1.1, tenemos que si $V = \oplus_{i=1}^\theta V_i = \oplus_i M(g_i, \rho_i) \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ (Γ finito) y tiene rango de Nichols $n = \prod_{i=1}^R p_i^{v_i}$, entonces $\theta \leq \sum_i v_i$.

4.2. La sombra de la trenza

Sea Γ un grupo finito, $g \in \Gamma$ un elemento y $\mathcal{O}_g$ su clase de conjugación de. Sea $\rho : \Gamma_g \to \mathrm{Aut}(W)$ una representación irreducible y tómese una base de $M(g, \rho)$ como en la sección 3.1 del capítulo 3: $\{h_1, \dots, h_s\}$ es un conjunto de representantes de coclases a izquierda de Γ/Γ_g y $\{x_1, \dots, x_r\}$ es una base de W; consideramos entonces la base $\{z_{jl} = h_j \otimes x_l\}$. Notamos también $t_i = h_i g h_i^{-1}$. Por la definición de la trenza es útil considerar la forma en que $\mathcal{O}_g$ actúa sobre sí misma por conjugación. Definimos el morfismo

$$f_g : \Gamma \to \mathbb{S}_s, \quad f_g(k)(i) = j \text{ si } k t_i k^{-1} = t_j. \tag{4.2.1}$$

Nótese que $f_g(k)$ fija i sii k conmuta con t_i; en particular $f_g(t_i)(i) = i\ \forall i$.

4.2.2. Observación. Sea $f : G \to H$ un morfismo entre dos grupos cualesquiera. Para $g \in G$, la clase de conjugación $\mathcal{O}_g$ tiene como cardinal el índice $s = [G : G_g]$. Sea $\tilde{G} = f^{-1} H_{f(g)}$. Es sencillo ver que el conjunto $f(\mathcal{O}_g)$ tiene como cardinal el índice $n = [G : \tilde{G}]$ y que para todo $h \in f(\mathcal{O}_g)$ la fibra $f^{-1}(h) \cap \mathcal{O}_g$ tiene como cardinal el índice $m = [\tilde{G} : G_g]$, de donde el cardinal de la órbita se factoriza como $s = nm$.

4.2.3. Observación. Sea $V = M(g, \rho)$, donde $\rho : \Gamma_g \to \mathrm{Aut}(W)$ es irreducible y sea $x \in W$. Por 3.1.1, g actúa por un escalar, digamos q, en W. En particular $c(x \otimes x) = g \rightharpoonup x \otimes x = qx \otimes x$. Sea $t \notin \Gamma_g$ e $y = t \rightharpoonup x$. Entonces $\delta(y) = tgt^{-1} \otimes y$, y se tiene $tgt^{-1} \rightharpoonup y = tgt^{-1}t \rightharpoonup x = tg \rightharpoonup x = qt \rightharpoonup x = qy$. Luego,

$$c(y \otimes y) = qy \otimes y \quad \forall y = t \rightharpoonup x,\ t \in \Gamma.$$

Vamos a dar ahora un paso más en el proceso de “olvido de los grupos”, construyendo de otra manera ciertos módulos de TGF. Sea $V = \oplus_i M(g_i, \rho_i)$ con cada ρ_i de grado 1. Sea X la union disjunta de las órbitas de los g_i (esto es, si se repiten órbitas se las hace disjuntas, por ejemplo $X = \cup_i(\mathcal{O}_{g_i} \times i)$). Notemos con $\triangleright$ la acción dada por la conjugación. Para $x, y, z \in X$, tenemos

$$x \triangleright (y \triangleright z) = xyzy^{-1}x^{-1} = xyx^{-1}xzx^{-1}xy^{-1}x^{-1} = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z). \tag{4.2.4}$$

Además, es claro que para cada $x \in X$ la función $x \triangleright \bullet : X \to X$ es una biyección, que $x \triangleright x = x$, y que $x \triangleright y = y \iff y \triangleright x = x$.

4.2.5. Definición. Sea X un conjunto finito y $\triangleright : X \times X \to X$. Diremos que el par $(X, \triangleright)$ es un *conjunto cruzado* si:

1. para cada $x \in X$ la función $x \triangleright \bullet$, $y \mapsto x \triangleright y$ es biyectiva,
2. $x \triangleright x = x \; \forall x \in X$,
3. $x \triangleright y = y \iff y \triangleright x = x$,
4. para cada $x, y, z \in X$ se verifica (4.2.4), es decir, $x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z)$.

Vamos a definir una teoría de cohomología para este tipo de conjuntos con coeficientes en un grupo abeliano.

4.2.6. Definición. Sea A un grupo abeliano. Sea $C^\bullet$ el complejo dado por $C^n = \mathrm{Fun}(X^n, A) = \{f : X^n \to A\}$, donde $X^n = X \times \cdots \times X$ (n veces) y $X^0 = \{\emptyset\}$ tiene cardinal 1. Para $f \in C^n$, definimos el morfismo de borde por

$$d : C^n \to C^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \sum_{i=1}^n (-1)^i d_i & \text{si } n > 0, \text{ donde} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(d_i f)(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \triangleright x_{i+1}, x_i \triangleright x_{i+2}, \dots, x_i \triangleright x_{n+1}) \\ - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}).\end{aligned}$$

Nótese que si $i < j$ entonces $d_i d_j = d_{j-1} d_i$, de donde se tiene

$$\begin{aligned} d^2 = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} d_i d_j &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} d_i d_j + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} d_i d_j \\ &= -\sum_{i \leq j-1} (-1)^{i+j-1} d_{j-1} d_i + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} d_i d_j = 0. \end{aligned}$$

Luego, este es un complejo de cocadenas.

4.2.7. Observación. Como $d : C^0 \to C^1 = 0$, se tiene $H^0(X, A) = A$. Si $g \in C^1$, tenemos $dg(x, y) = g(x \triangleright y) - g(y)$. Luego, un 1-cociclo es una función que es constante en cada órbita $\{x \triangleright y \mid x \in X\}$, lo que significa que

$H^1(X,A) = A^{\pi_0(X)}$, donde $\pi_0(X)$ es el conjunto de clases de equivalencia con la relación generada por $y \sim x \triangleright y$ (obsérvese que las clases de equivalencia pueden ser más grandes que las órbitas).

4.2.8. Definición. Sea $A \subset \mathbf{k}^\times$ un subgrupo de $\mathbf{k} - \{0\}$ y sea $(X, \triangleright)$ un conjunto cruzado. Para $f \in C^2(X,A)$ definimos

$$c^f : \mathbf{k}X \otimes \mathbf{k}X \to \mathbf{k}X \otimes \mathbf{k}X, \quad c^f(x,y) = f(x,y)\ x \triangleright y \otimes x$$

(denotamos $\mathbf{k}X$ el $\mathbf{k}$-espacio vectorial con base X). Denotaremos por G_∞ el grupo de raíces de la unidad de $\mathbf{k}^\times$.

4.2.9. Proposición. *Sea $(X, \triangleright)$ un conjunto cruzado y sea $f \in C^2(X,A)$ $(A \subset \mathbf{k}^\times)$. Se tiene*

1. *c^f verifica la ecuación de trenzas si y sólo si f es un 2-cociclo,*
2. *modificar c^f por un coborde es lo mismo que hacer un cambio de base $x \mapsto \lambda_x x$ $\forall x \in X$ con $\lambda_x \in A$.*
3. *si $f \in C^2(X, G_\infty)$ es un 2-cociclo entonces $(\mathbf{k}X, c^f)$ es un PTTGF.*
4. *si $V = \oplus_i M(g_i, \rho_i)$ en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$, Γ un grupo finito y cada ρ_i es de grado 1, entonces existen $(X_V, \triangleright)$ un conjunto cruzado y $f_V \in C^2(X_V, G_\infty)$ un cociclo tal que (V,c) es equivalente a $(\mathbf{k}X_V, c^{f_V})$. En particular, c tiene orden finito (i.e., $c^N = \mathrm{id}_{V\otimes V}$ para algún $N > 0$).*

Prueba. Para la primera parte, calculamos $c^f_{12}c^f_{23}c^f_{12}$ y $c^f_{23}c^f_{12}c^f_{23}$.

$$\begin{aligned}
c^f_{12}c^f_{23}c^f_{12}(x \otimes y \otimes z) &= c^f_{12}c^f_{23}(f(x,y) x \triangleright y \otimes x \otimes z) \\
&= c^f_{12}(f(x,y)f(x,z) x \triangleright y \otimes x \triangleright z \otimes x) \\
&= f(x,y)f(x,z)f(x \triangleright y, x \triangleright z)(x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z) \otimes x \triangleright y \otimes x \\
&= f(x,y)f(x,z)f(x \triangleright y, x \triangleright z) x \triangleright (y \triangleright z) \otimes x \triangleright y \otimes x \\
c^f_{23}c^f_{12}c^f_{23}(x \otimes y \otimes z) &= c^f_{23}c^f_{12}(f(y,z) x \otimes y \triangleright z \otimes y) \\
&= c^f_{23}(f(y,z)f(x, y \triangleright z) x \triangleright (y \triangleright z) \otimes x \otimes y) \\
&= f(y,z)f(x, y \triangleright z)f(x,y) x \triangleright (y \triangleright z) \otimes x \triangleright y \otimes x,
\end{aligned}$$

de donde c^f verifica la ecuación de trenzas si y sólo si

$$f(x,z)f(x \triangleright y, x \triangleright z) = f(y,z)f(x, y \triangleright z),$$

que es lo que se quería probar.

Para la segunda parte, simplemente notamos que si $g \in C^1$ entonces tenemos $(dg)(x,y) = g(x \triangleright y)g(y)^{-1}$. Luego, si tomamos $f \cdot dg$, tenemos

$$\begin{aligned} c^{f\cdot dg}(g(x)x \otimes g(y)y) &= g(x \triangleright y)g(y)^{-1}f(x,y)g(x)g(y)x \triangleright y \otimes x \\ &= f(x,y)g(x \triangleright y)x \triangleright y \otimes g(x)x. \end{aligned}$$

Para la tercera parte, se toma M el mínimo común múltiplo entre los $N(x,y)$ $\forall x, y \in X$, y se pone $Y = X \times C_M$. Se observa entonces que el grupo Γ generado por los g_i, como en 2.7.3 se puede ver adentro de $\mathbb{S}_Y$, el grupo simétrico sobre Y, que es finito.

La cuarta parte se verifica simplemente por la construcción de c^f: se toma una base $\{z_j^i\}$ de V como en la sección 3.1 del capítulo 3 (la variable "l" no va porque todos los ρ_i tienen grado 1), definida a partir de los conjuntos $\{h_1^i, \dots, h_{s_i}^i\}$ y se toman los elementos $y_{js}^{ir} \in \Gamma$ tales que $t_j^i h_s^r = h_u^r y_{js}^{ir}$ e y_{js}^{ir} conmuta con g_r. Entonces tenemos $c(z_j^i \otimes z_s^r) = \rho_r(y_{js}^{ir})z_u^r \otimes z_j^i$, donde $\rho_i(y_{js}^{ir})$ es una raíz de la unidad por ser Γ finito. Luego, se puede tomar el conjunto $X_V = \{z_j^i\}$ con la acción $\triangleright$ dada por $z_j^i \triangleright z_s^r = z_u^r$, donde u es como en la definición de y_{js}^{ir}. Se toma finalmente el cociclo $f_V(z_j^i, z_s^r) = \rho_r(y_{js}^{ir})$, y es claro que se verifica la afirmación. Por último, la finitud del orden de c es consecuencia de la parte anterior, ya que c^{f_V} es un elemento de $\mathbb{S}_Y$ con Y como se indica en el párrafo anterior. $\square$

4.2.10. Observación. Sea $x \in X$ y sea $a = f(x,x)$ (f un 2-cociclo). Si $y = z \triangleright x$ está en la órbita de x, calculamos $df(z,x,x)$ y obtenemos

$$f(y,y)f(z,x) = f(x,x)f(z,x) \Rightarrow f(y,y) = f(x,x),$$

es decir que se verifica (3.1.3).

Nótese también que siempre se tiene una inclusión

$$\mathbf{k}^\times \hookrightarrow H^2(X), \qquad q \mapsto f_q, \quad f_q(x,y) = q \ \ \forall x, y \in X.$$

En particular, siempre se tiene una trenza $c = c^{f_1}$, a la que denotaremos simplemente por c cuando el contexto lo permita.

Un conjunto cruzado tiene un interés propio en la literatura. Dado un conjunto cruzado $(X, \triangleright)$ se puede considerar $c : X \times X \to X \times X$, $c(x,y) = (x \triangleright y, x)$. Esto es una solución conjuntística de la ecuación de trenzas, es decir,

$$c_{12}c_{23}c_{12} = c_{23}c_{12}c_{23}, \text{ donde ahora } c_{12} = c \times \mathrm{id}_X \text{ y } c_{23} = \mathrm{id}_X \times c.$$

En [**ESS99, Sol00, LYZ00**] se consideran soluciones conjuntísticas de la ecuación de trenzas en general. En concreto, en esos artículos los autores consideran, dado un conjunto X, un par de funciones $f, g : X \to \mathbb{S}_X$ y definen una función

$$\tilde{c} : X \times X \to X \times X, \qquad (x, y) \mapsto (f(x)(y), g(y)(x)).$$

Bajo ciertas condiciones sobre las funciones f y g, esto es una solución conjuntística de la ecuación de trenzas. Obsérvese que una tal solución implica una acción de $\mathbb{B}_n$ en X^n, y por lo tanto se tiene representaciones conjuntísticas de $\mathbb{B}_n$.

Tanto en [**Sol00**] como en [**LYZ00**] se prueba que una solución conjuntística de la ecuación de trenzas que es biyectiva es equivalente a una dada por un conjunto cruzado. Específicamente, para cada solución $\tilde{c}$ sobre X existe una estructura de conjunto cruzado y una colección de biyecciones $J_n : X^n \to X^n$ que entrelazan las representaciones del grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$ asociadas a $\tilde{c}$ y a la c dada por la estructura de conjunto cruzado. De esta manera se ve que si uno le agrega coeficientes a una solución general, obtiene un PT que produce un álgebra de Nichols que se puede estudiar a través del álgebra de Nichols producida por un conjunto cruzado (la suma $\oplus_n \mathbf{k} J_n$ baja a un isomorfismo en las álgebras de Nichols que, si bien no es un morfismo de álgebras, sí lo es de espacios vectoriales graduados, y por lo tanto se respetan las dimensiones). Esto hace que tenga sentido focalizar el interés en los conjuntos cruzados. Por otra parte, si para una solución general se construye $C^\bullet$ de manera análoga a como se hizo con conjuntos cruzados, no se obtiene necesariamente un complejo.

A propósito de soluciones generales, es útil tener presente que el hecho de que c sea una solución de la ecuación de trenzas es equivalente a 4 en la definición de conjunto cruzado. La condición 1 está puesta para garantizar la biyectividad de c. Las condiciones 2 y 3 son condiciones necesarias para que c sea una solución "inyectiva" en el lenguaje de [**Sol00**].

Un camino posible a seguir es definir una teoría de cohomología no abeliana para estudiar pares trenzados asociados a representaciones $M(g, \rho)$ con ρ de grado > 1. El lema 4.8.1 dice que en "pocos" casos se obtendrán álgebras de Nichols de dimensión finita.

4.3. Rango 2

4.3.1. Proposición. *Sea (V, c) un PTTGD de dimensión 2 con base $\{x_1, x_2\}$, (por ejemplo, un PTTGF con $\mathbf{k}$ de característica 0). Sea (q_{ij}) la matriz de c, y sea $r+1$ el orden de nilpotencia de Ad_{x_2} en x_1, como en 2.6.5. Para $1 \le i \le r$ sea $M_i = N(q_{11}(q_{12}q_{21})^i q_{22}^{i^2})$ y sea $N_j = N(q_{jj})$ para $j = 1, 2$. Entonces $\dim \mathfrak{B}(V) \ge N_1 N_2 \prod_i M_i$. Más aun, si el orden de nilpotencia de Ad_{x_1} en x_2 es 2, entonces:*

1. *Si* $r = 1$ *se verifica la igualdad.*
2. *Si* $r = 2$ *y* $N(q_{11}) \neq 2$ *ó* $N(q_{22}) \neq 3$*, se verifica la igualdad.*
3. *Si* $r = 2$*,* $N(q_{11}) = 2$ *y* $N(q_{22}) = 3$*, se verifica la igualdad si y sólo si*

$$q_{12}q_{21} = -1, \text{ ó } q_{12}q_{21} = q_{22}, \text{ ó } q_{12}q_{21} = -q_{22}.$$

Prueba. Sea $z_1 = \mathrm{Ad}_{x_2}(x_1) = x_2x_1 - q_{21}x_1x_2$, y definimos inductivamente $z_{i+1} = \mathrm{Ad}_{x_2}(z_i) = x_2z_i - q_{21}q_{22}^i z_ix_2$. Tomamos en $\mathfrak{B}(V)$ el bi-grado dado por $\deg(x_1) = (1,0)$, $\deg(x_2) = (0,1)$, y tenemos $z_i \in \mathfrak{B}^{1,i}(V)$. Más aun, 2.6.5 dice que $z_r \neq 0$ y $z_{r+1} = 0$. Es inmediato ver por inducción (o también de la demostración de 2.6.5) que $\partial_{x_2}(z_i) = 0$, y $\partial_{x_1}(z_i) = d_{12}^1 d_{12}^2 \cdots d_{12}^i x_2^i$, donde $d_{12}^j = (1 - q_{12}q_{21}q_{22}^{j-1})$. Luego, $\partial_{x_2}^i\partial_{x_1}(z_i) \neq 0$ si $i \leq r$. Vamos a probar que el conjunto

$$\{x_1^{n_1} z_1^{m_1} \cdots z_r^{m_r} \mid 0 \leq n_1 < N_1,\ 0 \leq m_i < M_i\}$$

es linealmente independiente. Para verlo, calculamos

$$\begin{aligned}
\partial_{x_2}^i\partial_{x_1}(z_i^n) &= \sum_{j=0}^{n-1} q_{12}^{ji} q_{11}^j d_{12}^1 \cdots d_{12}^j \partial_{x_2}^i (z_i^{n-1-j} x_2^i z_i^j) \\
&= d_{12}^1 \cdots d_{12}^j \sum_{j=0}^{n-1} q_{12}^{ji} q_{11}^j q_{21}^{ji} q_{22}^{ji^2} (i)_{q_{22}}^! \, z_i^{n-1} = d_{12}^1 \cdots d_{12}^j (n)_{q_{11}q_{12}^i q_{21}^i q_{22}^{i^2}} \, z_i^{n-1},
\end{aligned}$$

de donde $z_i^n \neq 0$ si $n < N(q_{11}q_{12}^i q_{21}^i q_{22}^{i^2}) = M_i$. Es claro también que si $j > i$ entonces $\partial_{x_2}^j\partial_{x_1}(z_i^n) = 0$. Supongamos inductivamente que para $s < r$, el conjunto $\{x_1^{n_1} z_1^{m_1} \cdots z_s^{m_s} \mid 0 \leq n_1 < N_1,\ 0 \leq m_i < M_i\}$ es l.i. Entonces, si hubiera una combinación lineal

$$\sum \alpha_{n_1, m_1, \dots, m_{s+1}} x_1^{n_1} z_1^{m_1} \cdots z_{s+1}^{m_{s+1}} = 0,$$

tendríamos, aplicando $(\partial_{x_2}^{s+1}\partial_{x_1})^{M_{s+1}-1}$, una combinación lineal

$$\sum \tilde{\alpha}_{n_1, m_1, \dots, m_s, M_{s+1}-1} x_1^{n_1} z_1^{m_1} \cdots z_s^{m_s} = 0$$

donde los $\tilde{\alpha}$ son los α multiplicados por factores no nulos. Por la hipótesis inductiva, tenemos que $\alpha_{n_1,m_1,\dots,m_s,M_{s+1}-1} = 0$. Aplicamos ahora $[\partial_{x_2}^{s+1}\partial_{x_1}]^{M_{s+1}-2}$ y obtenemos que $\alpha_{n_1,m_1,\dots,m_s,M_{s+1}-2} = 0$. Continuando de esta manera, tenemos que $\alpha_{n_1,m_1,\dots,m_s,m_{s+1}} = 0$ para todos los m_{s+1}, probando así la tesis inductiva. Ahora la tesis sigue inmediatamente de 3.4.1 parte 1, ya que es claro que

$$\{x_1^{n_1} z_1^{m_1} \cdots z_s^{m_s} \mid 0 \leq n_1 < N_1,\ 0 \leq m_i < M_i\} \subseteq \ker(\partial_{x_2})$$

y por lo tanto el conjunto

$$\{x_1^{n_1} z_1^{m_1} \cdots z_r^{m_r} x_2^{n_2} \mid 0 \leq n_i < N_i,\ 0 \leq m_i < M_i\} \tag{4.3.2}$$

es linealmente independiente en $\mathfrak{B}(V)$.

Veamos la segunda parte. Hay dos casos en los que el orden de nilpotencia de Ad_{x_1} en x_2 es 2. Un caso es $q_{11} = -1$, el otro es $q_{11}q_{12}q_{21} = 1$. En el primer caso tenemos $x_1^2 = 0$, y por lo tanto

$$z_1x_1 = -q_{21}x_1x_2x_1 = q_{11}q_{21}x_1z_1.$$

En el segundo caso es fácil ver usando derivaciones que también tenemos

$$z_1x_1 = q_{11}q_{21}x_1z_1,$$

dado que ∂_{x_2} se anula de ambos lados de la igualdad y ∂_{x_1} da en ambos lados el mismo elemento en $\mathfrak{B}(V)$.

Consideramos ahora los tres casos enumerados en el enunciado de la proposición:

1. Tenemos $0 = \mathrm{Ad}_{x_2}(z_1) = x_2z_1 - q_{21}q_{22}z_1x_2$, de donde $x_2z_1 = q_{21}q_{22}z_1x_2$. Estas igualdades muestran cómo escribir cualquier monomio de $\mathfrak{B}(V)$ como una combinación de los elementos del conjunto $\{x_1^{n_1}z_1^{m_1}x_2^{n_2}\}$, de donde $\dim \mathfrak{B}(V) \leq N_1N_2M_1$ y se sigue la igualdad por la primera parte.
2. Tenemos $z_2 = \mathrm{Ad}_{x_2}(z_1) = x_2z_1 - q_{21}q_{22}z_1x_2$, y
$$0 = \mathrm{Ad}_{x_2}(z_2) = x_2z_2 - q_{21}q_{22}^2z_2x_2.$$
Es fácil, aunque tedioso, ver que $z_2x_1 = q_{11}q_{21}^2x_1z_2 + q_{21}(q_{11}-q_{22})z_1^2$ tomando derivadas. También es fácil y tedioso tomando derivadas ver en estos casos que $z_2z_1 = -q_{21}z_1z_2$. Luego se concluye como en el caso previo, ya que se ve que el conjunto (4.3.2) genera $\mathfrak{B}(V)$.
3. Las mismas cuentas que el caso previo sirven aquí, excepto por la relación entre z_2z_1 y z_1z_2. Buscamos las condiciones sobre la matriz (q_{ij}) para que el conjunto (4.3.2) sea una base. Para esto debemos poder escribir z_2z_1 como una combinación lineal de esos elementos. Pero ahora, el bi-grado de z_2z_1 es $(3, 2)$ y además cae en $\ker \partial_{x_2}$. Por 3.4.1 parte 1 tenemos que escribir z_2z_1 como una combinación lineal de los elementos de (4.3.2) de bi-grado $(3, 2)$ que estén en el núcleo de ∂_{x_2}, pero hay un único elemento en esas condiciones, y es z_1z_2. Por lo tanto debemos tener $z_2z_1 = \lambda z_1z_2$. Aplicando ∂_{x_1}, vemos que la única posibilidad es $\lambda = q_{11}q_{12}q_{21}^2q_{22}^2 = -q_{12}q_{21}^2q_{22}^2$, pero entonces debemos tener, para $t = q_{12}q_{21}$,
$$0 = 1 + t - q_{22}t^2 - q_{22}t^3 = q_{22}(1 + t)(q_{22} - t)(q_{22} + t),$$
de donde surge instantáneamente la condición sobre $q_{12}q_{21}$.

$\square$

4.3.3. Observación. Estas matrices no son en general de tipo Cartan. Sin embargo, si tomamos la matriz (a_{ij}) por

$$a_{ii} = 2, \quad a_{ij} = 1 - (\text{orden de nilpotencia de } \mathrm{Ad}_{x_i} \text{ en } x_j),$$

es inmediato ver que es una matriz de Cartan generalizada. Probamos que si (a_{ij}) es de tipo A_2 entonces el álgebra de Nichols tiene una base de PBW como el núcleo de Frobenius–Lusztig de tipo A_2 con la única diferencia de que los órdenes de nilpotencia de los vectores raíces x_1, x_2, z_1 se calculan a mano y pueden ser distintos entre sí. Para el tipo B_2 también se tiene una relación con el correspondiente núcleo de FL, salvo en el caso de la parte 3 cuando no se verifica ninguna de las tres condiciones sobre $q_{12}q_{21}$.

4.4. Rango 3

En esta sección se clasificarán los PTTG de dimensión 3. Se verá que un tal par o bien es de TGA o bien es isomorfo a $V_{3,q}$ (ver la definición en 4.4.1). En particular, si es de TGF sobre un cuerpo de característica 0, es de TGD o es isomorfo a $V_{3,q}$ con q una raíz de la unidad.

Sea entonces (V, c) un PTTG de dimensión 3 que no es de tipo grupo abeliano, con base $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ y automorfismos $\{g_0, g_1, g_2\}$. Afirmamos que si dos de los g_i fuesen iguales, entonces (V, c) sería de TGA. Para probarlo, supongamos que $g_1 = g_2$. Si $g_0 = g_1$, la afirmación es clara. Si no, se tiene $g_0(\bar{x}_1) \in \mathrm{span}\{\bar{x}_0\}$ o $g_0(\bar{x}_1) \in \mathrm{span}\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$. En el primer caso tenemos $g_0g_1g_0^{-1} = g_0$ (lo que implicaría que $g_0 = g_1$), mientras que en el segundo tenemos $g_0g_1g_0^{-1} = g_1$ (lo que implicaría que g_0 conmuta con g_1 y se obtiene lo afirmado). Luego, $\#\{g_0, g_1, g_2\} = 3$. Consideremos los subíndices de los g_i en $\mathbb{Z}/3$. Tenemos $g_ig_jg_i^{-1} = g_{-i-j}$, porque si no caeríamos en una de las contradicciones previas. Más aun, (2.7.4) implica que $c(\bar{x}_i \otimes \bar{x}_j) = f(i, j)\bar{x}_{-i-j} \otimes \bar{x}_i$ para algún $f : \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} \to \mathbf{k}^\times$. Esto es, (V, c) se puede construir a partir de un conjunto trenzado. Tomemos $q = f(0, 0)$ (es decir, $g_0(\bar{x}_0) = q\bar{x}_0$), y definamos $x_0 = \bar{x}_0$, $qx_1 = g_2(x_0)$, $qx_2 = g_0(x_1)$. Calculamos

$$\begin{aligned}
&g_0(x_0) = qx_0,\\
&g_1(x_1) = qx_1 \text{ por } (4.2.10),\\
&g_2(x_2) = qx_2 \text{ por } (4.2.10),\\
&g_1(x_0) = g_2^{-1}g_0g_2(x_0) = q^2g_2^{-1}(x_2) = qx_2,\\
&g_2(x_1) = q^{-1}g_2^2(x_0) = q^{-1}g_1g_0^2g_1^{-1}(x_0) = q^{-1}g_1g_1^{-1}g_0^2(x_0) = qx_0,
\end{aligned}$$

$$g_0(x_2) = q^{-2}g_0g_0g_2(x_0) = q^{-2}g_2g_0^2(x_0) = qx_1,$$
$$g_1(x_2) = g_2^{-1}g_0g_2(x_2) = q^2g_2^{-1}(x_1) = qx_0.$$

Luego $g_i(x_j) = qx_{-i-j}$. Alternativamente, se puede verificar que $H^2(X, \mathbf{k}^\times) = \mathbf{k}^\times$ si $X = \mathbb{Z}/3$ e $i \triangleright j = -i-j$.

4.4.1. Definición. Denotamos este espacio por $V_{3,q}$. Esto es, $V_{3,q}$ tiene base $\{x_0, x_1, x_2\}$ (los subíndices en $\mathbb{Z}/3$) y la trenza está dada por

$$c(x_i \otimes x_j) = qx_{-i-j} \otimes x_i.$$

4.4.2. Observación. Nótese que $c^3 = q^3$, de donde los autovalores de c pertenecen a $\{q, \xi q, \xi^2 q\}$ para ξ una raíz cúbica de la unidad.

El caso particular $q=-1$ se vio como ejemplo en 2.4.9, y tiene dimensión $12 > 2^3$. Obsérvese que las mismas cuentas sirven para el caso en que $q=-1$ y $\operatorname{car}\mathbf{k} = 2$, si bien este caso no lo consideramos por no ser semisimple $\mathbf{k}\Gamma$.

Por 4.1.1, $\dim(\mathfrak{B}(V_{3,q})) \geq N(q)^3$. De todos modos, si se mira el conjunto l.i. dado en 4.1.1 se observa que en grado 2 tiene 6 elementos. Por otra parte, $\dim T^2V_{3,q} = 9$, así que para que se tenga $\dim\mathfrak{B}(V_{3,q}) = N(q)^3$ debería ser $\dim\ker\mathbf{S}^2 = 3$. Esto no sucede nunca: gracias a que $\mathbf{S}^2 = 1 + c$, y por 4.4.2, los únicos casos en los que se tiene $\dim\ker\mathbf{S}^2 > 0$ son $N(q) = 2$ y $N(q) = 6$. El caso $N(q) = 2$ (o sea $q=-1$) lo acabamos de ver, y en el caso $N(q) = 6$ es fácil ver que el núcleo de $\mathbf{S}^2$ es

$$\ker\mathbf{S}^2 = \operatorname{span}\{x_0x_1 - qx_2x_0 + q^2x_1x_2,\ x_1x_0 - qx_2x_1 + q^2x_0x_2\}.$$

En particular $\dim\ker\mathbf{S}^2 = 2$, de donde $\dim\mathfrak{B}^2(V_{3,q}) = 7$.

4.4.3. Observación. Hemos probado que $\dim\mathfrak{B}(V_{3,q}) > N(q)^3$.

4.5. Rango 4

Clasificamos ahora los PTTGF de dimensión 4, aunque lo hacemos mirando su estructura dentro de ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$. Sea entonces $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ un módulo de dimensión 4, que lo descomponemos como suma de irreducibles $V = \oplus_i M_i = \oplus_i M(g_i, \rho_i)$. Obsérvese que si $M(g,\rho)$ es de dimensión 2 entonces es de TGA, y si es de dimensión 1 entonces g es central en Γ. Luego, una suma de módulos de dimensión 1 y a lo sumo uno de dimensión 2 es de TGA. Tenemos las siguientes posibilidades:

1. $4 = 1+1+1+1$, i.e. una suma de cuatro módulos de dimensión 1. Es de tipo grupo abeliano.
2. $4 = 1+1+2$ también es de TGA.

3. $4 = 1+3$. Si el módulo de dimensión 3 es de TGA, entonces V es de TGA. La posibilidad que debemos tener en cuenta es que el módulo de dimensión 3 sea $V_{3,q}$ para algún q.
4. $4 = 2+2$. Aquí V es de TGA a menos que ρ_1 y ρ_2 sean caracteres y g_1 no conmute con g_2.
5. $4 = 4$. $V = M(g, \rho)$ es irreducible. Hay tres sub-casos:
   (a) g es central y $\deg \rho = 4$. Es de TGA (más aun, por 4.8.1, si V es de rango de Nichols finito entonces $\rho(g) = -1$ y $\dim \mathfrak{B}(V) = 16$).
   (b) $[\Gamma : \Gamma_g] = 2$ y $\deg \rho = 2$. Es de TGA (más aun, por 4.8.1, si V es de rango de Nichols finito, $N(\rho(g)) = 2$ ó 3. Si $N = 3$ tenemos por 2.5.1 que $\dim \mathfrak{B}(V) \geq 27^2$).
   (c) $[\Gamma : \Gamma_g] = 4$ y ρ es un carácter.

Consideramos como antes las situaciones que no son de TGA.

4.5.1. Caso 3. Sea $V = V_1 \oplus V_{3,q}$ con $\dim V_1 = 1$, $V_1 = M(g, \chi)$. Por 2.5.1, tenemos

$$\dim \mathfrak{B}(V) \geq \dim \mathfrak{B}(V_1) \dim \mathfrak{B}(V_{3,q}) \geq 36$$

a menos que $\chi(g) = q = -1$, caso en el cual $\dim \mathfrak{B}(V) \geq 24$. Consideremos este caso: denotamos por χ', g' el carácter y el elemento de Γ que dan $V_{3,-1}$, i.e. $V = M(g, \chi) \oplus M(g', \chi')$. Como g es central, actúa en $V_{3,-1}$ por un escalar, digamos q_{12}. Denotamos $q_{21} = \chi(g')$. Sea $\sigma := q_{12}q_{21}$. Por 4.1.1, $\dim \mathfrak{B}(V) = 24$ sii $\sigma = 1$. Si $\sigma \neq 1$, consideramos x un generador del espacio de representación de χ y x_0, x_1, x_2 una base de $M(g', \chi')$ como en la sección 4.4, y para $i = 0, 1, 2$ definimos

$$z_i = \mathrm{Ad}_{x_i}(x) = x_i x - q_{21} x x_i.$$

Sea $N = N(\sigma)$. Es sencillo (aunque tedioso) ver, usando derivaciones, que el conjunto

$$\{x^i z_0^{j_0} \mid 0 \leq i < 2,\ 0 \leq j_0 < N\}$$

es linealmente independiente. Con esto vemos, también usando derivaciones, que el conjunto

$$\{x^i z_0^{j_0} z_1^{j_1} \mid 0 \leq i < 2,\ 0 \leq j_0, j_1 < N\}$$

es linealmente independiente, y finalmente vemos que el conjunto

$$\{x^i z_0^{j_0} z_1^{j_1} z_2^{j_2} \mid 0 \leq i < 2,\ 0 \leq j_0, j_1, j_2 < N\}$$

es linealmente independiente. Más aun, es claro que este conjunto está incluido en K, la intersección de los núcleos de $\partial_{x_0}, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}$. Luego, por 3.4.1 parte 2 (tomando $W = V_{3,q}$), vemos que $\dim \mathfrak{B}(V) \geq 2N^3 \times 12 \geq 192$.

4.5.2. Caso 4. Tenemos $V = M_1 \oplus M_2 = M(g_1, \rho_1) \oplus M(g_2, \rho_2)$, donde ρ_1, ρ_2 son caracteres, g_1, g_2 no conmutan y $[\Gamma : \Gamma_{g_1}] = [\Gamma : \Gamma_{g_2}] = 2$. Sea $g_1' = g_2 g_1 g_2^{-1}$, $g_2' = g_1 g_2 g_1^{-1}$. Las clases de conjugación de g_i son entonces $\{g_i, g_i'\}$ y $[g_i, g_i'] = 1$. Sea H el subgrupo de Γ generado por g_1, g_1', que es conmutativo. Sea $\sigma \in \operatorname{Aut} H$ la restricción de la adjunta $\sigma(h) = g_2 h g_2^{-1}$. Tenemos $\sigma^2 = \mathrm{id}$, y sea $t = g_1' g_1^{-1}$. Nótese que

$$\begin{aligned} g_2' &= g_1 g_2 g_1^{-1} = g_2 g_2^{-1} g_1 g_2 g_1^{-1} = g_2 g_1' g_1^{-1} = g_2 t, \\ g_2 &= g_1 g_2' g_1^{-1} = g_2' g_1' g_1^{-1} = g_2' t = g_2 t^2, \end{aligned}$$

de donde $t^2 = 1$. Sea entonces $q_1 = \rho_1(g_1)$, $q_2 = \rho_2(g_2)$, $\eta_1 = \rho_1(t)$, $\eta_2 = \rho_2(t)$ (luego $\eta_1 = \pm 1$, $\eta_2 = \pm 1$), y $\alpha_1 = \rho_1(g^{'2})$, $\alpha_2 = \rho_2(g_1^2)$. Tenemos entonces una base $\{x_1, x_1' = g_2 \rightharpoonup x_1\}$ de M_1 y una base $\{x_2, x_2' = g_1 \rightharpoonup x_2\}$ de M_2 tal que las trenzas están dadas por

$$\underset{\text{matriz de } c \text{ en } M_1,}{\begin{pmatrix} q_1 & \eta_1 q_1 \\ \eta_1 q_1 & q_1 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{matriz de } c \text{ en } M_2,}{\begin{pmatrix} q_2 & \eta_2 q_2 \\ \eta_2 q_2 & q_2 \end{pmatrix}}$$

y en los otros monomios la trenza está dada por

$$\begin{aligned} c(x_1 \otimes x_2) &= x_2' \otimes x_1, & c(x_2 \otimes x_1) &= x_1' \otimes x_2, \\ c(x_1 \otimes x_2') &= \alpha_2 x_2 \otimes x_1, & c(x_2 \otimes x_1') &= \alpha_1 x_1 \otimes x_2, \\ c(x_1' \otimes x_2) &= \eta_2 x_2' \otimes x_1', & c(x_2' \otimes x_1) &= \eta_1 x_1' \otimes x_2', \\ c(x_1' \otimes x_2') &= \eta_2 \alpha_2 x_2 \otimes x_1', & c(x_2' \otimes x_1') &= \eta_1 \alpha_1 x_1 \otimes x_2'. \end{aligned}$$

Notamos que los módulos M_1, M_2 son de tipo Cartan con matriz asociada

$$\underset{\text{matriz de Cartan de } M_1,}{\begin{pmatrix} 2 & 2 - N_1 \\ 2 - N_1 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{matriz de Cartan de } M_2,}{\begin{pmatrix} 2 & 2 - N_2 \\ 2 - N_2 & 2 \end{pmatrix}}$$

donde $N_1 = N(q_1)$, $N_2 = N(q_2)$. Luego $\mathfrak{B}(V)$ es de dimensión infinita si $N_1 > 3$ ó $N_2 > 3$, como en 4.8.1 más abajo. Además, si $N_1 = 3$ entonces $\mathfrak{B}(M_1)$ tiene dimensión 27 y análogamente para M_2, de donde por, 4.1.1, si $N_1 > 2$ ó $N_2 > 2$ se tiene $\dim \mathfrak{B}(V) \geq 4 \times 27 = 108$.

Consideramos entonces $q_1 = q_2 = -1$. Hay dos casos: $(\eta_1, \eta_2) = (1, 1)$ y $(\eta_1, \eta_2) \neq (1, 1)$. En el caso $(\eta_1, \eta_2) = (1, 1)$, definimos para $\epsilon, = \pm 1$ los vectores

$$z_\epsilon = \sqrt{\alpha_1} x_1 + \epsilon x_1', \quad z_\epsilon' = \sqrt{\alpha_2} x_2 + \epsilon x_2',$$

que dan una base de V. Es sencillo calcular la trenza en esta base:

$$\begin{aligned}
c(z_\epsilon \otimes z_{\epsilon'}) &= -z_{\epsilon'} \otimes z_\epsilon,\\
c(z_\epsilon \otimes z'_{\epsilon'}) &= \sqrt{\alpha_2}\epsilon' z'_{\epsilon'} \otimes z_\epsilon,\\
c(z'_{\epsilon'} \otimes z_\epsilon) &= \sqrt{\alpha_1}\epsilon z_\epsilon \otimes z'_{\epsilon'},\\
c(z'_\epsilon \otimes z'_{\epsilon'}) &= -z'_{\epsilon'} \otimes z'_\epsilon,
\end{aligned}$$

de donde se ve que $\mathfrak{B}(V)$ es de TGA. Si tomamos $M_{\epsilon,\epsilon'} = \operatorname{span}\{z_\epsilon, z'_{\epsilon'}\}$, la trenza actúa por la matriz $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{\alpha_2}\epsilon' \\ \sqrt{\alpha_1}\epsilon & -1 \end{pmatrix}$. En virtud de 4.3.1, $\mathfrak{B}(M_{\epsilon,\epsilon'})$ tiene dimensión $4 \times N(\epsilon\epsilon'\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha_2})$, de donde

$$\dim(\mathfrak{B}(V)) \geq \dim(\mathfrak{B}(M_{\epsilon,\epsilon'}))\dim(\mathfrak{B}(M_{-\epsilon,-\epsilon'})) = 16(N(\epsilon\epsilon'\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha_2}))^2 \geq 64,$$

tomando ϵ, ϵ' de manera tal que $\epsilon\epsilon'\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha_2} \neq 1$. Llamaremos a este módulo por $M_{q_1q_2\eta_1\eta_2\alpha_1\alpha_2}$.

4.5.2.1. Observación. Una álgebra de Nichols como esta se puede encontrar en [**MS96**], donde se construye sobre el grupo dihedral $\mathbb{D}_4$. Es un caso particular de la construcción previa, tomando las constantes $q_1 = q_2 = -1$, $\eta_1 = \eta_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Se puede ver que tomando $M_{+,-}$ y $M_{-,+}$ cada $\mathfrak{B}(M_{\pm,\mp})$ es de tipo A_2 y luego de dimensión 8. Además en los elementos de $M_{\pm,\mp} \otimes M_{\mp,\pm}$ la trenza verifica $c^2 = \mathrm{id}$, de donde, por 2.5.1, $\dim \mathfrak{B}(V) = 64$.

Si $(\eta_1, \eta_2) \neq (1,1)$, suponemos que $\eta_1 = -1$ (si $(\eta_1, \eta_2) = (1,-1)$ intercambiamos M_1 y M_2). Tomamos z'_ϵ como antes, y definimos

$$\begin{aligned}
t_+ &= \operatorname{Ad}_{x_1} z'_+ = x_1 z'_+ - \sqrt{\alpha_1} z'_+ x_1,\\
t_- &= \operatorname{Ad}_{x_1} z'_- = x_1 z'_- + \sqrt{\alpha_1} z'_- x_1.
\end{aligned}$$

Es fácil (aunque tedioso) ver usando derivaciones que los t_+, t_- son linealmente independientes, y que el conjunto $\{t_+^{i_+} t_-^{i_-} (z'_+)^{j_+} (z'_-)^{j_-} \mid 0 \leq i_+, i_-, j_+, j_- < 2\}$ es l.i. Como este conjunto está contenido en $\ker \partial_{x_1} \cap \ker \partial_{x'_1}$, es inmediato que, por 3.4.1 parte 1, el conjunto

$$\{t_+^{i_+} t_-^{i_-} (z'_+)^{j_+} (z'_-)^{j_-} (x_1)^{t_1} (x'_1)^{t_2} \mid 0 \leq i_+, i_-, j_+, j_-, t_1, t_2 < 2\}$$

es linealmente independiente, de donde $\dim \mathfrak{B}(V) \geq 64$.

4.5.3. Caso 5c. Tenemos $V = M(g, \rho)$, con ρ un carácter y la órbita $\mathcal{O}_g$ es $\{t_0 = g, t_1, t_2, t_3\}$. Consideramos como en (4.2.1) $f_g : \Gamma \to \mathbb{S}_4$. Por 4.2.2 el cardinal de $f_g(\mathcal{O}_g)$ puede ser $1, 2, 4$. Si $\# f_g(\mathcal{O}_g) = 1$ entonces $\mathcal{O}_g$ genera un subgrupo conmutativo y luego $\mathfrak{B}(V)$ es de TGA.

Si $\#f_g(\mathcal{O}_g) = 2$ podemos indexar los t_i de tal manera que

$$f_g(t_0) = f_g(t_1) = (2\ 3) \quad f_g(t_2) = f_g(t_3) = (0\ 1)$$

(como $f_g(t_0) = f_g(t_1)$ entonces t_0 conmuta con t_1, de donde o bien $f_g(t_0) = \mathrm{id}$ –que implicaría que $\#f_g(\mathcal{O}_g) = 1$– o bien $f_g(t_0) = (2\ 3)$. Análogamente para $f_g(t_2)$.). Sea $h \in \Gamma$ tal que $ht_0h^{-1} = t_2$; luego $f_g(h)(0) = 2$. Es fácil ver que existe $h' \in \Gamma$ tal que $f_g(h') = (0\ 2)(1\ 3)$. En efecto, la imagen de f_g contiene a $(0\ 1)$ y a $(2\ 3)$, por lo que contiene al subgrupo generado por ambos, que tiene orden 4. Como la imagen actúa transitivamente sobre la órbita, no puede ser este grupo sino que tiene que contenerlo estrictamente. Luego, $\#\operatorname{Im}(f_g)$ puede ser 8, 12 ó 24. El único subgrupo de orden 12 de $\mathbb{S}_4$ es A_4, pero $(0\ 1) \notin A_4$, lo que prueba que $\#\operatorname{Im}(f_g) \neq 12$. Por otra parte, si fuera $\#\operatorname{Im}(f_g) = 8$, no podríamos tener triciclos, con lo que no podría haber otra trasposición. Deberíamos tener en la imagen entonces $(0\ 3)(1\ 2)$, que multiplicado a derecha e izquierda por $(0\ 1)$ da $(0\ 2)(1\ 3)$, o bien $(0\ 3\ 1\ 2)$, que multiplicado a izquierda por $(2\ 3)$ da $(0\ 2)(1\ 3)$, o bien $(0\ 2\ 1\ 3)$, que multiplicado a derecha por $(2\ 3)$ da $(0\ 2)(1\ 3)$. Cualquier otro cuatriciclo multiplicado por $(2\ 3)$ da un triciclo. La otra posibilidad es $\operatorname{Im}(f_g) = \mathbb{S}_4$. En cualquier caso, $(0\ 2)(1\ 3) \in \operatorname{Im}(f_g)$. Sea x_0 un generador del espacio de la representación ρ y sea $x_1 = t_2 \rightharpoonup x_0$, $x_2 = h' \rightharpoonup x_0$, $x_3 = t_0h' \rightharpoonup x_0$. Es sencillo ver que $\mathfrak{B}(V)$ es un caso particular de las álgebras de 4.5.2. De hecho, si $q = \rho(t_0)$, $\eta = \rho(t_0^{-1}t_1)$, $\alpha = \rho(t_2^2)$ entonces $\mathfrak{B}(V) \simeq \mathfrak{B}(M_{q,q,\eta,\eta,\alpha,\alpha})$, y luego $\dim \mathfrak{B}(V) \geq 64$.

Si $\#f_g(\mathcal{O}_g) = 4$, entonces $f_g(t_i)$ fija i y no fija j para $j \neq i$, y luego es un triciclo. Podemos indexar los t_i de tal manera que $f_g(t_0) = (1\ 2\ 3)$. Se puede ver que la hipótesis $f_g(t_1) = (0\ 2\ 3)$ lleva a una contradicción, y por lo tanto se tiene $f_g(t_1) = (0\ 3\ 2)$. Esto implica que $f_g(t_2) = (0\ 1\ 3)$ y $f_g(t_3) = (0\ 2\ 1)$. Tomamos $h = t_2t_1t_0^{-2}$. Luego $f_g(h) = \mathrm{id}$, y entonces h conmuta con $\mathcal{O}_g$ (nótese que por la misma razón t_i^3 conmuta con $\mathcal{O}_g$ para $i = 0, 1, 2, 3$). Notamos que $t_1^3 = t_2t_0^3t_2^{-1} = t_0^3$, y en la misma forma se ve que $t_i^3 = t_j^3$. Nótese también que

$$\begin{aligned} h &= t_2t_1t_0^{-2} = t_0^{-2}t_0^2(t_2t_1)t_0^{-2} = t_0^{-2}t_1t_3, \text{ y} \\ h^2 &= t_0^{-2}t_1t_3t_2t_1t_0^{-2} = t_0^{-2}t_1t_3t_2t_3^{-2}t_1 = t_0^{-2}t_1t_1t_3t_3^{-2}t_1 = t_0^{-2}t_1^2t_3^{-1}t_1 \\ &= t_0^{-2}t_0^{-1}t_1^2t_1 = t_0^{-3}t_1^3 = 1. \end{aligned}$$

Tomamos x_0 un generador del espacio de representación de ρ. Sea $q = \rho(g)$ y tomamos $qx_1 = t_2 \rightharpoonup x_0$, $qx_2 = t_0 \rightharpoonup x_1$, $qx_3 = t_0 \rightharpoonup x_2$. Sea $\alpha = \rho(h) = \pm 1$;

calculamos

$$\begin{aligned}
&t_0 \rightharpoonup x_0 = qx_0,\\
&t_0 \rightharpoonup x_1 = qx_2,\\
&t_0 \rightharpoonup x_2 = qx_3,\\
&t_0 \rightharpoonup x_3 = q^{-2}t_0^3 \rightharpoonup x_1 = q^{-3}t_0^3 t_2 \rightharpoonup x_0 = q^{-3}t_2 t_0^3 \rightharpoonup x_0 = t_2 \rightharpoonup x_0 = qx_1,\\
&t_1 \rightharpoonup x_0 = t_0^2 t_2 t_0^{-2} \rightharpoonup x_0 = q^{-2}t_0^2 t_2 \rightharpoonup x_0 = q^{-1}t_0^2 \rightharpoonup x_1 = qx_3,\\
&t_1 \rightharpoonup x_1 = qx_1 \text{ por (3.1.3)},\\
&t_1 \rightharpoonup x_2 = t_2^{-1}t_2 t_1 t_0^{-2} t_0^2 \rightharpoonup x_2 = q^2 t_2^{-1} h \rightharpoonup x_1 = q^2 \alpha t_2^{-1} \rightharpoonup x_1 = q\alpha x_0,\\
&t_1 \rightharpoonup x_3 = t_0^2 t_0^{-2} t_1 t_3 t_3^{-1} \rightharpoonup x_3 = q^{-1}\alpha t_0^2 \rightharpoonup x_3 = q\alpha x_2,\\
&t_2 \rightharpoonup x_0 = qx_1,\\
&t_2 \rightharpoonup x_1 = t_2 t_1 t_0^{-2} t_0^2 t_1^{-1} \rightharpoonup x_1 = q^{-1} t_2 t_1 t_0^{-2} t_0^2 \rightharpoonup x_1 = q\alpha x_3,\\
&t_2 \rightharpoonup x_2 = qx_2 \text{ por (3.1.3)},\\
&t_2 \rightharpoonup x_3 = t_2^3 t_2^{-2} \rightharpoonup x_3 = q^{-1}\alpha^{-1} t_2^3 t_2^{-1} \rightharpoonup x_1 = q^{-2}\alpha^{-1} t_2^3 \rightharpoonup x_0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = q^{-2}\alpha t_0^3 \rightharpoonup x_0 = q\alpha x_0,\\
&t_3 \rightharpoonup x_0 = t_0 t_2 t_0^{-1} \rightharpoonup x_0 = t_0 \rightharpoonup x_1 = qx_2,\\
&t_3 \rightharpoonup x_1 = t_0 t_2 t_0^{-1} \rightharpoonup x_1 = q^{-1} t_0 t_2 \rightharpoonup x_3 = \alpha t_0 \rightharpoonup x_0 = q\alpha x_0,\\
&t_3 \rightharpoonup x_2 = t_0 t_2 t_0^{-1} \rightharpoonup x_2 = q^{-1} t_0 t_2 \rightharpoonup x_1 = \alpha t_0 \rightharpoonup x_3 = q\alpha x_1,\\
&t_3 \rightharpoonup x_3 = qx_3 \text{ por (3.1.3)}.
\end{aligned}$$

4.5.3.1. Definición. Denotaremos por $V_{4,q,\alpha}$ al módulo de dimensión 4 generado por $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ con la trenza de arriba. Por 4.1.1 tenemos

$$\dim(\mathfrak{B}(V_{4,q,\alpha})) \geq 81 \text{ si } N(q) \geq 3.$$

4.5.3.2. Si $\alpha = -1$, es fácil ver que para $V_{4,-1,-1}$ la restricción de c al subespacio $\operatorname{span}\{x_i \otimes x_j \mid i \neq j\}$ verifica $c^3 = 1$, de donde los autovalores de c en ese subespacio son raíces cúbicas de la unidad. Por otra parte, en el subespacio $\operatorname{span}\{x_i \otimes x_i \mid i = 0,1,2,3\}$ la trenza actúa escalarmente por -1, y luego

$$\ker \mathbf{S}^2 = \ker(1+c) = \operatorname{span}\{x_i^2,\ i = 0,1,2,3\}.$$

Esto dice que $\dim \mathfrak{B}^2(V_{4,-1,-1}) = 12$.

Como $\partial_0 : \mathfrak{B}^2(V_{4,-1,-1}) \to \mathfrak{B}^1(V_{4,-1,-1})$ tiene imagen de dimensión 3, (ya que $x_0 \notin \operatorname{Im}(\partial_0)$ porque $x_0^2 = 0$), luego $\dim(\ker(\partial_0) \cap \mathfrak{B}^2(V_{4,-1,-1})) = 9$. Entonces, el polinomio de Hilbert $P_{\mathfrak{B}(V_{4,-1,-1})}(t) \geq (1+t)(1+3t+9t^2+3t^3+t^4)$ en virtud de 3.4.1 parte 1, de donde $\dim \mathfrak{B}(V_{4,-1,-1}) \geq 34$.

Para el módulo $V_{4,-1,1}$, es fácil encontrar las relaciones de grado 2:

$$\begin{aligned}
&x_i^2 = 0, \ \ i = 0,1,2,3\\
&x_0x_1 + x_2x_0 + x_1x_2 = 0,\\
&x_0x_2 + x_3x_0 + x_2x_3 = 0,\\
&x_0x_3 + x_1x_0 + x_3x_1 = 0,\\
&x_1x_3 + x_2x_1 + x_3x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Con el orden $x_0 > x_1 > x_2 > x_3$, para dar una base de Gröbner del ideal generado tenemos que agregar las relaciones

$$\begin{aligned}
&x_1x_2x_1 - x_2x_1x_2 = 0,\\
&x_2x_3x_2 - x_3x_2x_3 = 0.
\end{aligned}$$

No es tan fácil[1] ver que hay una relación más en $\mathfrak{B}(V_{4,-1,1})$:

$$x_1x_2x_3x_1x_2x_3 + x_2x_3x_1x_2x_3x_1 + x_3x_1x_2x_3x_1x_2 = 0.$$

Con esto, es fácil ver que la dimensión de $\mathfrak{B}^i(V_{4,-1,1})$ es $1,4,8,11,12,12,11,8,4,1$ para $i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ respectivamente, y luego $\dim(\mathfrak{B}(V_{4,-1,1})) = 72$.

Una manera gráfica de ver la trenza y la dimensión de $\mathfrak{B}(V_{4,-1,1})$ es mirar el tetraedro de la Figura 4.5.a. La trenza es $c(x_i \otimes x_j) = -x_{i\triangleright j} \otimes x_i$, donde $i \triangleright \bullet$ es

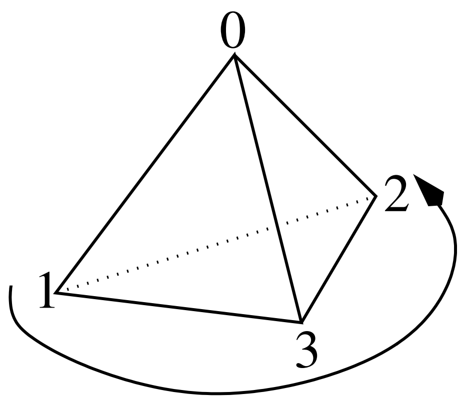

Figura 4.5.a. Acción $\triangleright$.

la función que resulta de fijar el vértice i y rotar los otros tres en sentido horario un tercio de vuelta (en la Figura se indica con una flecha la función $0 \triangleright \bullet$). La manera de ver la dimensión es dibujar, para cada relación de la base de Gröbner, un camino que represente el monomio de mayor grado. Por ejemplo, la relación $x_0x_1 + x_2x_0 + x_1x_2 = 0$ se representa por un camino del vértice 0 al 1. La relación

[1] Usé [**Mül98a**] para ver que debía haber otra relación en grado 6.

$x_1x_2x_1 - x_2x_1x_2 = 0$ es un camino de 1 a 2 y de vuelta a 1. Una vez que se dibujan todos los caminos, una base de $\mathfrak{B}(V_{4,-1,1})$ está dada por todos los caminos que no tienen como sub-caminos a ninguno de los dibujados. El camino más largo que resulta así es $3 \to 2 \to 3 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 2 \to 0$, lo que dice que la integral es $x_3x_2x_3x_1x_2x_3x_1x_2x_0$.

Un grupo sobre el que vive el módulo $V_{4,q,1}$ es, por ejemplo, $\Gamma = A_4 \times C_N$, con $N = N(q)$. Si se toma C_N generado por k y $g = t_0 = (1\ 2\ 3) \times k$, es claro que $\Gamma_g =< (1\ 2\ 3) > \times < k >\simeq C_3 \times C_N$. La órbita de g es entonces

$$\mathcal{O}_g = \{(1\ 2\ 3) \times k,\ (0\ 3\ 2) \times k,\ (0\ 1\ 3) \times k,\ (0\ 2\ 1) \times k\},$$

y poniendo $\rho(g^i \times k^j) = q^j$ se obtiene $V_{4,q,1} = M(g, \rho)$.

4.6. Un solo primo

En esta sección clasificamos las álgebras de Nichols de dimensión p, p^2, p^3 para p un primo. Gracias a 3.4.1 esta es una aplicación sencilla.

4.6.1. LEMA. *Sea $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$, Γ un grupo finito,* car $\mathbf{k} \neq p$.

1. *Si* $\dim \mathfrak{B}(V) = p$ *entonces* $\dim V = 1$ *y* $\mathfrak{B}(V)$ *es una LC con* $N = p$.
2. *Si* $\dim \mathfrak{B}(V) = p^2$ *entonces*
   - $\dim V = 1$ *y* $\mathfrak{B}(V)$ *es una LC con* $N = p^2$*, ó*
   - $\dim V = 2$ *y* $\mathfrak{B}(V)$ *es un PC con* $N_1 = N_2 = p$.
3. *Si* $\dim \mathfrak{B}(V) = p^3$ *entonces*
   - $\dim V = 1$ *y* $\mathfrak{B}(V)$ *es una LC con* $N = p^3$*, ó*
   - $\dim V = 2$ *y* $\mathfrak{B}(V)$ *es un PC con* $N_1 = p$*,* $N_2 = p^2$*, ó*
   - $\dim V = 2$ *y* $\mathfrak{B}(V)$ *es de tipo* A_2 *como en 2.4.8 con* $N = p$*, o*
   - $\dim V = 3$ *y* $\mathfrak{B}(V)$ *es un ELC con* $N_1 = N_2 = N_3 = p$.

PRUEBA. Las cotas sobre la dimensión de V son consecuencia directa de 4.1.4. La clasificación de la sección 4.4 dice que $\mathfrak{B}(V)$ es de TGA, porque si no $V = V_{3,q}$ pero por 3.4.1 parte 1 debe ser $N(q) = p^i$ y con 4.4.3 se llega a una contradicción. Siendo V de TGF y ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ semisimple (dado que car $\mathbf{k} \neq p$), tenemos que V es de TGD. El teorema 3.4.1 parte 2 dice que los N_i son también potencias de p, y 2.5.1 dice que se está en presencia de un ELC a menos que $\dim \mathfrak{B}(V) = p^3$ y $\dim V = 2$, caso en el que hay que considerar la posibilidad $N_1 = N_2 = p$. Lo que se aplica entonces es 4.3.1. □

4.7. Dimensión < 32

Vamos a clasificar ahora las álgebras de Nichols $\mathfrak{B}(V)$ de dimensión < 32 con $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$, Γ un grupo finito (y $\operatorname{car}\mathbf{k} \nmid |\Gamma|$).

4.7.1. Los casos sencillos. Veamos primero que los módulos $V_{3,q}$ dan álgebras de dimensión ≥ 32 si $q \neq -1$. Si $N(q) > 3$ esto es inmediato por 4.1.1. Sea q una raíz cúbica de 1. Por las observaciones de 4.4.2, el morfismo $1 + c$ es inyectivo, y luego $\mathfrak{B}^2(V_{3,q})$ tiene dimensión 9. Como la imagen de ∂_0 restringida a $\mathfrak{B}^2(V_{3,q})$ tiene dimensión 3, su núcleo tiene dimensión 6. Además 4.1.1 dice que el conjunto $\{x_1^i x_2^j, 0 \leq i, j < 3,\ i + j > 2\}$ es l.i. y está claramente incluido en $\ker \partial_0$. Tomando en cuenta que los vectores $1, x_1, x_2$ también viven en $\ker \partial_0$, vemos que el polinomio de Hilbert de $\ker \partial_0$ tiene coeficientes mayores o iguales que $P(t) = 1 + 2t + 6t^2 + 2t^3 + t^4$, y luego 3.4.1 parte 1 dice que $\dim \mathfrak{B}(V_{3,q}) \geq 3P(1) = 36$.

El único PTTGF de dimensión 3 que no es de TGA y con rango de Nichols < 32 es entonces $V_{3,-1}$. En particular, vemos, como se aseguró en 2.4.9, que es el PTTGF de menor rango de Nichols que no es de TGA (luego, en característica 0, es el PTTGF de menor rango de Nichols que no es de TGD).

Sea $n = p_1 p_2$ un producto de dos primos distintos tales que $p_1 < p_2 < p_1^2$. Entonces $r(n) < 3$, de donde $\dim V \leq 2$ y luego V es de TGA. Si $\dim V = 2$ y c tiene matriz $\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$, entonces por 3.4.1 parte 2 tenemos (dando vuelta la base si fuese necesario) $N(q_{11}) = p_1$, $N(q_{22}) = p_2$, y, por 4.1.2 $q_{12}q_{21} = 1$, i.e. $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC con base $\{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \mid 0 \leq m_i < p_i,\ i = 1, 2\}$. Si $\dim V = 1$ entonces $\mathfrak{B}(V)$ es una LC de dimensión $p_1 p_2$.

Como calculamos la dimensión de $\mathfrak{B}(V_{3,-1})$, probamos que $\dim \mathfrak{B}(V_{3,q}) \geq 32$ si $q \neq -1$, y probamos que $\dim \mathfrak{B}(V) \geq 32$ para V un módulo de Yetter–Drinfeld de dimensión 4 que no es de TGA, el argumento anterior se aplica también para $p_1 = 2$ y $p_2 < 16$ (i.e., $n = 10$, $n = 14$, $n = 22$ y $n = 26$). En estos casos, si $\dim V$ fuera 3, sería V de TGA porque si no $V = V_{3,-1}$, lo que daría un álgebra de Nichols de dimensión 12 y una contradicción. Luego 4.1.4 se aplica y $\dim V \leq 2$.

Tenemos entonces la clasificación de las álgebras de Nichols de dimensión

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 31.$$

Consideramos ahora las dimensiones faltantes. Cuando V sea de TGD denotaremos por $\{x_1, \dots, x_d\}$ una base de V y por (q_{ij}) su matriz.

4.7.1.1. Observación. Si $\dim V = 2$ y $\dim \mathfrak{B}(V) < 32$, entonces $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC o es de tipo A_2. En efecto, supongamos que $N(q_{22}) > 2$ (en el caso $N(q_{11}) = N(q_{22}) = 2$ es inmediato por 4.3.1 que $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC o de tipo A_2). Supongamos que el orden de nilpotencia de Ad_{x_2} en x_1 es ≥ 3 y tomamos M_1, M_2 como en 4.3.1. Para tener $N_1N_2M_1M_2 < 32$ deberíamos tener $N_1 = M_1 = M_2 = 2$ y $N_2 = 3$. Pero esto es imposible, porque $M_2 = N(q_{11}q_{12}^2q_{21}^2q_{22}^4) = N(q_{11}q_{12}^2q_{21}^2q_{22})$, y $M_1 = N(q_{11}q_{12}q_{21}q_{22})$. Como existe un único $q \in \mathbf{k}$ tal que $N(q) = 2$ en cualquier cuerpo, deberíamos tener $q_{12}q_{21} = q_{12}^2q_{21}^2$, o sea $q_{12}q_{21} = 1$, pero esto lleva a la contradicción de que $\mathfrak{B}(V)$ sea un ELC.

4.7.2. $n = 12$**.** Como $r(12) < 4$ tenemos $\dim V \leq 3$. Si V no es de TGA entonces $V = V_{3,-1}$ y $\mathfrak{B}(V)$ está dada en 2.4.9. Tenemos las siguientes posibilidades (denotamos por (q_{ij}) la matriz de c cuando V es de TGA):

1. $V = V_{3,-1}$.
2. $\dim V = 3$, de TGA. El teorema 3.4.1 parte 2 implica que (reordendo la base si fuera necesario) los órdenes $N(q_{ii})$ son $2, 2, 3$ respectivamente para $i = 1, 2, 3$. Por 4.1.2 es un ELC.
3. $\dim V = 2$. Puede ser un ELC con $(N(q_{11}), N(q_{22})) = (3, 4)$ ó $(2, 6)$. Si no es un ELC, entonces por 4.3.1, podemos tener $(N(q_{11}), N(q_{22})) = (2, 2)$ (y luego $N(q_{12}q_{21}) = 3$ y $\mathfrak{B}(V)$ es de tipo A_2), ó $(N(q_{11}), N(q_{22})) = (2, 3)$ (y luego $q_{12}q_{21}q_{22} = 1$ y $\mathfrak{B}(V)$ es también de tipo A_2). En ambos casos tenemos una base de PBW dada por
$$\{x_1^{n_1}z^m x_2^{n_2} \mid 0 \leq n_i < N(q_{ii}), 0 \leq m < 12/(N(q_{11})N(q_{22}))\}.$$
4. $\dim V = 1$, $\mathfrak{B}(V)$ es una LC.

4.7.3. $n = 16$**.** Aquí, como en los casos que siguen, $\dim V \leq 4$ dado que $r(n) < r(32) = 5$. Por los resultados de la sección 4.5, si $\dim V = 4$ tenemos $\mathfrak{B}(V)$ un ELC. Si $\dim V \leq 3$ entonces V es de TGA porque, si no, $V = V_{3,-1}$, una contradicción. Tenemos las siguientes posibilidades:

1. $\dim V = 4$, $\mathfrak{B}(V)$ un ELC con $N(q_{ii}) = 2$, $i = 1, 2, 3, 4$.
2. $\dim V = 3$. Por 3.4.1 parte 2, $N(q_{ii})$ puede ser 2 ó 4. Si algún $N(q_{ii})$ es 4 entonces los otros dos son 2. Si $N(q_{11}) = N(q_{22}) = N(q_{33}) = 2$ entonces $\mathfrak{B}(V)$ no puede ser un ELC (porque tendría dimensión 8) y luego para algún par $i \neq j$ tenemos $q_{ij}q_{ji} \neq 1$. Supongamos $q_{12}q_{21} \neq 1$. Por 3.4.1 parte 2, $\dim \mathfrak{B}(\mathrm{span}\{x_1, x_2\})$ es un múltiplo de 4, y por 2.5.1 la única posibilidad es $\dim \mathfrak{B}(\mathrm{span}\{x_1, x_2\}) = 8$ y $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC generalizado con la descomposición $V = \mathrm{span}\{x_1, x_2\} \oplus \mathrm{span}\{x_3\}$. Por 4.3.1 debemos

tener $N(q_{12}q_{21}) = 2$ y $\mathfrak{B}(\mathrm{span}\{x_1, x_2\})$ es de tipo A_2. Tenemos entonces las siguientes posibilidades

(a) $N(q_{11}) = N(q_{22}) = 2$, $N(q_{33}) = 4$ y $\mathfrak{B}(V)$ un ELC.

(b) $N(q_{11}) = N(q_{22}) = N(q_{33}) = 2$, $N(q_{12}q_{21}) = 2$ (aquí hace falta $\operatorname{car}\mathbf{k} \neq 2$ porque si no $q_{12}q_{21} = 1$ y es un ELC de dimensión 8), $q_{13}q_{31} = q_{23}q_{32} = 1$. $\mathfrak{B}(V)$ es de tipo $A_2 \times A_1$.

3. $\dim V = 2$, con base $\{x_1, x_2\}$. Podemos tener, por 4.7.1.1,
   (a) un ELC con $N(q_{11}) = 2$, $N(q_{22}) = 8$,
   (b) un ELC con $N(q_{11}) = N(q_{22}) = 4$,
   (c) un álgebra de tipo A_2, con $N(q_{11}) = N(q_{22}) = 2$, y $N(q_{12}q_{21}) = 4$,
   (d) un álgebra de tipo A_2, con $N(q_{11}) = 2$, $N(q_{22}) = 4$, $q_{12}q_{21}q_{22} = 1$.
4. $\dim V = 1$, $\mathfrak{B}(V)$ una LC.

4.7.4. $n = 18$**.** Aquí, y en lo que sigue con la excepción de $n = 24$, $\dim V \leq 3$ ya que teníamos que $\dim V \leq 4$ y las únicas álgebras de Nichols de rango 4 y de dimensión < 32 son el ELC de dimensión $2^4 = 16$, el ELC de dimensión $2^3 \times 3 = 24$ y $\mathfrak{B}(V_1 \oplus V_{3,-1})$, donde V_1 y $V_{3,-1}$ son como en 4.5.1 con $\sigma = 1$, que es también de dimensión 24. Ya dijimos que si $\dim V = 3$ y $\dim \mathfrak{B}(V) < 32$ entonces $V = V_{3,-1}$ ó V es de TGA En particular, tendremos para $n = 18$ que V es de TGA. Las posibilidades son:

1. $\dim V = 3$, $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC con $N(q_{11}) = 2$, $N(q_{22}) = N(q_{33}) = 3$, y $q_{ij}q_{ji} = 1$ para $i \neq j$.
2. $\dim V = 2$. Aquí $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC, ya que la condición $N(q_{11})N(q_{22}) < 18$ junto a 3.4.1 parte 2 implica que, o bien $N(q_{11}) = N(q_{22}) = 3$ (que a su turno implicaría $q_{11}q_{12}q_{21} = 1$, pero entonces $z = \mathrm{Ad}_{x_1}(x_2)$ tendría orden de nilpotencia 3, y por 4.3.1 $\dim \mathfrak{B}(V) \geq 27$), o bien $N(q_{11}) = 2$ y $N(q_{22}) = 3$ (que a su turno implicaría, en virtud de 4.3.1, que $q_{12}q_{21}q_{22} = 1$, de donde $z = \mathrm{Ad}_{x_2}(x_1)$ tendría orden de nilpotencia 2 y $\dim \mathfrak{B}(V) = 12$). Luego, tenemos dos posibilidades:
   (a) $\mathfrak{B}(V)$ un ELC con $N(q_{11}) = 3$ y $N(q_{22}) = 6$, ó
   (b) $\mathfrak{B}(V)$ un ELC con $N(q_{11}) = 2$ y $N(q_{22}) = 9$.
3. $\dim V = 1$ y $\mathfrak{B}(V)$ una LC.

4.7.5. $n = 20$**.** Podemos tener

1. $\dim V = 3$, $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC con $N(q_{11}) = N(q_{22}) = 2$ y $N(q_{33}) = 5$.
2. $\dim V = 2$, entonces por 4.3.1 las posibilidades son:
   (a) $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC con $N(q_{11}) = 4$ y $N(q_{22}) = 5$,
   (b) $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC con $N(q_{11}) = 2$ y $N(q_{22}) = 10$.

(c) $\mathfrak{B}(V)$ es de tipo A_2 con $N(q_{11}) = N(q_{22}) = 2$ y $N(q_{12}q_{21}) = 5$, ó
(d) $\mathfrak{B}(V)$ es de tipo A_2 con $N(q_{11}) = 2$, $N(q_{22}) = 5$ y $q_{12}q_{21}q_{22} = 1$.

3. $\dim V = 1$ y $\mathfrak{B}(V)$ una LC.

4.7.6. $n = 24$**.** Podemos tener

1. $\dim V = 4$, entonces por los resultados de la sección 4.5 o bien $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC con $N(q_{11}) = N(q_{22}) = N(q_{33}) = 2$ y $N(q_{44}) = 3$, o es un ELC como en 4.5.1, con $V = V_1 \oplus V_{3,-1}$, $\dim \mathfrak{B}(V_1) = 2$, $\sigma = 1$.
2. $\dim V = 3$, entonces V es de TGA. Si $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC las posibilidades son:
   (a) $N(q_{11}) = N(q_{22}) = 2$, $N(q_{33}) = 6$
   (b) $N(q_{11}) = 2$, $N(q_{22}) = 3$, $N(q_{33}) = 4$.

   Si $\mathfrak{B}(V)$ no es un ELC, re-indexando la base si fuera necesario, podríamos suponer $q_{12}q_{21} \neq 1$. Luego por 4.1.2 $\dim \mathfrak{B}(\operatorname{span}\{x_1, x_2\}) \geq 8$. Si tuviéramos $q_{13}q_{31} \neq 1$ ó $q_{23}q_{32} \neq 1$ entonces
   $$\dim \mathfrak{B}(\operatorname{span}\{x_1, x_2\}) \times \dim \mathfrak{B}(\mathbf{k}x_3) < 24,$$
   pero por 3.4.1 parte 2 este número dividiría 24, lo que contradiría el hecho de que $\dim \mathfrak{B}(\operatorname{span}\{x_1, x_2\}) \geq 8$. Luego $q_{13}q_{31} = q_{23}q_{32} = 1$, y $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC generalizado. Tomando $V_1 = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$ y $V_2 = \mathbf{k}x_3$, las posibilidades son:
   (c) $N(q_{11}) = N(q_{22}) = 2$, $N(q_{12}q_{21}) = 3$ (entonces $\mathfrak{B}(V_1)$ es de tipo A_2 con dimensión 12), y $N(q_{33}) = 2$,
   (d) $N(q_{11}) = 2$, $N(q_{22}) = 3$, $q_{12}q_{21}q_{22} = 1$ (luego $\mathfrak{B}(V_1)$ es de tipo A_2 con dimensión 12), y $N(q_{33}) = 2$,
   (e) $N(q_{11}) = N(q_{22}) = 2$, $N(q_{12}q_{21}) = 2$ (entonces $\mathfrak{B}(V_1)$ es de tipo A_2 con dimensión 8), y $N(q_{33}) = 3$.
3. $\dim V = 2$. Las posibilidades son:
   (a) $\mathfrak{B}(V)$ un ELC con $N(q_{11}) = 2$, $N(q_{22}) = 12$,
   (b) $\mathfrak{B}(V)$ un ELC con $N(q_{11}) = 3$, $N(q_{22}) = 8$,
   (c) $\mathfrak{B}(V)$ un ELC con $N(q_{11}) = 4$, $N(q_{22}) = 6$,
   (d) $\mathfrak{B}(V)$ de tipo A_2 con $N(q_{11}) = N(q_{22}) = 2$ y $N(q_{12}q_{21}) = 6$,
   (e) $\mathfrak{B}(V)$ de tipo A_2 con $N(q_{11}) = 2$, $N(q_{22}) = 6$, $q_{12}q_{21}q_{22} = 1$.

   Otros casos de tipo A_2 son imposibles, como es fácil de ver con 4.3.1.
4. $\dim V = 1$ y $\mathfrak{B}(V)$ una LC.

4.7.7. $n = 28$**.** Podemos tener

1. $\dim V = 3$, $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC con $N(q_{11}) = N(q_{22}) = 2$, $N(q_{33}) = 7$.

2. $\dim V = 2$ y por 4.3.1 tenemos las siguientes posibilidades:
   (a) $\mathfrak{B}(V)$ un ELC con $N(q_{11}) = 2$ y $N(q_{22}) = 14$,
   (b) $\mathfrak{B}(V)$ un ELC con $N(q_{11}) = 4$ y $N(q_{22}) = 7$,
   (c) $\mathfrak{B}(V)$ de tipo A_2 con $N(q_{11}) = 2$, $N(q_{22}) = 7$ y $q_{12}q_{21}q_{22} = 1$,
   (d) $\mathfrak{B}(V)$ de tipo A_2 con $N(q_{11}) = N(q_{22}) = 2$ y $N(q_{12}q_{21}) = 7$.
3. $\dim V = 1$ y $\mathfrak{B}(V)$ una LC.

4.7.8. $n = 30$**.** Podemos tener

1. $\dim V = 3$, entonces $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC con $N(q_{11}) = 2$, $N(q_{22}) = 3$, y $N(q_{33}) = 5$.
2. $\dim V = 2$, entonces $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC porque si no caería en uno de los siguientes casos:
   - $\mathfrak{B}(V)$ de tipo A_2, $N(q_{11}) = 2$, $N(q_{22}) = 3$, pero entonces $q_{12}q_{21}q_{22} = 1$ y $\dim \mathfrak{B}(V) = 12$,
   - $\mathfrak{B}(V)$ de tipo A_2, $N(q_{11}) = 2$, $N(q_{22}) = 5$, pero entonces $q_{12}q_{21}q_{22} = 1$ y $\dim \mathfrak{B}(V) = 20$,
   - $\mathfrak{B}(V)$ de tipo A_2, $N(q_{11}) = 3$, $N(q_{22}) = 5$, pero entonces $q_{11}q_{12}q_{21} = 1$ y $q_{22}q_{12}q_{21} = 1$, lo que es imposible,

   Luego tenemos sólo las siguientes posibilidades:
   (a) $\mathfrak{B}(V)$ un ELC con $N(q_{11}) = 2$ y $N(q_{22}) = 15$,
   (b) $\mathfrak{B}(V)$ un ELC con $N(q_{11}) = 3$ y $N(q_{22}) = 10$,
   (c) $\mathfrak{B}(V)$ un ELC con $N(q_{11}) = 5$ y $N(q_{22}) = 6$.
3. $\dim V = 1$ y $\mathfrak{B}(V)$ una LC.

4.7.9. Conclusión. Los resultados precedentes se pueden resumir en la siguiente tabla.

Tipo	Dimensiones
ELC, rango 1	Todas las dimensiones
ELC, rango 2	$\dim \neq p$
ELC, rango 3	8, 12, 16, 18, 20, 24, 27, 28, 30
ELC, rango 4	16, 24
A_2	8, 12, 16, 20, 27, 28
$A_2 \times A_1$	16, 24
$V_{3,-1}$	12
$V_{3,-1} \times A_1$	24

4.8. Un resultado negativo

El siguiente resultado prueba que los módulos $M(g,\rho)$ que hay que tener en cuenta para encontar álgebras de Nichols de dimensión finita son esencialmente aquéllas en las que ρ es un carácter.

4.8.1. Lema. *Sea Γ un grupo finito, $g \in \Gamma$ y $\rho \in \widehat{\Gamma_g}$ una representación irreducible de Γ_g. Sea $q = \rho(g)$ (como se observó en* (3.1.1) *es un escalar) y sea $N = N(q)$. Sea $V = M(g,\rho)$ y supongamos que V es de rango de Nichols finito. Se tiene*

1. *si* $\deg \rho \geq 3$ *entonces $N = 2$ (i.e. $q = -1$);*
2. *si* $\deg \rho = 2$ *entonces $2 \leq N \leq 3$ (i.e. $q = -1$ o es una raíz cúbica de la unidad).*

Prueba. Sea W el espacio de representación de ρ. Para $x \in W$ denotamos también por x el elemento $1 \otimes x \in \operatorname{Ind}_{\Gamma_g}^{\Gamma} W = V$. Sea $\{x_1, \dots, x_d\}$ una base de W. Por 4.2.3 se tiene $c(x_i \otimes x_j) = q x_j \otimes x_i$. Tenemos una inclusión $\mathfrak{B}(W) \hookrightarrow \mathfrak{B}(V)$ (de hecho, $\mathfrak{B}(V)$ es libre como $\mathfrak{B}(W)$-módulo a derecha por 3.4.1 parte 1) y luego $\mathfrak{B}(W)$ es de dimensión finita. Ahora, la trenza restringida a W es de tipo Cartan, con matriz (q_{ij}), donde $q_{ij} = q \ \forall i,j$. Luego, la matriz de Cartan de esta trenza tiene 2 en la diagonal y $2 - N$ afuera de la diagonal. Por resultados de Lusztig que aparecen en [**ASa**, Thm. 3.1], esta matriz debe corresponder a un dato finito, y la condición sobre N es inmediata. $\square$

CAPíTULO 5

Resultados de clasificación de álgebras de Hopf punteadas

Como se dijo anteriormente, las álgebras de Nichols $\mathfrak{B}(V)$ con $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$, Γ un grupo finito, están estrechamente vinculadas con las álgebras de Hopf punteadas con corradical $\mathbf{k}\Gamma$. La vinculación la da el "procedimiento del levante", que es una herramienta para clasificar álgebras de Hopf punteadas. Este procedimiento fue propuesto en [**AS98b**], y haremos aquí una transcripción.

Sea A un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita. Sea $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ su filtración corradical, y considérese

$$H = \oplus_i H(i) = \operatorname{gr} A = \oplus_i (A_i/A_{i-1}) \quad (A_{-1} = 0).$$

Esta es un álgebra de Hopf corradicalmente graduada, es decir, verifica 2.3.21. Para probar que es un álgebra (es decir, que la filtración corradical es una filtración de álgebras, $A_iA_j \subset A_{i+j}$) se usa que A_0 es una subálgebra. Para probar que H es de Hopf se usa que A_0 es de Hopf. Este procedimiento se puede extender a álgebras de Hopf cuyo corradical es una subálgebra. Tómese $R = H^{\operatorname{co} H(0)}$. Esta es un álgebra de Hopf corradicalmente graduada en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$, donde $\Gamma = G(A)$ es el grupo de group-likes de A. Más aun, $R(0) = \mathbf{k}$ y, como A es de dimensión finita, $R(1)$ es de dimensión finita y por lo tanto rígido en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$. Ergo, R verifica las condiciones (2.3.4), (2.3.5) y (2.3.7). Si se puede probar que R satisface (2.3.6) entonces estaremos en presencia de un álgebra de Nichols en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$, y tenemos los resultados de los capítulos anteriores sobre su estructura. Nótese que por el teorema de Nichols–Zoeller el orden de Γ divide $\dim A$.

El procedimiento del levante va en el sentido contrario. Si se quiere clasificar las álgebras de Hopf punteadas de dimensión n se puede proceder como sigue: para cada grupo Γ cuyo orden divide n:

1. Determínense los módulos $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ tales que $\dim \mathfrak{B}(V) \leq \dfrac{n}{|\Gamma|}$.
2. Clasifíquense las clases de isomorfismo de las bosonizaciones $\mathfrak{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma$, donde V recorre los módulos del paso 1. Nótese que dos bosonizaciones $\mathfrak{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma$ y $\mathfrak{B}(V')\#\mathbf{k}\Gamma$ pueden ser isomorfas aun cuando $\mathfrak{B}(V)$ y $\mathfrak{B}(V')$ (y en particular, V y V') no lo sean (ver 5.2.1).

3. Para cada clase de isomorfismo $\mathfrak{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma$ del paso 2, clasifíquense todos los levantamientos, i.e. todas las álgebras de Hopf punteadas, módulo isomorfismo, tales que $\operatorname{gr} A = \mathfrak{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma$.
4. Pruébese, de ser posible, que estas son todas las álgebras de Hopf punteadas de dimensión n. De manera equivalente, muéstrese que un álgebra de Hopf punteada R en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ tal que $\dim R = n/|\Gamma|$ y que satisface (2.3.4), (2.3.5) y (2.3.7) también satisface (2.3.6). Para esto es útil haber clasificado los V en el paso 1 tales que $\dim \mathfrak{B}(V) < n/|\Gamma|$.

En los capítulos anteriores nos concentramos en el paso 1 de este procedimiento, que a pesar de ser fácil de escribir suele ser el más complicado. Por un lado vimos la estructura de los módulos simples en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ cuando Γ es un grupo finito, lo que permite calcular todos los módulos en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$. Por el otro, calculamos la estructura de $\mathfrak{B}(V)$ para gran cantidad de módulos de Yetter–Drinfeld V, y vimos técnicas que pueden ayudar en este cálculo en los casos no cubiertos.

Es de destacarse que las cotas encontradas para las dimensiones de álgebras de Nichols ayudan a encarar el problema de otra manera: dado un grupo Γ y n un múltiplo de su orden, para clasificar las álgebras de Hopf punteadas de dimensión n con corradical $\mathbf{k}\Gamma$ pueden clasificarse primero las álgebras de Nichols de dimensión $n/|\Gamma|$ (cosa que se hizo para varias dimensiones), y luego determinar cuáles de estas álgebras tienen en su grado 1 un módulo que sea un objeto en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$. Esta es la manera en que se clasifican las álgebras de Hopf punteadas corradicalmente graduadas de dimensión p^5 en 5.4. El orden propuesto (primero el cálculo de los módulos y después el de las álgebras de Nichols) es el que se sigue en 5.5 para clasificar las álgebras de Hopf punteadas de dimensión 32.

Como veremos en lo que sigue, tanto el paso 2 como el paso 4 son en general tediosos pero sencillos (está abierto aún el problema de si un álgebra cuya dimensión es finita y no divisible por la característica del cuerpo, que satisface (2.3.4), (2.3.5) y (2.3.7) satisface también (2.3.6). Dualmente, si un álgebra cuya dimensión es finita y no divisible por la característica del cuerpo, que satisface (2.3.4)-(2.3.6), satisface también (2.3.7)). El paso 3 a veces requiere argumentos ad-hoc, a veces se puede efectuar con técnicas más generales, como recientemente se hizo en [**ASb**].

Será cómoda la siguiente notación:

5.0.2. Definición. Sea A un álgebra de Hopf punteada, $\Gamma = G(A)$ su grupo, $\operatorname{gr} A$ el graduado asociado a la filtración corradical, $R \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ los coinvariantes y $V = R(1)$ los primitivos de R. Notaremos $V = V(A)$ y lo consideraremos a veces como objeto de ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$, a veces como un PTTG.

Una de las consecuencias de 3.4.1 mediante el procedimiento del levante es que un álgebra de Hopf punteada que no es un álgebra de grupo no puede tener cualquier dimensión. Específicamente, tenemos

5.0.3. COROLARIO. *Sea A un álgebra de Hopf punteada de dimensión n y sea $\Gamma = G(A)$. Supongamos que $\mathbf{k}\Gamma \neq A$, y si* $\operatorname{car} \mathbf{k} > 0$*, supongamos que* $\operatorname{car} \mathbf{k}$ *no divide a n. Entonces existe un primo p tal que p divide tanto al orden de Γ como al íncide* $\dim A/|\Gamma|$*. En particular n no puede ser libre de cuadrados.*

PRUEBA. Sencillamente se toman R, V como en el Procedimiento, se descompone $V = \oplus_i M(g_i, \rho_i)$, se pone $q_i = \rho_i(g_i)$, $N_i = N(q_i)$. Tomemos uno de los i, digamos $i = 1$. Vimos que N_i divide $\dim \mathfrak{B}(V)$, que a su vez divide $\dim R = \dim A/|\Gamma|$. Por otra parte, si $q_i = 1$ tenemos un absurdo, porque en ese caso debe ser $\operatorname{car} \mathbf{k} > 0$, $N_i = \operatorname{car} \mathbf{k}$ y supusimos que esto no sucedía. Luego q_1 es una raíz de la unidad cuyo orden N_1 divide el grupo del cual ρ_1 es una reprsentación, esto es, Γ_{g_1}. Esto permite decir que N_1 divide $|\Gamma|$, y hemos terminado. $\square$

5.1. El paso 4

Vamos a concentrarnos en el último paso del procedimiento del levante. Lo haremos con las técnicas de [**AS98b**].

5.1.1. LEMA. *Sea $R \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ un álgebra de Hopf trenzada de dimensión finita que verifica* (2.3.4), (2.3.5) *y* (2.3.7)*. Si* $\operatorname{car} \mathbf{k} > 0$*, supongamos que* $\operatorname{car} \mathbf{k}$ *no divide* $\dim R$*. Sea R' la subálgebra generada por $R(1)$. En los siguientes casos tenemos $R' = R$:*

1. $\dim R(1) = 1$.
2. $\dim R = p^2$.
3. $\dim R = p^3$.
4. $\dim R = p^4$.
5. $R' \simeq \mathfrak{B}(V_{3,-1})$
6. $\dim R < 32$.

PRUEBA. El álgebra R' es de Nichols. Se dualiza la inclusión $R' \hookrightarrow R$ para obtener $R^* \twoheadrightarrow (R')^*$ y se observa que R^* verifica (2.3.4), (2.3.5) y (2.3.6), y que en grado 1 se tiene $R^*(1) = V^*$, donde $V = R(1)$. Por lo tanto se tiene una sucesión

$$T(V^*) \overset{p}{\twoheadrightarrow} S = R^* \twoheadrightarrow S' = (R')^* = \mathfrak{B}(V^*),$$

y tenemos que probar que $\ker p = \ker \mathbf{S} : T(V^*) \to \mathfrak{B}(V^*)$. Por la versión trenzada del teorema de Nichols–Zoeller, $\dim S'$ divide $\dim S$.

Como S es graduada y el morfismo p es graduado, alcanza con ver que para cada grado tenemos la igualdad. Más aun, supongamos que $w \in T^n(V^*)$ verifica que $\mathbf{S}^n(w) = 0$ y supongamos que probamos que $\ker p^n = \ker \mathbf{S}^n$ para $m < n$, donde p^n es la restricción de p a $T^n(V^*)$. Por (2.3.10) para $i + j = n$ tenemos

$$0 = \mathbf{S}^n(w) = \mathbf{S}^{i|j}\mathbf{S}_{i,j}w = (\mathbf{S}^i \otimes \mathbf{S}^j)\Delta_{i,j}w.$$

Gracias a la hipótesis tenemos $\Delta_{i,j}(pw) = (p \otimes p)\Delta_{i,j}w = 0$ si $0 < i, j < n$, con lo que $p(w)$ es un primitivo en S. Si logramos probar, grado por grado, que los únicos primitivos de S están en grado 1, habremos terminado.

1. En este caso, sea x un generador de V^* y q tal que $c(x \otimes x) = qx \otimes x$. Supongamos que $q \neq 1$ es una raíz de la unidad, y sea $N = N(q)$. Por 2.4.5, tenemos $x^N = 0$ tanto en S como en S', por lo que $S = S'$. En el caso de característica positiva y $q = 1$ tenemos un absurdo también por 2.4.5, ya que $\operatorname{car} \mathbf{k} = \dim S' | \dim S = \dim R$.

2. Supongamos $S \neq S'$. Esto dice que $\dim S' = p$, y entonces por 3.4.1 tenemos $\dim V = 1$, pero esto está cubierto por el ítem 1.

3. Al igual que en el ítem anterior, la única posibilidad para que se tenga $S \neq S'$ es $\dim S' = p^2$. Esto dice $\dim V \leq 2$, pero por otra parte $\dim V > 1$, de donde $\dim V = 2$. Luego S' es un ELC, generado por x_1, x_2 con matriz (q_{ij}) y $N(q_{11}) = N(q_{22}) = p$. Más aun, por 2.2.5 $S'(1)$ se puede considerar sobre un grupo abeliano, y a la postre S vive en una categoría de Yetter–Drinfeld sobre un grupo abeliano. Obsérvese que no se puede tener $\operatorname{car} \mathbf{k} = p$, y por lo tanto $q_{11} \neq 1 \neq q_{22}$. Ergo, las relaciones $x_1^p = x_2^p = 0$ también valen en S. La única relación que falta corroborar es $z = x_1x_2 - q_{12}x_2x_1 = 0$. Hay un argumento canónico para esto, que se encuentra en [**AS98b**], y es observar que z es primitivo, considerar la filtración corradical de S' y tomar T el graduado asociado. Se tiene entonces $x_1, x_2, z \in T(1)$ y son linealmente independientes, y se calcula entonces la matriz de la trenza entre ellos, que es

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{11}q_{12} \\ q_{21} & q_{22} & q_{21}q_{22} \\ q_{11}q_{21} & q_{12}q_{22} & q_{11}q_{12}q_{21}q_{22} \end{pmatrix}, \tag{5.1.2}$$

pero tenemos ahora $T \twoheadrightarrow \mathfrak{B}(T(1))$, y debemos tener entonces $\dim \mathfrak{B}(T(1)) = p^i$ con $i = 1, 2, 3$. Entonces, mirando la matriz, vemos que debemos tener un ELC, pero esto significa $q_{11} = q_{22} = -1$, y a su vez esto implica que $c(z \otimes z) = z \otimes z$. Esto es una contradicción, ya que en característica 0 tendríamos $\dim T = \infty$ y en característica positiva debemos tener $\operatorname{car}\mathbf{k} = N$, y esto dice $N|\dim T$, que supusimos que no sucedía.

4. Por los casos anteriores sabemos que $\dim S' > p$. Si $\dim S' = p^2$, tenemos $\dim V = 2$ (si $\dim V = 1$ ya está) y S' es un ELC. Tenemos entonces una matriz como la de (5.1.2), y distinguimos dos casos: $p = 2$ (que implica $q_{11} = q_{22} = -1$, pero entonces $c(z \otimes z) = z \otimes z$, que es un absurdo razonando como antes) y $p > 2$. En este caso observamos primero que, al igual que con $p = 2$, debemos tener $q_{11}q_{22} \neq 1$, y miramos ahora el submódulo generado por x_2, z. Se ve que para que sea de tipo finito hay dos posibilidades:

- o bien $q_{22}^3 = 1$ (o sea $p = 3$), pero entonces usando 4.3.1, tendríamos que es de tipo B_2, (ya que $q_{11}q_{22} \neq q_{22}$). Entonces esta subálgebra tendría dimensión 3^4 y por 2.5.1 sería $\dim S > 3^5$, absurdo, o
- $q_{22}^3 q_{11} = 1$, $p > 3$, con lo cual la dimensión es mucho mayor: si $p = 5$ quedaría un álgebra de tipo G_2, que si bien no demostramos en 4.3.1 que su dimensión sea p^6, sí demostramos que es $\geq p^5$, llevando a una contradicción. Si $p > 5$ la situación es aun más clara, ya que también por 4.3.1 tendremos dimensión $\geq p^p$. En ambos casos todavía faltaría considerar x_1, con lo que se tendría por 2.5.1 $\dim S > p^6$.

Obsérvese, ya que estamos, que estas matrices son de tipo Cartan en el sentido de [**ASa**] y su matriz de Cartan correspondiente no es finita, con lo que se puede probar que estas álgebras son de dimensión infinita.

Tenemos que considerar entonces $\dim S' = p^3$. Por otra parte, si $\dim V = 3$ necesariamente S' es un ELC con $N_1 = N_2 = N_3 = p$, pero esto se trata igual que en el ítem anterior, repitiendo el argumento 3 veces (una por cada subconjunto de cardinal 2 de $\{x_1, x_2, x_3\}$). Si $\dim V = 1$ ya lo vimos en el primer ítem, así que sólo resta considerar $\dim V = 2$. Hay dos posibilidades: S' puede ser un ELC con $N_1 = p$, $N_2 = p^2$ o S' puede ser de tipo A_2. En el primer caso se considera la misma matriz que en (5.1.2) y se observa que como $q_{11}q_{22}$ es el producto de dos raíces de órdenes p y p^2 respectivamente, tiene orden p^2, lo que indica que por 2.5.1 tendremos $\dim S \geq p^5$, que es un absurdo. En el caso de tipo A_2, como se explicó al comienzo de la prueba, vamos grado por grado. Dividimos de nuevo el problema en dos casos: $p = 2$ y $p > 2$.

- Si $p = 2$, mirando 4.3.1 tendremos $q_{12}q_{21} = -1$, pero esto implica que si $z = \operatorname{Ad}_{x_2}(x_1) = x_2x_1 - q_{21}x_1x_2$ entonces z^2 es un primitivo y si fuese $z^2 \neq 0$ se tendría $c(z^2 \otimes z^2) = z^2 \otimes z^2$, lo cual, como de costumbre, es contradictorio. Las otras relaciones salen trivialmente del hecho de que $x_1^2 = x_2^2 = 0$, siempre usando como argumento 2.4.5.

- Si $p > 2$, observamos primero que debemos tener por 4.3.1 que $q_{11} = q_{22}$ y $q_{11}q_{12}q_{21} = 1$. Tomamos entonces como recién $z = \mathrm{Ad}_{x_2}(x_1)$ y tenemos que probar que se cumplen las relaciones dadas en 4.3.1, que son

$$zx_1 - q_{11}q_{21}x_1z = 0 \tag{5.1.3}$$

$$z_2 = \mathrm{Ad}^2_{x_2}(x_1) = x_2^2x_1 - (2)_{q_{22}}\, q_{21}x_2x_1x_2 + q_{21}^2q_{22}x_1x_2^2 = 0 \tag{5.1.4}$$

$$z^p = 0 \tag{5.1.5}$$

Las dos primeras ecuaciones son de grado 3, y se las puede tratar de manera independiente. Para la primera armamos como de costumbre la matriz correspondiente a $\{x_1, x_2, zx_1 - q_{11}q_{21}x_1z\}$, que es

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{11}^2q_{12} \\ q_{21} & q_{22} & q_{21}^2q_{22} \\ q_{11}^2q_{21} & q_{12}^2q_{22} & q_{11}^4q_{12}^2q_{21}^2q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{11}^2q_{12} \\ q_{21} & q_{22} & q_{21}^2q_{22} \\ q_{11}^2q_{21} & q_{12}^2q_{22} & q_{11}^3 \end{pmatrix}.$$

Si $p = 3$ terminamos. Si $p > 3$ observamos que entre x_1 y $zx_1 - q_{11}q_{21}x_1z$ se forma, gracias a 4.3.1, un álgebra de Nichols de dimensión $\geq p^5$, y en consecuencia $\dim S > p^6$, que es absurdo (en rigor, por los resultados de [**ASa**] se forma un álgebra de Nichols de dimensión infinita).

Vamos ahora a (5.1.4). Si tomamos la matriz dada por $\{x_1, x_2, z_2\}$ tendremos una matriz prácticamente igual a la anterior, por lo que también hemos terminado.

Nos queda (5.1.5), pero que esta ecuación se verifica en S' es consecuencia directa de 2.4.5.

5. Simplemente, se nota que $\ker \mathbf{S}$ está generado por

$$\{x_0^2,\ x_1^2,\ x_2^2,\ x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0,\ x_0x_2 + x_1x_0 + x_2x_1\}.$$

Si z es uno de estos elementos entonces z es primitivo en S y $c(z \otimes z) = z \otimes z$, de donde $z = 0$.

6. Tenemos $\dim S < 16$. Por los resultados anteriores, si excluimos $V = V_{3,-1}$ que acabamos de ver, tendremos que V es de TGA. Como $r(16) = 4$, resulta $\dim V < 4$. Si $\dim V = 1$ ya lo probamos. Si $\dim V = 3$, por 3.4.1 parte 2 es S un ELC con $N_1 = N_2 = N_3 = 2$ ó $N_1 = N_2 = 2$, $N_3 = 3$. Sean entonces $z_{ij} = x_ix_j - q_{ij}x_jx_i$ para $i \neq j$. Queremos probar que $z_{ij} = 0$. Igual que antes, $c(z_{12} \otimes z_{12}) = z_{12} \otimes z_{12}$ y esto prueba que $z_{12} = 0$. En el caso $N_3 = 2$ el mismo argumento sirve para z_{13} y z_{23}. En el caso $N_3 = 3$ tenemos que el orden de nilpotencia de z_{13} y z_{23} es 6, a menos que sean 0. Luego, suponer $z_{13} \neq 0$ ó $z_{23} \neq 0$ lleva a la contradicción $\dim S \geq 72$. Podemos suponer entonces que $\dim V = 2$. Tenemos las siguientes posibilidades, mirando 4.3.1:

1. $q_{11} = q_{22} = -1$, $q_{12}q_{21} = 1$.
2. $q_{11} = q_{22} = -1$, $q_{12}q_{21} \neq 1$, $N(q_{12}q_{21}) \leq 3$.
3. $q_{11} = -1$, $q_{22} \neq -1$, $q_{12}q_{21} = 1$, $N_2 \leq 7$.
4. $q_{11} = -1$, $N_2 = 3$, $q_{12}q_{21}q_{22} = 1$.
5. $N_1 > 2$, $N_2 > 2$, $N_1N_2 < 16$, $q_{12}q_{21} = 1$.

En los casos 1, 3, 5, tenemos ELCs y luego sólo debemos mirar los elementos $z = \mathrm{Ad}_{x_1}(x_2) = x_1x_2 - q_{12}x_2x_1$. La matriz de la trenza (q'_{ij}) para el espacio W' con base $\{x_1, x_2, z\}$ es

$$(q'_{ij}) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{11}q_{12} \\ q_{21} & q_{22} & q_{21}q_{22} \\ q_{11}q_{21} & q_{12}q_{22} & q_{11}q_{12}q_{21}q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{11}q_{12} \\ q_{21} & q_{22} & q_{21}q_{22} \\ q_{11}q_{21} & q_{12}q_{22} & q_{11}q_{22} \end{pmatrix}.$$

En el caso 1 llegamos como siempre a un absurdo por 3.4.1 parte 1, ya que $q_{11}q_{22} = 1$. En el caso 5, si N_1 es coprimo con N_2, tendremos que q'_{33} tiene orden N_1N_2, por lo que $\dim \mathfrak{B}(W') \geq (N_1N_2)^2 \geq 144$. Si N_1 no es coprimo con N_2, tendremos $N_1 = N_2 = 3$. Si $q_{11} \neq q_{22}$ entonces $q'_{33} = 1$, de donde llegamos a un absurdo por 3.4.1. Si $q_{11} = q_{22}$ entonces la trenza es de tipo Cartan, con matriz asociada

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

por lo que $\mathfrak{B}(W')$ es de dimensión infinita. En el caso 3, tomamos el subespacio generado por $\{\bar{x_2}, \bar{z}\}$ y notamos que la trenza es de tipo Cartan, con matriz asociada

$$\begin{pmatrix} 2 & 2-N_2 \\ r & 2 \end{pmatrix},$$

con $r = -4, -2, -8, -1, -12$ para $N_2 = 3, 4, 5, 6, 7$ respectivamente. Vemos que en todos los casos tenemos $\dim \mathfrak{B}(W) \geq 2 \dim \mathfrak{B}(W') = \infty$.

En los casos 2 y 4, tomamos $z_1 = \mathrm{Ad}_{x_2}(x_1) = x_2x_1 - q_{21}x_1x_2$. En el caso 2, en S se verifica tautológicamente la relación $z_2 = \mathrm{Ad}_{x_2}(z_1) = x_2z_1 - q_{21}q_{22}z_1x_2 = 0$. Sólo necesitamos probar que $z_1^N = 0$ con $N = N(q_{12}q_{21})$, pero esto es inmediato ya que por los argumentos de arriba tenemos $z_1^N \in S_1$, y tomando $\overline{z_1^N} \in T$ tenemos $c(\overline{z_1^N} \otimes \overline{z_1^N}) = \overline{z_1^N} \otimes \overline{z_1^N}$, por lo que llegamos al absurdo de siempre. En caso 4 tomamos los elementos $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{z_2}\}$ y notamos que la trenza tiene matriz dada por

$$(q'_{ij}) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{11}q_{12}^2 \\ q_{21} & q_{22} & q_{21}q_{22}^2 \\ q_{11}q_{21}^2 & q_{12}q_{22}^2 & q_{11}q_{12}^2q_{21}^2q_{22}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{11}q_{12}^2 \\ q_{21} & q_{22} & q_{21}q_{22}^2 \\ q_{11}q_{21}^2 & q_{12}q_{22}^2 & q_{11}q_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, por 2.5.1, si $z_2 \neq 0$ entonces $\dim S \geq 36$, con lo que $z_2 = 0$, y luego $S(m) = \mathfrak{B}^m(V)$ para $m \leq 3$. Como $\ker \mathbf{S}$ está generado por $\{x_1^2, x_2^3, z_2, z_1^2\}$, lo único que queda probar es que en S tenemos $z_1^2 = 0$. Como $c(z_1^2 \otimes z_1^2) = z_1^2 \otimes z_1^2$, 3.4.1 parte 1 termina la prueba. ☐

5.1.6. Lema. *Sea A un álgebra de Hopf punteada, $H = \operatorname{gr} A$ su graduado asociado y Γ su grupo de group-likes. Construimos $R \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ como en el procedimiento del levante, y denotamos $V = V(A) = R(1)$. Tenemos $V = (H(1))^{\mathrm{co}H(0)}$, $H(1) = V\#\mathbf{k}\Gamma$. Tomamos en $H(1)$ la acción de Γ dada por*

$$g \cdot (v\#h) = (g \rightharpoonup v)\#ghg^{-1}$$

Consideremos en A la acción adjunta de Γ. Esta acción se restringe a la filtración corradical y por lo tanto A_0, A_1 son Γ-módulos. Sea $p_0 : A_1 \to H(1) = A_1/A_0$ la proyección canónica. Entonces

1. *p_0 es un morfismo de $\mathbf{k}\Gamma$-módulos.*
2. *Sea $\lambda \in \mathbf{k}^\Gamma$, $\lambda(g) = \delta_{g,1}$. Entonces $p = (\mathrm{id}\#\lambda) \circ p_0 : A_1 \to V$ es un morfismo de $\mathbf{k}\Gamma$-módulos.*
3. *p tiene una sección de $\mathbf{k}\Gamma$-módulos $s : V \to A_1$ tal que si $\delta(x) = g \otimes x$ entonces $s(x) \in \mathcal{P}_{g,1}(A)$.*

Prueba. Los items 1 y 2 son sencillos si se mira la definición de la acción $\rightharpoonup$. Probamos entonces 3. Para $g, h \in \Gamma$, sean $\mathcal{P}'_{g,h}(A) \subset A_1$ subespacios tales que $\mathcal{P}_{g,h}(A) = \mathbf{k}(g-h) \oplus \mathcal{P}'_{g,h}(A)$. Entonces, por el teorema de Taft–Wilson, tenemos

$$A_1 = \mathbf{k}\Gamma \oplus (\bigoplus_{g,h\in\Gamma} \mathcal{P}'_{g,h}(A)).$$

Esto da lugar a una sucesión exacta de espacios vectoriales

$$0 \to \mathbf{k}\Gamma = A_0 \to A_1 \to V\#\mathbf{k}\Gamma \to 0.$$

Consideremos ahora la inclusión

$$i : \oplus_{g\in\Gamma}\mathcal{P}'_{g,1}(A) \hookrightarrow A_1.$$

Es fácil verificar que la composición $p \circ i$ es un isomorfismo de espacios vectoriales (aclaremos que $\oplus_{g\in\Gamma}\mathcal{P}'_{g,1}(A)$ no es necesariamente un $\mathbf{k}\Gamma$-submódulo de A_1). Sea

$s_0 : V \to \oplus_{g\in\Gamma}\mathcal{P}'_{g,1}(A)$, $s_0 = (p \circ i)^{-1}$, y consideremos como en el teorema de Maschke

$$s : V \to A_1, \quad s = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{h\in\Gamma}(h \cdot s_0), \text{ i.e. } s(x) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{h\in\Gamma} h \cdot (s_0(h^{-1} \rightharpoonup x)).$$

Es claro que s es una $\mathbf{k}\Gamma$ sección de p.

Sea $V^g = \{x \in V \mid \delta(x) = g \otimes x\}$; entonces $V = \oplus_{g\in\Gamma}V^g$. Sea además $a \in \mathcal{P}'_{g,1}(A)$. Se tiene $\Delta a = g\otimes a + a\otimes 1$, y si $b = a + \mathbf{k}\Gamma \in A_1/A_0$ es la imagen de a por $A_1 \to A_1/A_0$, tenemos $\Delta b = g\otimes b + b\otimes 1$. Luego $b \in (V\#\mathbf{k}\Gamma)^{\mathrm{co}H(0)}$, de donde $b = v\#1$ para algún $v \in V$ tal que $\Delta(v\#1) = g\otimes(v\#1) + (v\#1)\otimes 1$. Esto implica que $\delta(v) = g \otimes v$, y entonces $v = (\mathrm{id}\#\lambda)(v\#1) \in V^g$. Luego $p(\mathcal{P}'_{g,1}(A)) \subseteq V^g$ para todo $g \in \Gamma$. Ahora, como $p \circ i : \oplus_{g\in\Gamma}\mathcal{P}'_{g,1}(A) \to \oplus_{g\in\Gamma}V^g$ es un isomorfismo, debemos tener que $p \circ i|_{\mathcal{P}'_{g,1}(A)} : \mathcal{P}'_{g,1}(A) \to V^g$ es un isomorfismo, por lo que $s_0(V^g) = \mathcal{P}'_{g,1}(A)$ para todo $g \in \Gamma$.

Sea ahora $x \in V^g$. Afirmamos que $s(x) \in \mathcal{P}_{g,1}(A)$. En efecto, por la definición de s, se tiene

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{h\in\Gamma} h \cdot s_0(h^{-1} \rightharpoonup x) \in \sum_{h\in\Gamma} h \cdot s_0(V^{h^{-1}gh}) = \sum_{h\in\Gamma} h \cdot \mathcal{P}'_{h^{-1}gh,1}(A) \\ &\subseteq \sum_{h\in\Gamma} h \cdot \mathcal{P}_{h^{-1}gh,1}(A) = \sum_{h\in\Gamma}\mathcal{P}_{g,1}(A) = \mathcal{P}_{g,1}(A). \end{aligned}$$

□

El lema anterior se va a usar como sigue:

5.1.7. Táctica. Si V tiene base $\{x_1, \dots, x_\theta\}$ tal que $x_i \in V^{g_i}$, el lema nos permite considerar $a_1, \dots, a_\theta$ tales que $a_i \in \mathcal{P}_{g_i,1}(A)$, la proyección $A_1 \to A_1/A_0$ manda a_i a $(x_i\#1) \in V\#\mathbf{k}\Gamma$, y si $g \in \Gamma$ actúa en V por una matriz T en la base $\{x_1, \dots, x_\theta\}$, entonces g actúa en el subespacio con base $\{a_1, \dots, a_\theta\}$ por la misma matriz. Más aun, como V genera $\mathfrak{B}(V)$, los a_i junto con Γ generan A. En general supóngase que $\sum_i(\alpha_i x_{s(i,1)} \cdots x_{s(i,n)}) = 0 \in \mathfrak{B}^n(V)$. Entonces $b = \sum_i(\alpha_i a_{s(i,1)} \cdots a_{s(i,n)}) \in A$ cae en el núcleo de la proyección, i.e. $b \in A_{n-1}$. A menudo tendremos $b \in \mathcal{P}_{g,1}(A)$ para algún $g \in \Gamma$, con lo que b caerá en A_1.

Como observación sencilla y a la vez útil tenemos

5.1.8. Observación. Sea A un álgebra de Hopf de dimensión finita tal que $\operatorname{car}\mathbf{k}$ no divide $\dim A$. Sea $g \in G(A)$ y $a \in \mathcal{P}_{g,1}(A)$ tal que $ga = qag$. Sea $N = N(q)$. Entonces, por las mismas cuentas que en 2.4.1, $a^N \in \mathcal{P}_{g^N,1}(A)$. Si $g^n = 1$ tendremos $a^n = 0$, porque si no a generaría una subálgebra de dimensión una potencia de $\operatorname{car}\mathbf{k}$ (si ésta es positiva) o ∞ (si $\operatorname{car}\mathbf{k} = 0$), lo que es una contradicción.

Si levantamos un ELC, tendremos en general $a_i \in \mathcal{P}_{g_i,1}(A)$ y $g_i a_j g_i^{-1} = q_{ij} a_j$. Si $i \neq j$, $q_{ij}q_{ji} = 1$ y $g_i g_j = g_j g_i$. Por 5.1.7 ya sabemos que $a_i a_j - q_{ij} a_j a_i \in A_1$, pero más precisamente, tenemos

$$\begin{aligned}\Delta(a_i a_j - q_{ij} a_j a_i) &= g_i g_j \otimes a_i a_j + g_i a_j \otimes a_i + a_i g_j \otimes a_j + a_i a_j \otimes 1 \\ &\quad - q_{ij} g_j g_i \otimes a_j a_i - q_{ij} a_j g_i \otimes a_i - q_{ij} g_j a_i \otimes a_j - q_{ij} a_j a_i \otimes 1 \\ &= g_i g_j \otimes (a_i a_j - q_{ij} a_j a_i) + (a_i a_j - q_{ij} a_j a_i) \otimes 1,\end{aligned}$$

de donde $a_i a_j - q_{ij} a_j a_i \in \mathcal{P}_{g_i g_j,1}(A)$. Como antes, si $\operatorname{car}\mathbf{k} \nmid \dim A$ y $g_i g_j = 1$, tendremos $a_i a_j - q_{ij} a_j a_i = 0$.

5.2. Bosonizaciones isomorfas

Sean $M \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ y $f \in \operatorname{Aut}(\Gamma)$. Ponemos $(M)^f$ para el módulo de YD con el mismo espacio subyacente que M pero con la estructura dada por

$$h \rightharpoonup^f m = f^{-1}(h) \rightharpoonup m, \quad \delta^f(m) = (f \otimes \mathrm{id})\delta(m).$$

Nótese que $M(g,\rho)^f = M(f(g), \rho \circ f^{-1})$. Para clasificar álgebras no isomorfas, se aplicará el siguiente criterio:

5.2.1. Lema. *Sean $V = \oplus_{i=1}^{n} M(g_i, \rho_i)$ y $V' = \oplus_{i=1}^{n'} M(g'_i, \rho'_i)$, donde ρ_i y ρ'_i son irreducibles. Entonces $\mathfrak{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma \simeq \mathfrak{B}(V')\#\mathbf{k}\Gamma$ si y sólo si $n = n'$ y existen $f \in \operatorname{Aut}(\Gamma)$, $\sigma \in \mathbb{S}_n$ tales que $M(g'_i, \rho'_i) \simeq (M(g_{\sigma(i)}, \rho_{\sigma(i)}))^f$.*

Prueba. Sea $F : \mathfrak{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma \to \mathfrak{B}(V')\#\mathbf{k}\Gamma$ un isomorfismo de álgebras de Hopf. Como F preserva la filtración corradical, se puede restringir a

$$f_0 : (\mathfrak{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma)_0 = \mathbf{k}\Gamma \to (\mathfrak{B}(V')\#\mathbf{k}\Gamma)_0 = \mathbf{k}\Gamma,$$

y en particular a $f : \Gamma \to \Gamma$, que resulta ser un automorfismo de grupos. Por otra parte, al igual que en 5.1.6, Γ actúa por conjugación sobre la filtración corradical, y F se restringe a

$$f_1 : (\mathfrak{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma)_1/\mathbf{k}\Gamma \to (\mathfrak{B}(V')\#\mathbf{k}\Gamma)_1/\mathbf{k}\Gamma,$$

o en otras palabras, $f_1 : V\#\mathbf{k}\Gamma \to V'\#\mathbf{k}\Gamma$. Si $v \in V^g$, o sea $\delta(v) = g \otimes v$, entonces $(v\#1) \in \mathcal{P}_{g,1}(\mathfrak{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma)$, con lo que $F(v\#1) \in \mathcal{P}_{f(g),1}(\mathfrak{B}(V')\#\mathbf{k}\Gamma)$, y además $F(v\#1) \in (\mathfrak{B}(V')\#\mathbf{k}\Gamma)_1$. Luego, $F(v\#1) \in (V'^{f(g)}\#1)\mathbf{k}(f(g)-1)$, y en particular $f_1(v\#1) \in V'^{f(g)}\#1$. Esto prueba que f_1 se puede restringir a $f_1|_V : V \to V'$ y que $\delta(f_1(v)) = (f \otimes \mathrm{id})\delta(v)$.

Por otra parte, $F(g)F(v\#1)F(g^{-1}) = F((g \rightharpoonup v)\#1)$, lo que implica que $f(g) \rightharpoonup f_1(v) = f_1(g \rightharpoonup v)$, y luego $g \rightharpoonup f_1(v) = f_1(f^{-1}(g) \rightharpoonup v)$. Hemos probado entonces que f_1 es un isomorfismo lineal que se convierte en un isomorfismo en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ si sobre V se toma la estructura de V^f, esto es; $f_1 : V^f \to V'$ es un isomorfismo en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$.

Recíprocamente, se nota que si $v, w \in V$ entonces

$$c(v^f \otimes w^f) = f(v_{(-1)}) \rightharpoonup w^f \otimes v = v_{(-1)} \rightharpoonup w \otimes v = c(v \otimes w),$$

por lo que el funtor $(\bullet)^f$ se puede extender a $\mathfrak{B}(V)$, y resulta $(\mathfrak{B}(V))^f = \mathfrak{B}(V^f)$. Esto dice que si $V' \simeq V^f$, se construye un isomorfismo

$$F : \mathfrak{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma \to \mathfrak{B}(V')\#\mathbf{k}\Gamma \text{ por } g \mapsto f(g),\ v \mapsto f_1(v),$$

donde $f_1 : V^f \to V'$ es el isomorfismo. □

5.2.2. Observación. En defensa del argumento del cociente en la demostración anterior, notamos que un automorfismo de $\mathfrak{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma$ no necesariamente es graduado. Si $v \in V^g$ entonces $F(v\#1)$ puede ser $w\#1+(f(g)-1)$. Si $g \rightharpoonup v = qv$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} q(w\#1) + q(f(g) - 1) &= F(g \rightharpoonup v\#1) = F(g)F(v\#1)F(g^{-1}) \\ &= F(g) \rightharpoonup w\#1 + (F(g) - 1), \end{aligned}$$

lo que dice que una condición necesaria para que esto suceda es $q = 1$. En característica 0 y dimensión finita, o si $\operatorname{car}\mathbf{k} \nmid \dim\mathfrak{B}(V) < \infty$, se ve que necesariamente F es graduado. Un contraejemplo a la graduación de F es, entonces, $\Gamma = C_2$ (generado por g), x generador de $M(g, 1)$. Si $\operatorname{car}\mathbf{k} = 0$, $\mathfrak{B}(V) \simeq \mathbf{k}[x]$, si $\operatorname{car}\mathbf{k} = p > 0$ entonces $\mathfrak{B}(V) \simeq \mathbf{k}[x]/(x^p)$. En cualquier caso, se puede tomar $F(g) = g$, $F(x) = x + g - 1$.

5.3. Índice p y p^2

El lema 4.6.1 permite clasificar las álgebras de Hopf punteadas con índice p y p^2. La siguiente proposición es una generalización de [**Dăs99**] y [**ASa**, Prop. 7.5].

5.3.1. Proposición. *Sea A un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita, sea $\Gamma = G(A)$ su grupo de group-likes y sea $[A : \Gamma]$ el índice de Γ en A.*

1. *Si $[A : \Gamma] = p$ es un primo entonces existe $g \in Z(\Gamma)$, $\chi \in \widehat{\Gamma}$ un carácter y $\lambda \in \{0, 1\}$ tal que*
   - *$\chi(g)$ es una raíz p-ésima primitiva de 1,*
   - *$\lambda = 0$ si $\chi^p \neq 1$ ó $g^p = 1$,*

y el álgebra A es isomorfa al álgebra generada por Γ más un elemento x con relaciones

$$x^p = \lambda(g^p - 1),$$
$$hx = \chi(h)xh.$$

La estructura de coálgebra está dada por $\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1$.

2. *Si $[A : \Gamma] = p^2$ es un primo al cuadrado, entonces*
   (a) *la situación es la misma que en el caso $[A : \Gamma] = p$, reemplazando p por p^2, o*
   (b) *existen dos elementos $g_1, g_2 \in Z(\Gamma)$, dos caracteres $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{\Gamma}$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{k}$ tales que*
      - *$\chi_i(g_i)$ son raíces p-ésimas primitivas de 1,*
      - *$\chi_1(g_2)\chi_2(g_1) = 1$*
      - *$\lambda_i = 0 \quad (i = 1, 2)$ si $\chi_i^p \neq 1$ ó $g_i^p = 1$,*
      - *$\lambda_3 = 0$ si $\chi_1\chi_2 \neq 1$ ó $g_1g_2 = 1$,*

      y A es isomorfa al álgebra generada por Γ más dos elementos x_1, x_2 con relaciones

$$x_i^p = \lambda_i(g_i^p - 1), i = 1, 2; \quad x_1x_2 - \chi_2(g_1)x_2x_1 = \lambda_3(g_1g_2 - 1);$$
$$hx_i = \chi_i(h)x_ih.$$

      La estructura de coálgebra está dada por

$$\Delta(x_i) = g_i \otimes x_i + x_i \otimes 1,$$

   (c) *$p = 2$, hay un elemento $g \in Z(\Gamma)$ y $\rho \in \widehat{\Gamma}$ una representación irreducible de grado 2 tal que $\rho(g) = -\operatorname{id}$; y hay una forma cuadrática G-invariante $\lambda : \operatorname{span}\{x_1, x_2\} \to \mathbf{k}$ tales que $\lambda = 0$ si $g^2 = 1$, y el álgebra A es isomorfa al álgebra generada por Γ más dos elementos x_1, x_2 con relaciones*

$$\left.\begin{array}{l} hxh^{-1} = \rho(h)(x) \\ x^2 = \lambda(x)(g^2 - 1) \end{array}\right\} \text{ para } x \in \operatorname{span}\{x_1, x_2\}.$$

      La estructura de coálgebra está dada por $\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1$, o

   (d) *existe un elemento $g \in Z(\Gamma)$ con $[\Gamma : \Gamma_g] = 2$, y A puede ser presentada como una extensión*

$$\mathbf{k} \to B \to A \to \mathbf{k}(G/H) \to \mathbf{k}, \tag{5.3.2}$$

      donde H es el subgrupo de Γ generado por $\mathcal{O}_g$ y B cae en el caso 2b.

Prueba.

1. Aplicamos el procedimiento del levante y obtenemos R en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ de dimensión p. Gracias al lema 5.1.1 parte 1 tenemos que R es de Nichols, y por lo tanto, por 4.6.1, es $R = \mathbf{k}[y]/(y^p)$ con $0 \neq y \in R(1)$. Como y genera un módulo de dimensión 1 en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$, tenemos necesariamente $g \in Z(\Gamma)$ y $\chi \in \widehat{\Gamma}$ tales que $\operatorname{span}\{y\} = M(g, \chi)$. Aplicamos ahora 5.1.6 y obtenemos $x \in A_1$ tal que $y = \bar{x} \in A_1/A_0 = V\#\mathbf{k}\Gamma$. Por el mismo resultado, tenemos $x^p \in \mathcal{P}_{g^p,1}(A)$ y luego $x^p = \lambda(g^p - 1)$. Si $\lambda \neq 0$ se puede dividir x por $\sqrt[p]{\lambda}$ de manera que podemos suponer $\lambda \in \{0, 1\}$. Si $g^p = 1$ es claro que podemos suponer $\lambda = 0$, y por otra parte aplicamos el lema del diamante:

$$
\begin{aligned}
hx^p &= \chi(h)xhx^{p-1} = \ldots = \chi^p(h)x^p h = \chi^p(h)\lambda(g^p - 1)h,\\
hx^p &= h(g^p - 1) = \lambda(g^p - 1)h.
\end{aligned}
$$

Esto dice que para que no haya más relaciones que las deseadas, debemos tener $\lambda = 0$ si $\chi^p(h) \neq 1$ para algún h. De otra forma, tendríamos una relación en $\mathbf{k}\Gamma$ y $G(A)$ no sería Γ.

2. Tomamos R como recién y R' generado por $R(1)$. Por 5.1.1 parte 2 tenemos $R' = R = \mathfrak{B}(V)$, $V = R(1)$. Por 4.6.1 tenemos dos posibilidades para R: puede tener rango 1 ó 2. En el primer caso se concluye como recién. En el segundo, tenemos R un ELC con $N_1 = N_2 = p$. Por otra parte, V puede ser

1. descomponible como $V = M(g_1, \chi_1) \oplus (g_2, \chi_2)$,
2. $V = M(g, \rho)$ con $g \in Z(\Gamma)$ y $\deg \rho = 2$,
3. $V = M(g, \rho)$ con $[\Gamma : \Gamma_g] = 2$, ρ un carácter.

En el caso 1 se procede como con índice p para x_1 y para x_2; la única diferencia es que ahora $x_1x_2 - \chi_2(g_1)x_2x_1 \in \mathcal{P}_{g_1g_2,1}(A)$, de donde la existencia de λ_3 y la relación correspondiente. Usando el lema del diamante con el monomio hx_1x_2 tenemos la condición sobre λ_3.

En el caso 2 debemos tener, para que $\mathfrak{B}(V)$ sea un ELC de dimensión p^2, $\rho(g) = -\operatorname{id}$. La condición sobre λ de que sea G invariante surge de usar el lema del diamante:

$$
\begin{aligned}
hx^2 &= \rho(h)(x)hx = (\rho(h)(x))^2h = \lambda(\rho(h)(x))h\\
hx^2 &= h\lambda(x) = \lambda(x)h.
\end{aligned}
$$

En el caso 3, por 2.2.5 se tiene la extensión mencionada. $\square$

5.4. Un solo primo

En esta sección nos concentramos en álgebras de Hopf punteadas de dimensión p^n, $p > 2$ un primo. El caso $p = 2, n = 5$ está tratado especialmente en la sección 5.5. En particular calculamos las corradicalmente graduadas de dimensión p^5. Esto es, calculamos las bosonizaciones de álgebras de Nichols de dimensión p^{5-m} en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ donde Γ es un grupo de orden p^m. Al final probamos que para un álgebra de Hopf punteada A de dimensión p^6, $V(A)$ es de TGA si $p > 2$, y lo mismo sucede para p^7 si $p > 3$.

5.4.1. Proposición. *Supongamos* $\operatorname{car}\mathbf{k} \neq p$. *Sea* $A = \oplus_i A(i)$ *un álgebra de Hopf punteada corradicalmente graduada de dimensión* p^5. *Sea* $\Gamma = G(A)$ *su grupo y sea* $V = V(A)$. *Entonces* $A = \mathfrak{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma$ *y* $\mathfrak{B}(V)$ *está en el cuadro que sigue (Denotamos por* $B(\cdot)$ *el grupo de orden* p^4 *en* [**Bur55**, Pág 145]*).*

Grupos y álgebras			
Γ	$\dim \mathfrak{B}(V)$	*Tipo*	*Condiciones*
$(C_p)^4$	1	ELC	
$(C_p)^2 \times C_{p^2}$	1	ELC	
$C_{p^2} \times C_{p^2}$	1	ELC	
$C_p \times C_{p^3}$	1	ELC	
C_{p^4}	1	ELC	
$B(vi)$	1	ELC	
$B(vii)$	1	ELC	
$B(viii)$	1	ELC	
$B(ix)$	1	ELC	
$B(x)$	1	ELC	
$B(xiv)$	1	ELC	
$(C_p)^3$	2	ELC	
$C_{p^2} \times C_p$	1	ELC	
	2	ELC	
C_{p^3}	1	ELC	
	2	ELC	
$(C_p)^2$	2	A_2	
	3	ELC	
C_{p^2}	2	A_2	$p = 3$ *o* $p \equiv 1 \mod 3$
C_p	2	B_2	$p \equiv 1 \mod 4$
	3	$A_2 \times A_1$	$p = 3$

Prueba. La demostración se basa en resultados previos. Primero, en 5.1.1, que dice que efectivamente $A = \mathfrak{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma$. Luego, en 4.6.1 que acota las posibilidades cuando $|\Gamma| \geq p^2$.

Supongamos $|\Gamma| = p$. Entonces $\dim \mathfrak{B}(V) = p^4$ y V es de TGA. Llamemos $\{x_1, \dots, x_\theta\}$ la base como en 2.2.2 y (q_{ij}) la matriz de c. Como $\widehat{\Gamma} \simeq \Gamma$, $q_{ij}^p = 1$ $\forall i, j$. En particular $N_i = N(q_{ii}) = p$ (no puede ser $q_{ii} = 1$ para algún i porque supusimos $\operatorname{car} \mathbf{k} \neq p$ y luego $\operatorname{car} \mathbf{k} \nmid \dim \mathfrak{B}(V)$). No podemos tener $\dim V = 1$ porque entonces $\dim \mathfrak{B}(V) = p$. Por otro lado, por 4.1.1 tenemos $\dim V \leq 4$. Por 2.5.1 si fuera $\dim V = 4$, $\mathfrak{B}(V)$ sería ELC. Veamos ahora que no podemos tener $\dim V = 4$. Tenemos $V = \oplus_{i=1}^4 M(g_i, \rho_i)$, donde $q_{ij} = \rho_j(g_i)$. Sea q una raíz fija p-ésima de la unidad, y sea g un generador de Γ. Tenemos entonces $f : \Gamma \to \widehat{\Gamma}$ el isomorfismo dado por $f(g^i)(g^j) = q^{ij}$, y ponemos los vectores $A = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ y $B = (f^{-1}(\rho_1), \dots, f^{-1}(\rho_4))$. Obsérvese que $q_{ij} = q^{A_i B_j}$. Luego tenemos la matriz C dada por $C_{ij} = A_i B_j$, que permite calcular la trenza. Más aún, sea $D = C + C^t$. Obsérvese que podemos asociarle a D un diagrama de Dynkin como en [**ASa**], poniendo un vértice por cada $i = 1, \dots, 4$ y poniendo del vértice i al j tantas flechas como r_{ij}, donde, como en 2.6.5, r_{ij} es el orden de nilpotencia de Ad_{x_i} en x_j, que en el caso $\Gamma = C_p$ siempre coincide con el menor entero tal que $q_{ij} q_{ji} q_{ii}^{r_{ij}} = 1$. Para que no haya aristas entre el vértice i y el j debemos tener $q_{ij} q_{ji} = 1$, o, lo que es lo mismo, $D_{ij} = 0$. Luego la matriz D se divide en bloques, uno por cada componente conexa del diagrama de Dynkin. Por otra parte, como $p > 2$ tenemos $D_{ii} = 2C_{ii} \neq 0$, ya que por 2.4.5 es $C_{ii} \neq 0$. Esto dice que el rango de la matriz D es mayor o igual a la cantidad de componentes del diagrama. Y por último, D es la suma de dos matrices de rango 1 (estamos trabajando sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_p$), y por lo tanto tiene rango ≤ 2, con lo que no puede haber más de dos componentes conexas. Esto dice que $\mathfrak{B}(V)$ no puede ser un ELC de rango 4, porque de ser así estaríamos en presencia de 4 componentes. Como conclusión tenemos $2 \leq \dim V \leq 3$. Supongamos que W es el espacio generado por los vectores de V, que corresponden a una componente de dimensión 2. Para que $\dim \mathfrak{B}(W) \leq p^4$ debemos tener que es de tipo A_2 ó B_2, gracias a 4.3.1. (En rigor, por 4.3.1 dice que la matriz de Cartan no puede tener fuera de la diagonal números < -2, y esto no elimina la posibilidad de una matriz de tipo $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, pero por los resultados de [**ASa**] sabemos que una matriz así genera un álgebra de Nichols de dimensión infinita). Es fácil ver que para componentes de tipo A_2 con $p \geq 3$ tendremos $M_1 = p$ y que para componentes de tipo B_2 y $p > 3$ tendremos $M_1 = M_2 = p$ (usando la notación de 4.3.1). Si $p = 3$ también es fácil ver que una componente de tipo B_2 obliga $M_1 = M_2 = 3$, ya que

$$q_{11}^4 q_{12}^2 q_{21}^2 q_{22} = q_{11} q_{12} q_{21} \neq 1,$$

porque si no sería una componente de tipo A_2. Luego si $\dim V = 2$ debemos tener que es de tipo B_2 y si $\dim V = 3$ debemos tener que es de tipo $A_2 \times A_1$. Las condiciones sobre p que aparecen en la tabla tienen que ver con la posibilidad de generar una matriz C del tipo correspondiente y se prueba en [**AS98b**] que son necesarias y suficientes para tener tales matrices.

Sea ahora $\Gamma = (C_p)^2$. Es inmediato ver que no hay ELCs de rango 1 ni 2, dado que deberíamos tener un carácter de Γ con una raíz p^2-ésima en la imagen, que es imposible. La existencia de un ELC de rango 3 es una consecuencia de [**ASa**, Lemma 4.1]. Una construcción explícita se puede hacer como sigue. Sea Γ con generadores $\{g_1, g_2\}$ y $\widehat{\Gamma}$ con generadores $\{\hat{g}_1, \hat{g}_2\}$, donde $\hat{g}_i(g_j) = q_1^{\delta_{ij}}$ (q_1 una raíz fija p-ésima de la unidad). Tómese $V = M(g_1, \hat{g}_1) \oplus M(g_1, \hat{g}_1^{-1}) \oplus M(g_2, \hat{g}_2)$. Es sencillo ver que V genera un ELC. Para una construcción de un álgebra de Nichols de tipo A_2, sea $r = \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}/p$ (la construcción para $p = 2$ es levemente diferente, ver 5.5.2.1). Tómese entonces $V = M(g_1, \hat{g}_1 \hat{g}_2^{-r}) \oplus M(g_2, \hat{g}_1^{-r} \hat{g}_2)$. Es claro que V tiene matriz

$$(q_{ij}) = \begin{pmatrix} q_1 & q_1^{-r} \\ q_1^{-r} & q_1 \end{pmatrix}, \text{ y entonces } q_{ij} q_{ji} = q_{ii}^{a_{ij}} \text{ con } (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea $\Gamma = C_{p^2}$. La no existencia de un ELC de dimensión p^3 es una consecuencia de 5.4.2. Sean $g, \hat{g}$ respectivamente generadores de Γ y $\widehat{\Gamma}$, y sea $q = \hat{g}(g)$. Supóngase que $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ genera un álgebra de tipo A_2. Sean e_1, e_2, f_1, f_2 definidos por $V = M(g^{e_1}, \hat{g}^{f_1}) \oplus M(g^{e_2}, \hat{g}^{f_2})$. Como V tiene matriz $q_{ij} = q^{e_i f_j}$ y q_{11}, q_{22} debe tener orden p, entonces p divide a e_1 y e_2, ó p divide a f_1 y f_2. Repetimos los argumentos de [**ASa**, Thm 1.3], que dan la condición $p = 3$ ó $p \equiv 1 \mod 3$. Supongamos que p divide a e_1 y e_2 (si no, es análogo) y escribamos $e_i = p\bar{e}_i$, con $\bar{e}_i \in \mathbb{Z}/p$. Podemos tomar f_i en $\mathbb{Z}/p$, ya que siempre multiplicaremos los f_i por elementos de $p\mathbb{Z}/p$. Tomando g y $\hat{g}$ convenientemente, podemos suponer también que $\bar{e}_1 = f_1 = p$. Para que (q_{ij}) sea de tipo A_2, debemos tener $q_{11} = q_{22}$, $q_{11} q_{22} q_{21} = 1$, y esto es $\bar{e}_2 f_2 = 1$, $\bar{e}_2 + f_2 = -1$, o sea $f_2^2 + f_2 + 1 \equiv 0 \mod p$. Es fácil ver, con la ley de reciprocidad cuadrática de Gauss, que la existencia de tal f_2 es equivalente a la condición $p = 3$ ó $p \equiv 1 \mod 3$. Si se toma entonces f_2 solución de la ecuación y $e_1 = p$, $f_1 = 1$, $e_2 = -p(f_2 + 1)$, esto da una matriz de Cartan de tipo A_2.

Veamos ahora el caso $|\Gamma| = p^3$. Es claro que existe un ELC de rango 1 y dimensión p^2 para $\Gamma = C_{p^2} \times C_p$ y $\Gamma = C_{p^3}$, y no para $\Gamma = C_p \times C_p \times C_p$.

Por otra parte, los grupos no abelianos de orden p^3 verifican que sus centros están incluidos en sus conmutadores, por lo que los módulos de YD de dimensión 1 dan álgebras con $q = 1$, caso excluido. Vamos ahora a $\mathfrak{B}(V)$ un ELC de rango 2. Probemos que los tres grupos abelianos pueden presentar ELC de rango 2: sean q_1, q_2, q_3 raíces (fijas) de la unidad de órdenes respectivamente p, p^2, p^3. Denotamos los generadores de $(C_p)^3$ por $\{g_1, g_2, g_3\}$ y los generadores de $\widehat{(C_p)^3}$ por $\{\hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3\}$, donde $\hat{g}_i(g_j) = q_1^{\delta_{ij}}$. Denotamos los generadores de $C_{p^2} \times C_p$ por $\{g_1, g_2\}$ y los generadores de $\widehat{C_{p^2} \times C_p}$ por $\{\hat{g}_1, \hat{g}_2\}$, donde $\hat{g}_i(g_j) = q_{3-i}^{\delta_{ij}}$. Denotamos el generador de C_{p^3} por $\{g\}$ y el generador de $\widehat{C_{p^3}}$ por $\{\hat{g}\}$, donde $\hat{g}(g) = q_3$. No presenta dificultad ver que los siguientes módulos de YD dan ELC de dimensión p^2:

$$\begin{aligned} \Gamma = (C_p)^3, &\quad V = M(g_1, \hat{g}_1) \oplus M(g_2, \hat{g}_2), \\ \Gamma = C_{p^2} \times C_p, &\quad V = M(g_1^p, \hat{g}_1) \oplus M(g_1^{-p}, \hat{g}_1), \\ \Gamma = C_{p^3}, &\quad V = M(g^{p^2}, \hat{g}) \oplus M(g^{-p^2}, \hat{g}). \end{aligned}$$

Para los grupos no abelianos debemos tener, como de costumbre, una de las siguientes posibilidades:

1. $V = M(h_1, \chi_1) \oplus M(h_2, \chi_2)$ con h_i centrales y χ_i caracteres, pero por el mismo argumento que con los ELC de rango 1, esto es imposible.
2. $V = M(g, \chi)$ donde χ es un carácter y $[\Gamma : \Gamma_g] = 2$, pero esto es imposible dado que $p \neq 2$ (este caso se presenta cuando $p = 2$, ver 5.5.3.4 y 5.5.3.5).
3. $V = M(g, \rho)$ donde g es central y ρ es una representación irreducible de Γ con $\deg \rho = 2$. Como $p \neq 2$, el teorema de Frobenius dice que esto es imposible (este caso se presenta también cuando $p = 2$).

Para los grupos de orden p^4 la única condición para la existencia de un ELC de dimensión p es la existencia de un elemento central $g \in \Gamma$ y un carácter $\chi \in \widehat{\Gamma}$ tal que $N(\chi(g)) = p$. Esto es posible si y sólo si $g \notin [\Gamma, \Gamma]$. Mirando cada caso, es inmediato ver que estos grupos son exactamente los que aparecen en la tabla, esto es, aquellos para los que $Z(\Gamma) \not\subset [\Gamma, \Gamma]$. □

El siguiente lema se puede considerar un agregado a [**AS98b**, Lemma 4.2].

5.4.2. Lema. *Sea* $\Gamma = C_{p^n}$ *y* $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ *tal que* $\mathfrak{B}(V)$ *es un ELC, cuya dimensión es finita y no divisible por* $\operatorname{car} \mathbf{k}$. *Entonces* V *puede tener dimensión* 1 *(y luego* $\dim \mathfrak{B}(V) = p^v$ *con* $1 \leq v \leq n$*) o puede tener dimensión* 2 *(y luego* $\dim \mathfrak{B}(V) = p^{2v}$ *con* $1 \leq v \leq n$*).*

Prueba. La cota $\dim V \leq 2$ es el contenido de [**AS98b**, Lemma 4.2] y sigue las ideas de la demostración de 5.4.1. Supongamos que Γ tiene generador g y $\widehat{\Gamma}$

tiene generador $\hat{g}$. Sea $q = \hat{g}(g)$, que es una raíz primitiva de orden p^n. Si V tiene dimensión 1, el resultado es consecuencia de 2.4.1.

Supongamos que $V = M(g^{e'_1}, \hat{g}^{f'_1}) \oplus M(g^{e'_2}, \hat{g}^{f'_2})$, y sea $e'_i = p^r e_i$ tal que e_1, e_2 no son divisibles ambos por p; $f'_i = p^s f_i$ tal que f_1, f_2 no son divisibles ambos por p. Luego V tiene matriz dada por $q_{ij} = q^{e'_i f'_j} = q^{e_i f_j p^{r+s}}$. Por la condición sobre la dimensión de $\mathfrak{B}(V)$, $r + s < n$ (porque si no $q_{11} = q_{22} = 1$). Sea $u = n - r - s$. Supóngase que $p \nmid e_1$ (si $p \nmid e_2$ es análogo). Supóngase primero que $p \nmid f_2$, y luego q_{12} tiene orden p^u. Como V genera un ELC, $q_{21} = q_{12}^{-1}$ también tiene orden p^u y luego $p \nmid e_2$, $p \nmid f_1$. Esto demuestra el resultado con $v = u$.

Supóngase si no que $p | f_2$. Entonces $p \nmid f_1$, y sea $f_2 = p^t b$, $e_2 = p^y a$ con $p \nmid b$, $p \nmid a$. Probemos que $t = y$. Tenemos $t < u$ dado que si no $q_{22} = 1$. Ahora, q_{12} tiene orden p^{u-t}, de donde q_{21} tiene orden p^{u-t}. Como $p \nmid f_1$, entonces $p^t | e_2$, por lo que $y \geq t$. Por consideraciones similares, $y \leq t$. Esto demuestra el resultado con $v = u - t$. □

Para dar una clasificación completa de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión p^5, entonces, habría que concluir como sigue.

1. Para cada álgebra de Nichols R de 5.4.1, dar todos los módulos M en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ tales que $\mathfrak{B}(M) \simeq R$.
2. Clasificar todas las clases de isomorfismo de las bosonizaciones de las álgebras de Nichols que aparecen en el paso previo.
3. Clasificar todos los levantamientos para cada una de las álgebras que aparecen en el paso anterior.

Estos pasos son altamente no triviales. Por ejemplo, sea $\Gamma = C_{p^n}$, con $n > 0$ y $p \neq 2$ y sea $0 \leq s \leq n$. El número de Espacios Lineales Cuánticos de rango 1 sobre Γ con dimensión p^s está dado por

$$\sum_{\substack{i+j-n=s \\ i,j \leq n}} \phi(i,j),$$

mientras que el número de clases de isomorfismo de estos ELC, una vez bosonizados, es

$$\sum_{\substack{i+j-n=s \\ i,j \leq n}} \frac{\phi(i,j)}{I(i,j)}, \tag{5.4.3}$$

donde

$$\phi(i) = p^{i-1}(p-1), \qquad \phi(i,j) = \phi(i)\phi(j),$$
$$I(k_1, \dots, k_r) = \phi(\max\{k_1, \dots, k_r\}).$$

Más aun, el número de ELC de rango 2 sobre Γ con dimensión p^s está dado por

$$\sum_{\substack{i_1,j_1,i_2,j_2\leq n\\ i_1+j_2=i_2+j_1\\ i_1+j_1-n=s_1\geq 1\\ i_2+j_2-n=s_2\geq 1\\ s_1+s_2=s}} \frac{\phi(i_1,j_1)\phi(i_2,j_2)}{L_n(i_1,j_2)},$$

mientras que el número de clases de isomorfismo de estos ELC una vez bosonizado es

$$\sum_{i_1,j_1,i_2,j_2} \frac{\phi(i_1,j_1)\phi(i_2,j_2)}{L_n(i_1,j_2)I(i_1,i_2,j_1,j_2)}, \tag{5.4.4}$$

donde

$$L_n(i,j) = \phi(i+j-n).$$

Como resultado de esto, el número de álgebras de Hopf corradicalmente graduadas no isomorfas de dimensión p^5 con corradical C_{p^4}, C_{p^3} es respectivamente $2(p^2-1)$ y $p(p-1)[2+\frac{p(p-1)(p+2)}{2}]$.

Para más ilustración acerca de estos pasos, puede verse la discusión en [**ASa**, §9] sobre el primero, y [**ASa**, §6] sobre el segundo.

Podemos completar sin demasiado esfuerzo estos pasos en los casos en que Γ no es abeliano. Es fácil, mirando 5.3.1, ver que toda álgebra de Hopf punteada de dimensión p^5 sobre los grupos $B(viii)$, $B(ix)$, $B(x)$ y $B(xiv)$ es corradicalmente graduada.

Como consecuencia: un álgebra de Hopf punteada de dimensión p^5 y corradical no abeliano es corradicalmente graduada, a menos que su corradical sea $\mathbf{k}B(vii)$. Clasifiquemos los levantamientos en este caso: $B(vii)$ se puede presentar con generadores X, Y, Z y relaciones

$$X^{p^2} = Y^p = Z^p = 1, \quad [Z,Y] = X^p, \quad [X,Y] = [X,Z] = 1.$$

Luego $Z(B(vii)) = (X)$ mientras que $[B(vii), B(vii)] = (X^p)$. Sea q una raíz p-ésima (fija) de la unidad. Los módulos de Yetter–Drinfeld que generan álgebras de Nichols de dimensión p son entonces

$$V = M(X^i,\chi) \text{ tales que } p\nmid i,\ \chi(X) = q^a\ (p\nmid a),\ \chi(Y) = q^b,\ \chi(Z) = q^c.$$

Sin embargo, se puede ver que muchos de ellos dan álgebras isomorfas al bosonizarlos. Cuando se descartan los casos repetidos quedan dos:

$$\begin{aligned} V_i = M(X,\chi_i)\ (i=1,2), \quad & \chi_1(X) = q,\ \chi_1(Y) = \chi_1(Z) = 1,\\ & \chi_2(X) = \chi_2(Y) = q,\ \chi_2(Z) = 1. \end{aligned}$$

Se tienen entonces 2 álgebras de Hopf punteadas de dimensión p^5 con corradical no abeliano y que no son corradicalmente graduadas:

$A^{(1)}$, generada por a, X, Y, Z y las relaciones de $B(vii)$ más

$$Xa = qaX,\ Ya = aY,\ Za = aZ,\ a^p = X^p - 1,\ \Delta(a) = X \otimes a + a \otimes 1,$$

$A^{(2)}$, generada por a, X, Y, Z y las relaciones de $B(vii)$ más

$$Xa = qaX,\ Ya = qaY,\ Za = aZ,\ a^p = X^p - 1,\ \Delta(a) = X \otimes a + a \otimes 1.$$

Una descripción de los levantamientos de los ELC con corradical abeliano (resp. de las álgebras de tipo A_2) se hace en [**AS98b**] (resp. [**AS99**]).

5.4.5. Observación. En 5.4.1 se prueba entre otras cosas que no hay ningún ELC de rango 4 (ni 3) sobre $\Gamma = C_p$. Con la misma idea se puede probar que si $\Gamma = (C_p)^s$ entonces los posibles diagramas de Dynkin tienen una cantidad de componentes $\leq 2s$.

5.4.6. Observación. Sea $p \geq 3$ un primo y A un álgebra de Hopf punteada de dimensión p^n. Se construye $V = V(A)$ como en el Procedimiento. Entonces

1. o bien V es de TGA,
2. o bien $\dim A \geq p^{p+3}$.

Prueba. Sea $\Gamma = G(A)$ el grupo. Si Γ es abeliano la conclusión es obvia, así que supondremos Γ no abeliano, y por lo tanto $|\Gamma| \geq p^3$. Sea $V = \oplus M(g_i, \rho_i)$ la descomposición de V en irreducibles en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$. Simplemente se nota que para que V no sea de TGA debemos tener por lo menos un g_i que no esté en el centro, digamos $g_0 \notin Z(\Gamma)$. Entonces $\dim M(g_0, \rho_0) = [\Gamma : \Gamma_{g_0}] \times \deg(\rho_0)$. Luego $\dim M(g_0, \rho_0) \geq p$, y ahora 4.1.1 permite concluir que $\dim \mathfrak{B}(V) \geq p^p$, de donde se tiene el resultado. $\square$

Como agregado a esto, observamos que si $p = 3$ y $\dim A = p^6$ el único caso posible en el que V no sería de TGA es $V = V_{3,q}$, pero necesariamente q es una raíz de orden 3 y entonces $\dim \mathfrak{B}(V_{3,q}) > 3^3$, lo que prueba que este caso no se da.

5.5. Dimensión 32

Vamos ahora a clasificar las álgebras de Hopf punteadas de dimensión 32. Supondremos a lo largo de la sección que $\mathbf{k}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $\neq 2$. A lo largo de la sección los grupos abelianos serán trabajados de la siguiente manera. Supongamos que

$$\Gamma = C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_t},$$

donde $n_i = 2^{m_i}$ para enteros m_i. Para $1 \leq i \leq t$ llamaremos g_i a un generador (fijo) de la componente i-ésima, de manera tal que Γ se presenta con generadores $\{g_1, \dots, g_t\}$ y relaciones $g_i g_j = g_j g_i$, $g_i^{n_i} = 1$. Fijemos de ahora en más para cada n, ξ_n una raíz de la unidad de orden 2^n de forma que $\xi_n^2 = \xi_{n-1}$. En particular, $\xi_1 = -1$ y denotaremos por $\mathbf{i} = \xi_2$ una raíz cuadrada de -1. Además, para cada $1 \leq i \leq t$ sea χ_i el carácter dado por $\chi_i(g_j) = (\xi_{m_i})^{\delta_{ij}}$. Luego, $\widehat{\Gamma}$ se puede presentar con generadores χ_i y relaciones $\chi_i \chi_j = \chi_j \chi_i$, $\chi_i^{n_i} = 1$.

Para abreviar la presentación le pondremos nombre a las matrices de trenzas que aparecerán a lo largo de la sección. El cálculo de la dimensión de las álgebras de Nichols generadas por ellas es trivial usando 4.3.1, salvo para las que denominaremos $b^5_{\pm}$ en característica positiva. Si las "primeras" generalizaciones de los núcleos de FL propuestas en 6.2.2 abarcaran este caso, sería un álgebra de tipo G_2. De todas maneras, como en este caso $M_1 = N(1)$, tenemos que en característica 0 la dimensión de $\mathfrak{B}(V)$ es infinita y en característica positiva la dimensión es $\geq 8N(1)^2 N(-1) \geq 16 \cdot 9 = 144$, por lo que no traerá problemas.

Ponemos entonces

$$b^1_q = \begin{pmatrix} -1 & q^{-1} \\ q & -1 \end{pmatrix} \ (q \in \mathbf{k}^\times), \qquad b^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$b^3_{\pm+} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \pm\mathbf{i} & -1 \end{pmatrix}, \qquad b^3_{\pm-} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \pm\mathbf{i} & -1 \end{pmatrix},$$

$$b^4_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm\mathbf{i} & \pm\mathbf{i} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b^5_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm\mathbf{i} & \mp\mathbf{i} \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$b^6_k = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \xi^k & -1 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 3, 5, 7),$$

$$b^1_{q_1,q_2,q_3} = \begin{pmatrix} -1 & q_1^{-1} & q_3^{-1} \\ q_1 & -1 & q_2^{-1} \\ q_3 & q_2 & -1 \end{pmatrix} \ (q_1, q_2, q_3 \in \mathbf{k}^\times).$$

En la siguiente tabla rescatamos la información útil de cada una de estas trenzas. Ponemos, igual que en 4.3.1, $z = \mathrm{Ad}_{x_1}(x_2)$, o $z = \mathrm{Ad}_{x_2}(x_1)$, dependiendo del caso. Notamos por $|x|$ el orden de nilpotencia de un elemento x, es decir, $x^{|x|} = 0$, $x^{|x|-1} \neq 0$.

Matrices y álgebras						
b	$\dim \mathfrak{B}(V)$	Tipo	z	$\lvert x_1\rvert$	$\lvert x_2\rvert$	$\lvert z\rvert$
b^1_q	4	ELC	0	2	2	
b^2	8	A_2	$\mathrm{Ad}_x(y) = xy + yx$	2	2	2
$b^3_{\pm+}$	16	A_2	$\mathrm{Ad}_x(y) = xy + yx$	2	2	4
$b^3_{\pm-}$	16	A_2	$\mathrm{Ad}_x(y) = xy + yx$	2	2	4
$b^4_{\pm}$	16	A_2	$\mathrm{Ad}_y(x) = xy + yx$	4	2	2
$b^5_{\pm}$	≥ 144	?	$\mathrm{Ad}_y(x) = xy + yx$	4	2	$N(1)$
b^6_k	32	A_2	$\mathrm{Ad}_y(x) = xy - yx$	2	2	8
$b^1_{q_1,q_2,q_3}$	8	ELC	0			

5.5.0.1. Definición. Si $V = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$ es un PTTGD con matriz (q_{ij}), tomamos $(q_{ij})^\rho$ la matriz de V pero en la base $\{x_2, x_1\}$, esto es, la matriz $\begin{pmatrix} q_{22} & q_{21} \\ q_{12} & q_{11} \end{pmatrix}$. Tomamos $(q_{ij})^\tau$ la matriz de $\bar{V}$, que es igual a V como espacio vectorial pero con la trenza $\bar{c} = c^{-1}$. La matriz $(q_{ij})^\tau$ es entonces $\begin{pmatrix} q_{11}^{-1} & q_{21}^{-1} \\ q_{12}^{-1} & q_{22}^{-1} \end{pmatrix}$. Es claro que $(q_{ij})^\rho$ está asociada a la misma álgebra de Nichols que (q_{ij}), y por 2.4.14 la dimensión del álgebra de Nichols asociada a $(q_{ij})^\tau$ es la misma que la de (q_{ij}).

Observamos que, por 4.1.4 tenemos $\dim V \leq 5-n$ si $|\Gamma| = 2^n$, donde $\Gamma = G(A)$ es su grupo y A tiene dimensión 32.

Si $\dim V = 2$, por 2.7.7 V es de TGA, y luego tiene una matriz (q_{ij}).

5.5.0.2. Si Γ no es abeliano, hay en principio tres posibilidades para que V tenga dimensión 2, que pasamos a reiterar:

1. V se descompone como $M = M(g_1, \chi_1) \oplus M(g_2, \chi_2)$ con g_i central en Γ y χ_i caracteres.
2. $V = M(g, \chi)$ con $[\Gamma : \Gamma_g] = 2$ y χ un carácter.
3. $V = M(g, \rho)$ es simple, con $\Gamma_g = \Gamma$ y $\dim \rho = 2$.

Observemos más de cerca la trenza en los casos 2 y 3. En estos casos $\Gamma| \geq 8$ y por lo tanto $\dim \mathfrak{B}(V) \leq 4$, por lo que 3.4.1 parte 2 más 2.5.1 implican que es un ELC con $q_{11} = q_{22} = -1$.

5.5.0.3. Táctica. En el caso 2 sea x un generador del espacio de representación de χ. Tenemos $\chi(g) = q_{11} = -1$. La clase de conjugación de g es $\{g, {}^tg = tgt^{-1}\}$, y como $[\Gamma : \Gamma_h] = 2$ por 2.2.4 se tiene que ${}^tg \in \Gamma_g$. Nótese también que $t^{-1} \notin \Gamma_g$, de donde $t^{-1}gt = tgt^{-1} = {}^t g$. Sea $y = t \rightharpoonup x$ y $\zeta = \chi({}^t g)$. Entonces $\delta(y) = {}^t g \otimes y$, y c se puede calcular como sigue:

$$\begin{aligned} c(x \otimes x) &= (g \rightharpoonup x) \otimes x = -x \otimes x, \\ c(x \otimes y) &= (g \rightharpoonup y) \otimes x = (gt \rightharpoonup x) \otimes x = (tt^{-1}gt \rightharpoonup x) \otimes x \\ &\qquad\qquad = (\zeta t \rightharpoonup x) \otimes x = \zeta y \otimes x, \\ c(y \otimes x) &= ({}^t g \rightharpoonup x) \otimes y = \zeta x \otimes y, \\ c(y \otimes y) &= -y \otimes y \text{ (por (3.1.3))}. \end{aligned}$$

Luego, la matriz de c es $\begin{pmatrix} -1 & \zeta \\ \zeta & -1 \end{pmatrix}$, por lo que $1 = q_{12}q_{21} = \zeta^2$, i.e. $\zeta = \pm 1$. Para calcular los levantamientos, sean a y b levantados de x e y como en 5.1.7. Entonces $gag^{-1} = -a$ y $b = tat^{-1}$. La acción de Γ en A_1 se calcula como la de Γ en V, como se explica en 5.1.7.

5.5.0.4. Táctica. En el caso 3, sea x un generador del espacio de representación de ρ, y sea $t \in \Gamma$ tal que $y = \rho(t)(x)$ es linealmente independiente con x. Por 4.2.3 la matriz de c es $\begin{pmatrix} \zeta & \zeta \\ \zeta & \zeta \end{pmatrix}$, con $\zeta = \rho(g)$, por lo que $\zeta = q_{11} = -1$. Sean a y b levantados de x e y, como en 5.1.7. Entonces $b = tat^{-1}$ y $gbg^{-1} = -b$.

5.5.1. $\Gamma = C_2$.

Sea $V = \oplus_{i=1}^{\theta} M(h_i, \chi_i)$. Para que $\mathfrak{B}(V)$ tenga dimensión 16, debemos tener $q_{ii} = -1$ $\forall i$, donde $(q_{ij}) = (\chi_j(h_i))$ es la matriz de V. Luego, $V = \oplus_i M(g, \hat{g})$, y por lo tanto $(q_{ij}) = \hat{g}(g) = -1$ $\forall ij$, de donde $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC con generadores $x_1, \dots, x_\theta$ y relaciones $x_i^2 = 0$, $x_i x_j = -x_j x_i$. Entonces, $\dim \mathfrak{B}(V) = 2^\theta$, y $\theta = 4$. Sea $a_1, \dots, a_4$ como en 5.1.7. Entonces $ga_ig = -a_i$ y $a_i \in \mathcal{P}_{g,1}(A)$. Tenemos, por 5.1.8, que $a_i^2 \in \mathcal{P}(A)$, y lo mismo para $a_ia_j + a_ja_i$. Luego $a_i^2 = a_ia_j + a_ja_i = 0$ $\forall i, j$. Existe entonces sólo un álgebra de Hopf de dimensión 32 con corradical $\mathbf{k}C_2$. Es claro, usando el mismo razonamiento, que existe una (y es única) álgebra de Hopf con corradical $\mathbf{k}C_2$ y dimensión n si y sólo si $n = 2^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Esto está probado por Nichols en [**Nic78**, Thm. 4.2.1], y lo reproducimos aquí en haras de la completitud.

5.5.2. Γ de orden 4.

5.5.2.1. $\Gamma = C_2 \times C_2$. Como se observó, el rango es ≤ 3, pero también es > 1 porque q_{11} sólo puede ser ± 1 y nunca tendríamos $\dim \mathfrak{B}(V) = 8$. La siguiente es una lista de los módulos de YD irreducibles que dan álgebras de dimensión 2 (o sea, $q_{11} = -1$) y calculamos también la acción de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ como en el lema 5.2.1.

En este caso, $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ es isomorfo a $\mathbb{S}_3$, generado por f_1 y f_2, donde,

$$f_1 = (g_1 \mapsto g_1g_2,\ g_2 \mapsto g_2), \quad f_2 = (g_1 \mapsto g_1,\ g_2 \mapsto g_1g_2).$$

Luego, tenemos

módulos / $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $\Gamma = C_2 \times C_2$				
$M(h,\chi)$	h	χ	$(M(h,\chi))^{f_1}$	$(M(h,\chi))^{f_2}$
Y_2^1	g_1	$\hat{g}_1$	Y_2^5	Y_2^2
Y_2^2	g_1	$\hat{g}_1\hat{g}_2$	Y_2^6	Y_2^1
Y_2^3	g_2	$\hat{g}_2$	Y_2^4	Y_2^6
Y_2^4	g_2	$\hat{g}_1\hat{g}_2$	Y_2^3	Y_2^5
Y_2^5	g_1g_2	$\hat{g}_1$	Y_2^1	Y_2^4
Y_2^6	g_1g_2	$\hat{g}_2$	Y_2^2	Y_2^3

Consideremos entonces $V = M_1 \oplus M_2 = M(h_1,\chi_1) \oplus M(h_2,\chi_2)$. Como $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ actúa transitivamente, podemos suponer que $M_1 = Y_2^1$. Para rango 2 esto da 6 posibilidades, pero los casos $Y_2^1 \oplus Y_2^4$ y $Y_2^1 \oplus Y_2^6$ son equivalentes por medio de $f_1 \circ f_2$. Luego, las posibilidades son

rango 2, $\Gamma = C_2 \times C_2$						
V	h_1	h_2	χ_1	χ_2	(q_{ij})	$\dim \mathfrak{B}(V)$
V_2^1	g_1	g_1	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1$	b_{-1}^1	4
V_2^2	g_1	g_1	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1\hat{g}_2$	b_{-1}^1	4
V_2^3	g_1	g_2	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_2$	b_1^1	4
V_2^4	g_1	g_2	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1\hat{g}_2$	b^2	8
V_2^5	g_1	g_1g_2	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1$	b_{-1}^1	4

Para rango 3, $V = \oplus_{i=1}^3 M_i = \oplus_{i=1}^3 M(h_i,\chi_i)$. Como el módulo V_2^4 no debe aparecer como submódulo, tenemos las siguientes posibilidades:

rango 3, $\Gamma = C_2 \times C_2$								
V	h_1	h_2	h_3	χ_1	χ_2	χ_3	(q_{ij})	$\dim \mathfrak{B}(V)$
W_2^1	g_1	g_1	g_1	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1$	$b_{-1,-1,-1}^1$	8
W_2^2	g_1	g_1	g_1	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1\hat{g}_2$	$b_{-1,-1,-1}^1$	8
W_2^3	g_1	g_1	g_1g_2	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1$	$b_{-1,-1,-1}^1$	8
W_2^4	g_1	g_1	g_2	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_2$	$b_{1,-1,-1}^1$	8

Calculamos los levantamientos.

5.5.2.1.1. $V = V_2^4$. Tomamos a_1 y a_2 como en 5.1.7. Luego tenemos

$$\Delta(a_1) = g_1 \otimes a_1 + a_1 \otimes 1, \quad g_1 a_1 = -a_1 g_1, \quad g_2 a_1 = a_1 g_2;$$
$$\Delta(a_2) = g_2 \otimes a_2 + a_2 \otimes 1, \quad g_1 a_2 = -a_2 g_1, \quad g_2 a_2 = -a_2 g_2.$$

Como $a_1^2 \in \mathcal{P}(A)$, debemos tener $a_1^2 = 0$ por 5.1.8. Por la misma razón, $a_2^2 = 0$. Tómese ahora

$$a_3 = \mathrm{Ad}_{a_1}(a_2) = a_1 a_2 + g_1 a_2 \mathcal{S}(a_1) = a_1 a_2 + a_2 a_1,$$

entonces

$$\begin{aligned}\Delta(a_3) &= g_1 g_2 \otimes a_1 a_2 + g_1 a_2 \otimes a_1 + a_1 g_2 \otimes a_2 + a_1 a_2 \otimes 1\\ &= g_1 g_2 \otimes a_1 a_2 - a_2 g_1 \otimes a_1 + a_1 g_2 \otimes a_2 + a_1 a_2 \otimes 1.\end{aligned}$$

Es sencillo ver que $a_3^2 \in \mathcal{P}(A)$, y luego $a_3^2 = 0$. Más aun, es claro por la definición de a_3 que

$$a_1 a_3 = a_3 a_1, \ a_2 a_3 = a_3 a_2,$$

y luego el único levantamiento es la bosonización $\mathfrak{B}(V_2^2)\#\mathbf{k}\Gamma$.

5.5.2.1.2. $V = W_2^1$. Como en 5.1.7, podemos tomar a_1, a_2 y a_3 tales que

$$\Delta(a_i) = g_1 \otimes a_i + a_i \otimes 1, \quad g_1 a_i = -a_i g_1, \quad g_2 a_i = a_i g_2.$$

Tenemos $a_i^2 \in \mathcal{P}(A)$ y $a_i a_j + a_j a_i \in \mathcal{P}(A)$, por lo que $a_i^2 = a_i a_j + a_j a_i = 0$ $\forall i, j$ por 5.1.8. Luego, hay un único levantamiento: la bosonización $\mathfrak{B}(W_2^1)\#\mathbf{k}\Gamma$.

5.5.2.1.3. $V = W_2^2$. Este caso es igual al previo, con la única diferencia de que $g_2 a_3 = -a_3 g_2$, mientras que $g_2 a_i = a_i g_2$ para $i = 1, 2$. Los mismos argumentos muestran que no hay otro levantamiento que la bosonización $\mathfrak{B}(W_2^2)\#\mathbf{k}\Gamma$.

5.5.2.1.4. $V = W_2^3$. Tenemos ahora $g_1 a_i = -a_i g_1$ y $g_2 a_i = a_i g_2$. La diferencia con el caso $V = W_2^1$ es ahora que $\Delta(a_3) = g_1 g_2 \otimes a_3 + a_3 \otimes 1$. Como antes, $a_i^2 \in \mathcal{P}(A)$ y luego $a_i^2 = 0$ por 5.1.8. Además, $a_1 a_2 + a_2 a_1 \in \mathcal{P}(A)$, de donde $a_1 a_2 = -a_2 a_1$. Sin embargo, $a_i a_3 + a_3 a_i \in \mathcal{P}_{g_2,1}(A)$ para $i = 1, 2$ y luego existen $\lambda_1, \ \lambda_2 \in \mathbf{k}$ tales que $a_i a_3 + a_3 a_i = \lambda_i(g_2 - 1)$. Sea $W' = (a_1, a_2)$ y $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{k})$, $T = (T_{ij})$. Si reemplazamos la base $\{a_1, a_2\}$ por $\{Ta_1, Ta_2\}$ (denotamos también por T el automorfismo de W' con matriz T en la base $\{a_1, a_2\}$), entonces las constantes $\binom{\lambda_1}{\lambda_2}$ se reemplazan por $T\binom{\lambda_1}{\lambda_2}$. Luego, hay 2 levantamientos no isomorfos: pueden ser caracterizados por el rango del morfismo $W' \to \mathbf{k}(g_2 - 1)$, $a \mapsto aa_3 + a_3 a$, que puede ser 0 ó 1. Tenemos al fin

1. La bosonización $\mathfrak{B}(W_2^3)\#\mathbf{k}\Gamma$.
2. El álgebra con relaciones $a_1 a_3 + a_3 a_1 = g_2 - 1$, $a_2 a_3 + a_3 a_2 = 0$.

5.5.2.1.5. $V = W_2^4$. Tenemos ahora $\Delta(a_i) = g_1 \otimes a_i + a_i \otimes 1$ para $i = 1, 2$, y $\Delta(a_3) = g_2 \otimes a_3 + a_3 \otimes 1$. Tenemos además $g_1 a_i = -a_i g_1$, $g_2 a_i = a_i g_2$ para $i = 1, 2$, $g_1 a_3 = a_3 g_1$, $g_2 a_3 = -a_3 g_2$. Como antes, $a_i^2 = 0$ para $i = 1, 2, 3$, y también $a_1 a_2 + a_2 a_1 = 0$. Más aun, $a_i a_3 - a_3 a_i \in \mathcal{P}_{g_1 g_2, 1}(A)$, de donde se tiene que $a_i a_3 - a_3 a_i = \lambda_i (g_1 g_2 - 1)$ para $i = 1, 2$. Estas últimas condiciones pueden agregar alguna relación no querida que decrementaría la dimensión de A. Para ver cuáles λ_i dan álgebras de dimensión 32, usamos el lema del diamante:

$$g_1 a_3 a_1 = g_1 a_1 a_3 + \lambda_1 g_1 (g_1 g_2 - 1) = -a_1 a_3 g_1 + \lambda_1 g_2 - \lambda_1 g_1$$
$$g_1 a_3 a_1 = -a_3 a_1 g_1 = -a_1 a_3 g_1 - \lambda_1 (g_1 g_2 - 1) g_1 = -a_1 a_3 g_1 - \lambda_1 g_2 + \lambda_1 g_1,$$

de donde $\lambda_1 = 0$. Un trabajo análogo con el monomio $g_1 a_3 a_2$ dice que $\lambda_2 = 0$, y luego hay un solo levantamiento: la bosonización $\mathfrak{B}(W_2^4) \# \mathbf{k}\Gamma$.

5.5.2.2. $\Gamma = C_4$. Por consideraciones similares a las de $\Gamma = C_2 \times C_2$, el rango debe ser 2 ó 3. Aquí $\mathrm{Aut}(\Gamma) \simeq C_2$, generado por $f(g) = g^3$. La lista de los módulos de YD que dan álgebras con dimensión una potencia de 2 es:

módulos / $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $\Gamma = C_4$				
$M(h,\chi)$	h	χ	$(M(h,\chi))^f$	$\dim \mathfrak{B}(M(h,\chi))$
Y_3^1	g	$\hat{g}$	Y_3^8	4
Y_3^2	g	$\hat{g}^2$	Y_3^7	2
Y_3^3	g	$\hat{g}^3$	Y_3^6	4
Y_3^4	g^2	$\hat{g}$	Y_3^5	2
Y_3^5	g^2	$\hat{g}^3$	Y_3^4	2
Y_3^6	g^3	$\hat{g}$	Y_3^3	4
Y_3^7	g^3	$\hat{g}^2$	Y_3^2	2
Y_3^8	g^3	$\hat{g}^3$	Y_3^1	4

Luego, para rango 2 tenemos las siguientes posibilidades no isomorfas (excluimos los casos $Y_3^i \oplus Y_3^j$ con $i, j \in \{1, 3, 6, 8\}$ gracias a 2.5.1).

Rango 2, $\Gamma = C_4$										
V	h_1	h_2	χ_1	χ_2	q_{11}	q_{12}	q_{21}	q_{22}	q_{ij}	$\dim \mathfrak{B}(V)$
V_3^1	g	g	$\hat{g}$	$\hat{g}^2$	$\mathbf{i}$	-1	$\mathbf{i}$	-1	$[b_-^4]^\tau$	64
V_3^2	g	g	$\hat{g}^3$	$\hat{g}^2$	$-\mathbf{i}$	-1	$-\mathbf{i}$	-1	$[b_+^4]^\tau$	64
V_3^3	g	g	$\hat{g}^2$	$\hat{g}^2$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4
V_3^4	g	g^3	$\hat{g}^2$	$\hat{g}^3$	-1	$-\mathbf{i}$	-1	$\mathbf{i}$	$[b_-^5]^{\rho\tau}$	≥ 144
sigue en la próxima página										

viene de la página anterior										
V	h_1	h_2	χ_1	χ_2	q_{11}	q_{12}	q_{21}	q_{22}	q_{ij}	$\dim \mathfrak{B}(V)$
V_3^5	g	g^3	$\hat{g}^2$	$\hat{g}$	-1	$\mathbf{i}$	-1	$-\mathbf{i}$	$[b_+^5]^{\rho\tau}$	≥ 144
V_3^6	g	g^3	$\hat{g}^2$	$\hat{g}^2$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4
V_3^7	g	g^2	$\hat{g}$	$\hat{g}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	-1	-1	b_+^4	64
V_3^8	g	g^2	$\hat{g}$	$\hat{g}^3$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{i}$	-1	-1	b_+^5	≥ 144
V_3^9	g	g^2	$\hat{g}^3$	$\hat{g}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	-1	-1	b_-^5	≥ 144
V_3^{10}	g	g^2	$\hat{g}^3$	$\hat{g}^3$	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{i}$	-1	-1	b_-^4	64
V_3^{11}	g	g^2	$\hat{g}^2$	$\hat{g}$	-1	$\mathbf{i}$	1	-1	$[b_{++}^3]^\rho$	16
V_3^{12}	g	g^2	$\hat{g}^2$	$\hat{g}^3$	-1	$-\mathbf{i}$	1	-1	$[b_{-+}^3]^\rho$	16
V_3^{13}	g^2	g^2	$\hat{g}$	$\hat{g}$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4
V_3^{14}	g^2	g^2	$\hat{g}$	$\hat{g}^3$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4

Luego, no tenemos módulos de rango 2 sobre C_4 que den álgebras de Nichols de dimensión 8. Para rango 3 los posibles sub-casos son V_3^3, V_3^6, V_3^{13} y V_3^{14}. Tenemos entonces los siguientes casos:

rango 3, $\Gamma = C_4$								
V	h_1	h_2	h_3	χ_1	χ_2	χ_3	q_{ij}	$\dim \mathfrak{B}(V)$
W_3^1	g	g	g	$\hat{g}^2$	$\hat{g}^2$	$\hat{g}^2$	$b_{-1,-1,-1}^1$	8
W_3^2	g	g	g^3	$\hat{g}^2$	$\hat{g}^2$	$\hat{g}^2$	$b_{-1,-1,-1}^1$	8
W_3^3	g^2	g^2	g^2	$\hat{g}$	$\hat{g}$	$\hat{g}$	$b_{-1,-1,-1}^1$	8
W_3^4	g^2	g^2	g^2	$\hat{g}$	$\hat{g}$	$\hat{g}^3$	$b_{-1,-1,-1}^1$	8

Calculamos los levantamientos:

5.5.2.2.1. $V = W_3^1$. Tomamos a_i, $i = 1,2,3$ como en 5.1.7, y tenemos entonces $\Delta(a_i) = g \otimes a_i + a_i \otimes 1$, $ga_i = -a_i g$. Luego, por 5.1.8, se tiene $a_i^2 \in \mathcal{P}_{g^2,1}(A)$ y $a_i a_j + a_j a_i \in \mathcal{P}_{g^2,1}(A)$, por lo que existen $\lambda_i, 1 \leq i \leq 6$ tales que

$$a_1^2 = \lambda_1(g^2-1), \qquad a_2^2 = \lambda_2(g^2-1), \qquad a_3^2 = \lambda_3(g^2-1),$$
$$a_1a_2 + a_2a_1 = \lambda_4(g^2-1), \quad a_1a_3 + a_3a_1 = \lambda_5(g^2-1), \quad a_2a_3 + a_3a_2 = \lambda_6(g^2-1).$$

Tenemos una función cuadrática $f : W = (a_1, a_2, a_3) \to \mathbf{k}(g^2-1)$, $f(a) = a^2$. Más aun, la base $\{a_1, a_2, a_3\}$ de W puede ser reemplazada por cualquier otra base de W, y por lo tanto debemos considerar la clase de equivalencia de f para producir levantamientos no isomorfos. Como $\operatorname{car} \mathbf{k} \neq 2$ y $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado, f está caracterizada por su rango, y luego hay 4 levantamientos (módulo isomorfismo):

1. $a_i a_j + a_j a_i = 0$ para $i \neq j$, $a_i^2 = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Esta es la bosonización $\mathfrak{B}(W_3^1)\#\mathbf{k}\Gamma$.
2. $a_i a_j + a_j a_i = 0$ para $i \neq j$, $a_i^2 = 0$ para $i = 1, 2$, $a_3^2 = (g^2 - 1)$.
3. $a_i a_j + a_j a_i = 0$ para $i \neq j$, $a_1^2 = 0$, $a_i^2 = (g^2 - 1)$ para $i = 2, 3$.
4. $a_i a_j + a_j a_i = 0$ para $i \neq j$, $a_i^2 = (g^2 - 1)$ para $i = 1, 2, 3$.

5.5.2.2.2. $V = W_3^2$. De igual manera, tenemos $a_1, a_2 \in \mathcal{P}_{g,1}(A)$, $a_3 \in \mathcal{P}_{g^3,1}(A)$ tales que $ga_i = -a_i g$ para $i = 1, 2, 3$. Ahora, $a_i a_3 + a_3 a_i \in \mathcal{P}(A)$ $(i = 1, 2)$, por lo que $a_i a_3 + a_3 a_i = 0$ para $i = 1, 2$. Sin embargo, existen λ_i, $1 \leq i \leq 4$ tales que

$$a_i^2 = \lambda_i (g^2 - 1) \ (i = 1, 2, 3), \qquad a_1 a_2 + a_2 a_1 = \lambda_4 (g^2 - 1).$$

Luego tenemos dos funciones cuadráticas:

$$f_1 : W_1 = (a_1, a_2) \to \mathbf{k}(g^2 - 1), \ f_1(a) = a^2,$$
$$f_2 : W_2 = (a_3) \to \mathbf{k}(g^2 - 1), \ f_2(a) = a^2.$$

Como antes, podemos reemplazar $\{a_1, a_2\}$ por cualquier otra base de W_1, y lo mismo para $\{a_3\}$. Como con W_3^1, f_1 y f_2 están caracterizadas por sus rangos, de donde hay 3 posibilidades para f_1 y 2 para f_2, y finalmente hay 6 levantamientos:

1. $a_i a_j + a_j a_i = 0$ para $i \neq j$, $a_1^2 = 0$, $a_2^2 = 0$, $a_3^2 = 0$. Esta es la bosonización $\mathfrak{B}(W_3^2)\#\mathbf{k}\Gamma$.
2. $a_i a_j + a_j a_i = 0$ para $i \neq j$, $a_1^2 = 0$, $a_2^2 = (g^2 - 1)$, $a_3^2 = 0$.
3. $a_i a_j + a_j a_i = 0$ para $i \neq j$, $a_1^2 = (g^2 - 1)$, $a_2^2 = (g^2 - 1)$, $a_3^2 = 0$.
4. $a_i a_j + a_j a_i = 0$ para $i \neq j$, $a_1^2 = 0$, $a_2^2 = 0$, $a_3^2 = (g^2 - 1)$.
5. $a_i a_j + a_j a_i = 0$ para $i \neq j$, $a_1^2 = 0$, $a_2^2 = (g^2 - 1)$, $a_3^2 = (g^2 - 1)$.
6. $a_i a_j + a_j a_i = 0$ para $i \neq j$, $a_1^2 = (g^2 - 1)$, $a_2^2 = (g^2 - 1)$, $a_3^2 = (g^2 - 1)$.

5.5.2.2.3. $V = W_3^3$. La situación aquí es más fácil: tenemos $a_i \in \mathcal{P}_{g^2,1}(A)$ y $ga_i = \mathbf{i} a_i g$ para $i = 1, 2, 3$. Como $a_i^2 \in \mathcal{P}(A)$ y $a_i a_j + a_j a_i \in \mathcal{P}(A)$ para todos los i, j, por 5.1.8 tenemos $a_i^2 = a_i a_j + a_j a_i = 0$, y luego hay un único levantamiento: la bosonización $\mathfrak{B}(W_3^3)\#\mathbf{k}\Gamma$.

5.5.2.2.4. $V = W_3^4$. Es similar al caso anterior con la única diferencia de que $ga_i = \mathbf{i} a_i g$ para $i = 1, 2$ y $ga_3 = -\mathbf{i} a_3 g$. Hay un único levantamiento: la bosonización $\mathfrak{B}(W_3^3)\#\mathbf{k}\Gamma$.

5.5.3. Γ de orden 8.

Como se observó al comienzo de la sección, tenemos $\dim V \leq 2$. Si $\dim V = 1$, tendremos $V = M(g, \chi)$, $g \in Z(\Gamma)$ y χ un carácter tal que $\chi(g)$ tiene orden 4. Si Γ es no abeliano, tendremos $Z(\Gamma) \subseteq [\Gamma; \Gamma]$, por lo que toda representación irreducible de grado 1 se anula en el centro, y $\chi(g) = 1$. Esto dice que no hay álgebras de Hopf punteadas de dimensión 32 con corradical no abeliano de dimensión 8 y rango 1.

5.5.3.0.1. Observación. A su turno, esto explica por qué no hay tampoco álgebras de dimensión 16 punteadas y con corradical no abeliano, como se demuestra en [**CDR98**]. Es el mismo argumento el que explicaba en 5.4.1 que no hubiera ELC de rango 1 de dimensión p^5 (ó p^r en general) sobre grupos no abelianos de orden p^3.

Consideramos ahora el caso Γ abeliano.

5.5.3.0.2. Táctica. Usaremos el lema del diamante de la siguiente manera. Si Γ es abeliano y $\dim V = 1$, entonces $V = M(g, \chi)$ y, como en 5.1.7, tenemos $a = a_1 \in \mathcal{P}_{g,1}(A)$. Más aun, para que $\mathfrak{B}(V)$ sea de dimensión 4, debemos tener $\chi(g)$ de orden 4. Por 5.1.8, $a^4 \in \mathcal{P}_{g^4,1}(A) = \mathbf{k}(g^4 - 1)$ (como $\chi(g)$ tiene orden 4, esto implica que g^4 no coincide ni con g, ni g^2 ni g^3). Tenemos entonces A generada por Γ y a, con relaciones

$$tat^{-1} = \chi(t)a \ \forall t \in \Gamma, \qquad a^4 = \lambda(g^4 - 1).$$

Si $g^4 \neq 1$, tomando un múltiplo escalar de a, podemos suponer que $\lambda \in \{0, 1\}$. Usamos el lema del diamante para probar que A tiene dimensión 32, pero esto puede agregar alguna condición sobre λ. Sea $t \in \Gamma$. Tenemos

$$\begin{aligned} ta^4 &= \chi^4(t)a^4t = \chi^4(t)\lambda(g^4 - 1)t, \\ ta^4 &= t\lambda(g^4 - 1) = \lambda(g^4 - 1)t, \end{aligned}$$

de donde

$$\lambda(\chi^4(t) - 1)(g^4 - 1) = 0 \ \forall t \in \Gamma. \tag{5.5.3.0.3}$$

Si $g^4 = 1$ podemos tomar $\lambda = 0$, y luego la condición (5.5.3.0.3) puede ser escrita de la manera más compacta

$$\lambda(\chi^4 - 1) = 0. \tag{5.5.3.0.4}$$

Si Γ es abeliano y $\dim V = 2$, entonces $V = M(g_1, \chi_1) \oplus M(g_2, \chi_2)$. Tenemos, como en 5.1.7, $a_i \in \mathcal{P}_{g_i,1}(A)$, $ta_it^{-1} = \chi_i(t)a_i$. Como en 5.1.8, $a_i^2 \in \mathcal{P}_{g_i^2,1}(A)$ y $\mathrm{Ad}_{a_1}(a_2) = a_1a_2 - \chi_2(g_1)a_2a_1 \in \mathcal{P}_{g_1g_2,1}(A)$. Como $\mathfrak{B}(V)$ es de dimensión 4, por 2.5.1 es un Plano Cuántico, y tenemos $\chi_2(g_1)\chi_1(g_2) = 1$, $\chi_i(g_i) = -1$. Ahora, $g_1g_2 \neq g_1$ y $g_1g_2 \neq g_2$, porque si no $g_2 = 1$ ó $g_1 = 1$, contradiciendo $\chi_i(g_i) = -1$. Más aun, si $g_1^2 = g_2$, tendríamos

$$-1 = \chi_2(g_2) = \chi_2(g_1^2) = (\chi_2(g_1))^2 = (\chi_1(g_2))^{-2} = (\chi_1(g_1))^{-4} = (-1)^{-4} = 1,$$

lo que es absurdo. Luego $g_1^2 \neq g_2$, y análogamente $g_2^2 \neq g_1$. Entonces tenemos $\mathcal{P}_{g_i^2,1}(A) = \mathbf{k}(g_i^2 - 1)$ y $\mathcal{P}_{g_1g_2,1}(A) = \mathbf{k}(g_1g_2 - 1)$, y luego

$$a_i^2 = \lambda_i(g_i^2 - 1) \ (i = 1, 2), \qquad a_1a_2 - \chi_2(g_1)a_2a_1 = \lambda_3(g_1g_2 - 1). \tag{5.5.3.0.5}$$

De manera similar a (5.5.3.0.4), tenemos

$$\lambda_1(\chi_1^2 - 1) = 0, \quad \lambda_2(\chi_2^2 - 1) = 0. \tag{5.5.3.0.6}$$

Haciendo lo mismo con los monomios ta_2a_1, $t \in \Gamma$, llegamos a la condición

$$\lambda_3(\chi_1\chi_2 - 1) = 0. \tag{5.5.3.0.7}$$

Consideramos ahora grupo por grupo.

5.5.3.1. $\Gamma = C_2 \times C_2 \times C_2$. No hay módulos $M(g, \chi)$ de dimensión 1 en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ tales que $\chi(g)$ tenga orden 4, de donde el rango debe ser 2. Ahora, los módulos de YD que dan álgebras de Nichols de dimensión 2 son aquellos $M(g, \chi)$ tales que $\chi(g) = -1$, pero $\mathrm{Aut}(\Gamma) \simeq \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/2)$, y este grupo actúa transitivamente sobre estos módulos. Luego podemos suponer que $M_1 = M(g_1, \hat{g}_1)$. El subgrupo de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ que fija M_1 es isomorfo a $\mathbb{S}_3$, y está generado por

$$f_1 = (g_1 \mapsto g_1, g_2 \mapsto g_2g_3, g_3 \mapsto g_3), \quad f_2 = (g_1 \mapsto g_1, g_2 \mapsto g_2, g_3 \mapsto g_2g_3).$$

Luego consideramos la acción de este subgrupo sobre los módulos y elegimos un elemento en cada órbita:

$$Y_4^1 = M(g_1, \hat{g}_1),\ Y_4^2 = M(g_1, \hat{g}_1\hat{g}_2),\ Y_4^3 = M(g_1g_2, \hat{g}_1),\ Y_4^4 = M(g_1g_2, \hat{g}_1\hat{g}_3),$$
$$Y_4^5 = M(g_1g_2, \hat{g}_2),\ Y_4^6 = M(g_2, \hat{g}_2),\ Y_4^7 = M(g_2, \hat{g}_1\hat{g}_2).$$

Para dar los módulos no isomorfos después de tomar las sumas $Y_4^1 \oplus Y_4^i$, debemos tomar en cuenta la posibilidad de dar vuelta el orden, como en el lema 5.2.1. Los módulos $Y_4^1 \oplus Y_4^5$ y $Y_4^1 \oplus Y_4^7$ dan álgebras isomorfas cuando se bosoniza sus álgebras de Nichols, vía el automorfismo

$$(g_1 \mapsto g_2,\ g_2 \mapsto g_1g_2,\ g_3 \mapsto g_3),$$

y consideramos sólo $Y_4^1 \oplus Y_4^5$. Luego, la lista es

rango 2, $\Gamma = C_2 \times C_2 \times C_2$										
V	h_1	h_2	χ_1	χ_2	q_{11}	q_{12}	q_{21}	q_{22}	q_{ij}	$\dim \mathfrak{B}(V)$
V_4^1	g_1	g_1	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4
V_4^2	g_1	g_1	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1\hat{g}_2$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4
V_4^3	g_1	g_1g_2	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4
V_4^4	g_1	g_1g_2	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1\hat{g}_3$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4
V_4^5	g_1	g_1g_2	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_2$	-1	1	-1	-1	$[b^2]^\rho$	8
V_4^6	g_1	g_2	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_2$	-1	1	1	-1	b_1^1	4

Calculamos los levantamientos:

5.5.3.1.1. $V = V_4^1$. Tenemos, como en 5.1.7, $a_1, a_2 \in \mathcal{P}_{g_1,1}(A)$, y $g_1a_i = -a_ig_1$, $g_2a_i = a_ig_2$, $g_3a_i = a_ig_3$ para $i = 1, 2$. Por 5.1.8, tenemos $a_i^2 \in \mathcal{P}(A)$ y también $a_1a_2 + a_2a_1 \in \mathcal{P}(A)$, por lo que $a_i^2 = a_1a_2 + a_2a_1 = 0$, y hay un único levantamiento: la bosonización $\mathfrak{B}(V_4^1)\#\mathbf{k}\Gamma$.

5.5.3.1.2. $V = V_4^2$. Es similar al anterior, con la única diferencia de que $g_2a_2 = -a_2g_2$. El único levantamiento es la bosonización $\mathfrak{B}(V_4^2)\#\mathbf{k}\Gamma$.

5.5.3.1.3. $V = V_4^3$. En este caso $a_1 \in \mathcal{P}_{g_1,1}(A)$, $a_2 \in \mathcal{P}_{g_1g_2,1}(A)$ y Γ actúa por $g_1a_i = -a_ig_1$, $g_2a_i = a_ig_2$, $g_3a_i = a_ig_3$. Como antes, $a_i^2 \in \mathcal{P}(A)$, de donde $a_i^2 = 0$ para $i = 1, 2$. Sin embargo, $a_1a_2 + a_2a_1 \in \mathcal{P}_{g_2,1}(A)$, por lo que, como en (5.5.3.0.5), tenemos $a_1a_2 + a_2a_1 = \lambda_3(g_2 - 1)$. Tomando un múltiplo escalar de a_1, podemos suponer que $\lambda_3 = 0$ ó $\lambda_3 = 1$. Hay luego 2 levantamientos:

1. $a_i^2 = 0$, $a_1a_2 + a_2a_1 = 0$. Esta es la bosonización $\mathfrak{B}(V_4^3)\#\mathbf{k}\Gamma$.
2. $a_i^2 = 0$, $a_1a_2 + a_2a_1 = (g_2 - 1)$.

5.5.3.1.4. $V = V_4^4$. Es similar a V_4^3. Tenemos $a_1 \in \mathcal{P}_{g_1,1}(A)$, $a_2 \in \mathcal{P}_{g_1g_2,1}(A)$, y Γ actúa ahora por $g_1a_i = -a_ig_1$, $g_2a_i = a_ig_2$, $g_3a_1 = a_1g_3$, $g_3a_2 = -a_2g_3$. Como antes, $a_i^2 = 0$, $a_1a_2 + a_2a_1 = \lambda_3(g_2 - 1)$. Ahora, (5.5.3.0.7) dice que $\lambda_3 = 0$. Hay sólo un levantamiento: la bosonización $\mathfrak{B}(V_4^4)\#\mathbf{k}\Gamma$.

5.5.3.1.5. $V = V_4^6$. Ahora $a_1 \in \mathcal{P}_{g_1,1}(A)$, $a_2 \in \mathcal{P}_{g_2,1}(A)$ y Γ actúa por

$$g_1a_1 = -a_1g_1, \quad g_1a_2 = a_2g_1, \quad g_2a_1 = a_1g_2, \quad g_2a_2 = -a_2g_2, \quad g_3a_i = a_ig_3.$$

Como antes, $a_i^2 \in \mathcal{P}(A)$, de donde $a_i^2 = 0$. Más aun, $a_1a_2 - a_2a_1 \in \mathcal{P}_{g_1g_2,1}(A)$, por lo que $a_1a_2 - a_2a_1 = \lambda_3(g_1g_2 - 1)$. Ahora, (5.5.3.0.7) dice que $\lambda_3 = 0$. Hay un único levantamiento: la bosonización $\mathfrak{B}(V_4^6)\#\mathbf{k}\Gamma$.

5.5.3.2. $\Gamma = C_2 \times C_4$. Tenemos $\mathrm{Aut}(\Gamma) \simeq \mathbb{D}_4$ con generadores

$$f_1 = (g_1 \mapsto g_1 g_2^2,\ g_2 \mapsto g_1 g_2), \quad f_2 = (g_1 \mapsto g_1 g_2^2,\ g_2 \mapsto g_2),$$

y relaciones $f_1^4 = f_2^2 = 1$, $f_1 f_2 = f_2 f_1^3$. Luego hay 3 órbitas en Γ bajo la acción de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$: $\{g_2, g_1g_2, g_2^3, g_1g_2^3\}$, $\{g_1, g_1g_2^2\}$ y $\{g_2^2\}$. Hay 7 órbitas de módulos de YD irreducibles que dan álgebras de Nichols cuya dimensión es una potencia de 2. La siguiente es una lista de un elemento por cada órbita y el subgrupo de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ que fija el elemento elegido.

módulos / $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $\Gamma = C_2 \times C_4$				
$M(h,\chi)$	h	χ	$\dim \mathfrak{B}(M)$	$(\mathrm{Aut}(\Gamma))_M$
Y_5^1	g_2	$\hat{g}_2$	4	1
Y_5^2	g_2	$\hat{g}_2^2$	2	(f_2)
Y_5^3	g_2	$\hat{g}_2^3$	4	1
Y_5^4	g_2	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	2	(f_2)
Y_5^5	g_1	$\hat{g}_1\hat{g}_2^3$	2	$(f_2 f_1)$
Y_5^6	g_1	$\hat{g}_1$	2	(f_1^2)
Y_5^7	g_2^2	$\hat{g}_2$	2	$(f_1 f_2)$

Luego hay dos álgebras de Nichols de rango 1 y dimensión 4 sobre $C_2 \times C_4$. Vamos ahora al rango 2, i.e. $V = M_1 \oplus M_2$. Como $\dim \mathfrak{B}(M_i) = 2$, podemos suponer que M_1 es Y_5^2, Y_5^4, Y_5^5, Y_5^6 ó Y_5^7. Teniendo en cuenta 5.2.1, la lista es:

rango 2, $\Gamma = C_2 \times C_4$										
V	h_1	h_2	χ_1	χ_2	q_{11}	q_{12}	q_{21}	q_{22}	q_{ij}	$\dim \mathfrak{B}(V)$
V_5^1	g_2	g_2	$\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_2^2$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4
V_5^2	g_2	g_2	$\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4
V_5^3	g_2	g_2	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4
V_5^4	g_2	g_1g_2	$\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_2^2$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4
V_5^5	g_2	g_1g_2	$\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1$	-1	1	-1	-1	$[b^2]^\rho$	8
V_5^6	g_2	g_1g_2	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1$	-1	1	1	-1	b_1^1	4
V_5^7	g_2	g_2^3	$\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_2^2$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4
V_5^8	g_2	g_2^3	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_2^2$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4
V_5^9	g_2	g_2^3	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	-1	-1	-1	-1	b_{-1}^1	4
V_5^{10}	g_2	g_1	$\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1$	-1	1	1	-1	b_1^1	4
sigue en la próxima página										

viene de la página anterior										
V	h_1	h_2	χ_1	χ_2	q_{11}	q_{12}	q_{21}	q_{22}	q_{ij}	$\dim \mathfrak{B}(V)$
V_5^{11}	g_2	g_1	$\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	-1	-1	1	-1	b^2	8
V_5^{12}	g_2	g_1	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1$	-1	1	-1	-1	$[b^2]^\rho$	8
V_5^{13}	g_2	g_1	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_5^{14}	g_2	g_1	$\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^3$	-1	$-\mathbf{i}$	1	-1	$[b^3_{-+}]^\rho$	16
V_5^{15}	g_2	g_1	$\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2$	-1	$\mathbf{i}$	1	-1	$[b^3_{++}]^\rho$	16
V_5^{16}	g_2	g_1	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^3$	-1	$-\mathbf{i}$	-1	-1	$[b^3_{--}]^\rho$	16
V_5^{17}	g_2	g_1	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2$	-1	$\mathbf{i}$	-1	-1	$[b^3_{+-}]^\rho$	16
V_5^{18}	g_2	g_2^2	$\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2$	-1	$\mathbf{i}$	1	-1	$[b^3_{++}]^\rho$	16
V_5^{19}	g_2	g_2^2	$\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^3$	-1	$-\mathbf{i}$	1	-1	$[b^3_{-+}]^\rho$	16
V_5^{20}	g_2	g_2^2	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_2$	-1	$\mathbf{i}$	1	-1	$[b^3_{++}]^\rho$	16
V_5^{21}	g_2	g_2^2	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	$\hat{g}_2^3$	-1	$-\mathbf{i}$	1	-1	$[b^3_{-+}]^\rho$	16
V_5^{22}	g_2^2	g_2^2	$\hat{g}_2$	$\hat{g}_2$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_5^{23}	g_2^2	g_2^2	$\hat{g}_2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_5^{24}	g_2^2	g_2^2	$\hat{g}_2$	$\hat{g}_2^3$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_5^{25}	g_2^2	g_1	$\hat{g}_2$	$\hat{g}_1$	-1	1	1	-1	b^1_1	4
V_5^{26}	g_2^2	g_1	$\hat{g}_2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^3$	-1	-1	1	-1	b^2	8
V_5^{27}	g_2^2	g_1	$\hat{g}_1\hat{g}_2^3$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^3$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_5^{28}	g_2^2	g_1	$\hat{g}_1\hat{g}_2^3$	$\hat{g}_1\hat{g}_2$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_5^{29}	g_2^2	g_1	$\hat{g}_1\hat{g}_2$	$\hat{g}_1$	-1	1	-1	-1	$[b^2]^\rho$	8
V_5^{30}	g_2^2	g_1	$\hat{g}_2^3$	$\hat{g}_1$	-1	1	1	-1	b^1_1	4
V_5^{31}	g_2^2	$g_1g_2^2$	$\hat{g}_2$	$\hat{g}_1$	-1	1	-1	-1	$[b^2]^\rho$	8
V_5^{32}	g_1	g_1	$\hat{g}_1\hat{g}_2^3$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^3$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_5^{33}	g_1	g_1	$\hat{g}_1\hat{g}_2^3$	$\hat{g}_1\hat{g}_2$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_5^{34}	g_1	g_1	$\hat{g}_1\hat{g}_2^3$	$\hat{g}_1$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_5^{35}	g_1	g_1	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_5^{36}	g_1	g_1	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_5^{37}	g_1	$g_1g_2^2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^3$	$\hat{g}_2$	-1	1	1	-1	b^1_1	4
V_5^{38}	g_1	$g_1g_2^2$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^3$	$\hat{g}_1$	-1	-1	1	-1	b^2	8
V_5^{39}	g_1	$g_1g_2^2$	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_5^{40}	g_1	$g_1g_2^2$	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_1\hat{g}_2^2$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4

Calculamos los levantamientos. Para rango 1 tenemos

5.5.3.2.1. $V = Y_5^1$. Como en 5.1.7, $a \in \mathcal{P}_{g_2,1}(A)$, $g_1 a = a g_1$, $g_2 a = \mathbf{i} a g_2$. Por 5.1.8, $a^4 = 0$ y hay sólo un levantamiento: la bosonización $\mathfrak{B}(Y_5^1)\#\mathbf{k}\Gamma$.

5.5.3.2.2. $V = Y_5^3$. Es análogo al anterior, con la única diferencia de que $g_2 a = -\mathbf{i} a g_2$. Hay un único levantamiento: la bosonización $\mathfrak{B}(Y_5^3)\#\mathbf{k}\Gamma$.

Vamos ahora al rango 2. Como se explicó en 5.5.3.0.2, tenemos a_1, a_2 con $a_i \in \mathcal{P}_{h_i,1}(A)$, $t a_i t^{-1} = \chi_i(t) a_i$,

$$a_1^2 = \lambda_1(h_1^2 - 1), \quad a_2^2 = \lambda_2(h_2^2 - 1), \quad a_1 a_2 - \chi_2(h_1) a_2 a_1 = \lambda_3(h_1 h_2 - 1).$$

Antes de calcular los levantamientos, notamos algunos hechos.

5.5.3.2.3. Observación. En ciertos casos, algún elemento de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ intercambia M_1 y M_2. En esta situación el levantamiento correspondiente a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ es isomorfo al que corresponde a $(\lambda_2, \lambda_1, \pm\lambda_3)$ (el signo $\pm$ dependería de $\chi_2(h_1)$, pero en los casos en los que esto pasa resultará que $\lambda_3 = 0$).

5.5.3.2.4. Observación. En algunos casos $M_1 = M_2$, $h_1^2 \neq 1$ y $\chi_1^2 = 1$. En esos casos, sea W el subespacio generado por $\{a_1, a_2\}$. Podemos cambiar la base $\{a_1, a_2\}$ por cualquier otra base de W, y (al igual que en el caso W_3^1) tenemos una función cuadrática $f : W \to \mathbf{k}(h_1^2 - 1)$, $f(a) = a^2$. Como en aquel caso, A está caracterizada por el rango de esta función, por lo que habrá 3 levantamientos.

5.5.3.2.5. Observación. En el caso V_5^4 (y V_6^2, V_6^4 para $\Gamma = C_8$) no hay restricción para λ_1, λ_2 y λ_3. Si reemplazamos $\{a_1, a_2\}$ por $\{s a_1, t a_2\}$ ($s, t \in \mathbf{k}^\times$), entonces obtenemos un álgebra isomorfa pero con $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ reemplazados por $(s^2\lambda_1, t^2\lambda_2, st\lambda_3)$. Hay entonces infinitos levantamientos, que estan parametrizados por la variedad cociente $\mathbf{k}^3/\sim$, donde

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \sim (s^2\lambda_1, t^2\lambda_2, st\lambda_3), \qquad s, t \in \mathbf{k}^\times.$$

5.5.3.2.6. Observación. Si por alguna razón (por ejemplo 5.1.8 ó (5.5.3.0.6)) $\lambda_1 = 0$ ó $\lambda_2 = 0$ entonces tomando un múltiplo escalar de a_1 ó a_2 podemos suponer también que $\lambda_3 \in \{0, 1\}$.

La lista de los levantamientos (módulo isomorfismo) es la que sigue.

rango 2, $\Gamma = C_2 \times C_4$, levantamientos						
V	Lev.	$-q_{12}$	a_1^2	a_2^2	$a_1 a_2 - q_{12} a_2 a_1$	Observaciones
V_5^1	3	$+$	0	0	0	Ver 5.5.3.2.4
			$g_2^2 - 1$	0	0	
			$g_2^2 - 1$	$g_2^2 - 1$	0	
V_5^2	4	$+$	0	0	0	Ver 5.5.3.0.7
sigue en la próxima página						

viene de la página anterior

V	Lev.	$-q_{12}$	a_1^2	a_2^2	$a_1a_2 - q_{12}a_2a_1$	Observaciones
			g_2^2-1	0	0	
			0	g_2^2-1	0	
			g_2^2-1	g_2^2-1	0	
V_5^3	3	$+$	0	0	0	Ver 5.5.3.2.4
			g_2^2-1	0	0	
			g_2^2-1	g_2^2-1	0	
V_5^4	∞	$+$	$\lambda_1(g_2^2-1), \lambda_2(g_2^2-1), \lambda_3(g_1g_2^2-1)$ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)/\sim$			Ver 5.5.3.2.5
V_5^6	3	$-$	0	0	0	Ver 5.5.3.0.7 y 5.5.3.2.3
			g_2^2-1	0	0	
			g_2^2-1	g_2^2-1	0	
V_5^7	3	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8 y 5.5.3.2.3
			g_2^2-1	0	0	
			g_2^2-1	g_2^2-1	0	
V_5^8	4	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8
			g_2^2-1	0	0	
			0	g_2^2-1	0	
			g_2^2-1	g_2^2-1	0	
V_5^9	3	$+$	0	0	0	Ver 5.5.3.2.3
			g_2^2-1	0	0	
			g_2^2-1	g_2^2-1	0	
V_5^{10}	2	$-$	0	0	0	Ver 5.1.8 y 5.5.3.0.7
			g_2^2-1	0	0	
V_5^{13}	4	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8 y 5.5.3.2.6
			g_2^2-1	0	0	
			0	0	g_1g_2-1	
			g_2^2-1	0	g_1g_2-1	
V_5^{22}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8
V_5^{23}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8
V_5^{24}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8
V_5^{25}	1	$-$	0	0	0	Ver 5.1.8 y 5.5.3.0.7
V_5^{27}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8 y 5.5.3.0.7
V_5^{28}	2	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8 y 5.5.3.2.6

sigue en la próxima página

viene de la página anterior						
V	Lev.	$-q_{12}$	a_1^2	a_2^2	$a_1a_2 - q_{12}a_2a_1$	Observaciones
			0	0	$g_1g_2^2 - 1$	
V_5^{30}	1	$-$	0	0	0	Ver 5.1.8 y 5.5.3.0.7
V_5^{32}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8
V_5^{33}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8
V_5^{34}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8
V_5^{35}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8
V_5^{36}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8
V_5^{37}	1	$-$	0	0	0	Ver 5.1.8 y 5.5.3.0.7
V_5^{39}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8 y 5.5.3.2.6
			0	0	$g_2^2 - 1$	
V_5^{40}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8 y 5.5.3.0.7

5.5.3.3. $\Gamma = C_8$. Tenemos $\mathrm{Aut}(\Gamma) \simeq C_2 \times C_2$, generado por

$$f_1 = (g \mapsto g^3), \quad f_2 = (g \mapsto g^5).$$

Las órbitas de Γ son $\{g, g^3, g^5, g^7\}$, $\{g^2, g^6\}$ y $\{g^4\}$. Hay 12 órbitas de módulos irreducibles que dan álgebras de Nichols de dimensión una potencia de 2. Elegimos un elemento en cada una:

módulos / $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $\Gamma = C_8$			
$M(h,\chi)$	h	χ	$\dim \mathfrak{B}(M)$
Y_6^1	g	$\hat{g}$	8
Y_6^2	g	$\hat{g}^3$	8
Y_6^3	g	$\hat{g}^5$	8
Y_6^4	g	$\hat{g}^7$	8
Y_6^5	g	$\hat{g}^2$	4
Y_6^6	g	$\hat{g}^6$	4
Y_6^7	g	$\hat{g}^4$	2
Y_6^8	g^2	$\hat{g}$	4
Y_6^9	g^2	$\hat{g}^3$	4
Y_6^{10}	g^2	$\hat{g}^2$	2
Y_6^{11}	g^2	$\hat{g}^6$	2
Y_6^{12}	g^4	$\hat{g}$	2

Luego hay 4 álgebras de Nichols de dimensión 4 de rango 1 distintas. Ahora, para rango 2, suponemos que M_1 es Y_6^7, Y_6^{10}, Y_6^{11} ó Y_6^{12}. Tenemos las siguientes posibilidades (tomando en cuenta 5.2.1).

rango 2, $\Gamma = C_8$										
V	h_1	h_2	χ_1	χ_2	q_{11}	q_{12}	q_{21}	q_{22}	q_{ij}	$\dim \mathfrak{B}(V)$
V_6^1	g	g	$\hat{g}^4$	$\hat{g}^4$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_6^2	g	g^3	$\hat{g}^4$	$\hat{g}^4$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_6^3	g	g^7	$\hat{g}^4$	$\hat{g}^4$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_6^4	g	g^5	$\hat{g}^4$	$\hat{g}^4$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_6^5	g	g^2	$\hat{g}^4$	$\hat{g}^2$	-1	$\mathbf{i}$	1	-1	$[b^3_{++}]^\rho$	16
V_6^6	g	g^2	$\hat{g}^4$	$\hat{g}^6$	-1	$-\mathbf{i}$	1	-1	$[b^3_{-+}]^\rho$	16
V_6^7	g	g^6	$\hat{g}^4$	$\hat{g}^2$	-1	$\mathbf{i}$	1	-1	$[b^3_{++}]^\rho$	16
V_6^8	g	g^6	$\hat{g}^4$	$\hat{g}^6$	-1	$-\mathbf{i}$	1	-1	$[b^3_{-+}]^\rho$	16
V_6^9	g	g^4	$\hat{g}^4$	$\hat{g}$	-1	ξ	1	-1	$[b^6_1]^\rho$	32
V_6^{10}	g	g^4	$\hat{g}^4$	$\hat{g}^3$	-1	ξ^3	1	-1	$[b^6_3]^\rho$	32
V_6^{11}	g	g^4	$\hat{g}^4$	$\hat{g}^7$	-1	ξ^7	1	-1	$[b^6_7]^\rho$	32
V_6^{12}	g	g^4	$\hat{g}^4$	$\hat{g}^5$	-1	ξ^5	1	-1	$[b^6_5]^\rho$	32
V_6^{13}	g^2	g^2	$\hat{g}^2$	$\hat{g}^2$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_6^{14}	g^2	g^2	$\hat{g}^2$	$\hat{g}^6$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_6^{15}	g^2	g^2	$\hat{g}^6$	$\hat{g}^6$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_6^{16}	g^2	g^6	$\hat{g}^2$	$\hat{g}^6$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_6^{17}	g^2	g^6	$\hat{g}^6$	$\hat{g}^6$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_6^{18}	g^2	g^6	$\hat{g}^6$	$\hat{g}^2$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_6^{19}	g^4	g^2	$\hat{g}$	$\hat{g}^2$	-1	1	$\mathbf{i}$	-1	b^3_{++}	16
V_6^{20}	g^4	g^2	$\hat{g}$	$\hat{g}^6$	-1	1	$\mathbf{i}$	-1	b^3_{++}	16
V_6^{21}	g^4	g^6	$\hat{g}$	$\hat{g}^6$	-1	1	$-\mathbf{i}$	-1	b^3_{-+}	16
V_6^{22}	g^4	g^6	$\hat{g}$	$\hat{g}^2$	-1	1	$-\mathbf{i}$	-1	b^3_{-+}	16
V_6^{23}	g^4	g^4	$\hat{g}$	$\hat{g}$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_6^{24}	g^4	g^4	$\hat{g}$	$\hat{g}^3$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_6^{25}	g^4	g^4	$\hat{g}$	$\hat{g}^7$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4
V_6^{26}	g^4	g^4	$\hat{g}$	$\hat{g}^5$	-1	-1	-1	-1	b^1_{-1}	4

Calculamos ahora los levantamientos. Para rango 1 tenemos las siguientes álgebras, donde tomamos $a \in \mathcal{P}_{h,1}(A)$ como en 5.5.3.0.2.

rango 1, $\Gamma = C_8$				
V	h	χ	a^4	Observaciones
Y_6^5	g	$\hat{g}^2$	0	
			$g^4 - 1$	
sigue en la próxima página				

viene de la página anterior				
V	h	χ	a^4	Observaciones
Y_6^6	g	$\hat{g}^6$	0	
			g^4-1	
Y_6^8	g^2	$\hat{g}$	0	Ver (5.1.8)
Y_6^9	g^2	$\hat{g}^3$	0	Ver (5.1.8)

rango 2, $\Gamma = C_8$, levantamientos						
V	Lev.	$-q_{12}$	a_1^2	a_2^2	$a_1a_2 - q_{12}a_2a_1$	Observaciones
V_6^1	3	$+$	0	0	0	Ver 5.5.3.2.4
			g^2-1	0	0	
			g^2-1	g^2-1	0	
V_6^2	∞	$+$	$\lambda_1(g^2-1), \lambda_2(g^6-1), \lambda_3(g^4-1)$			Ver 5.5.3.2.5
			$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)/\sim$			
V_6^3	3	$+$	0	0	0	Ver 5.5.3.2.3
			g^2-1	0	0	
			g^2-1	g^6-1	0	
V_6^4	∞	$+$	$\lambda_1(g^2-1), \lambda_2(g^2-1), \lambda_3(g^6-1)$			Ver 5.5.3.2.5
			$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)/\sim$			
V_6^{13}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.5.3.0.6 y 5.5.3.0.7
V_6^{14}	2	$+$	0	0	0	Ver 5.5.3.0.6 y 5.5.3.2.6
			0	0	g^4-1	
V_6^{15}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.5.3.0.6 y 5.5.3.0.7
V_6^{16}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8 y 5.5.3.0.6
V_6^{17}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8 y 5.5.3.0.6
V_6^{18}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.5.3.0.6 y 5.5.3.0.7
V_6^{23}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8
V_6^{24}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8
V_6^{25}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8
V_6^{26}	1	$+$	0	0	0	Ver 5.1.8

5.5.3.4. $\Gamma = \mathbb{D}_4$. Tomamos $\mathbb{D}_4$ generado por r y σ con relaciones $r^4 = \sigma^2 = 1$, $\sigma r = r^3\sigma$. Las clases de conjugación de Γ son $\{1\}$, $\{r^2\}$, $\{\sigma, r^2\sigma\}$, $\{r\sigma, r^3\sigma\}$ y $\{r, r^3\}$. Como se explicó en 5.5.0.2, hay 2 posibilidades para V. Para el caso 5.5.0.2.2, g debe estar en una clase de conjugación con 2 elementos, y luego podemos tomar $g = \sigma$, $g = r\sigma$ o $g = r$. Sin embargo, los casos $g = \sigma$ y $g = r\sigma$ dan álgebras isomorfas una vez bosonizadas, por medio del morfismo

$(r \mapsto r,\ \sigma \mapsto r\sigma)$, y luego sólo tomamos los casos $g = \sigma$ y $g = r$. Los subgrupos de isotropía son

$$\Gamma_\sigma = \{1, \sigma, r^2, r^2\sigma\} \simeq C_2 \times C_2, \qquad \Gamma_r = \{1, r, r^2, r^3\} \simeq C_4.$$

El caso 5.5.0.2.3 aparece tomando $g = r^2$ y $\rho = \rho_0$ la representación irreducible dada por

$$\rho_0(r) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_0(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La que sigue es la lista de los módulos de YD que dan álgebras de Nichols de dimensión 4:

$\Gamma = \mathbb{D}_4$				
$M(h,\rho)$	h	ρ	$q_{12} = q_{21}$	$\dim \mathfrak{B}(M)$
Y_7^1	σ	$\sigma \mapsto -1, \quad r^2 \mapsto 1$	-1	4
Y_7^2	σ	$\sigma \mapsto -1, \quad r^2 \mapsto -1$	1	4
Y_7^3	r	$r \mapsto -1$	-1	4
Y_7^4	r^2	ρ_0	-1	4

Calculamos los levantamientos. A pesar de que podemos poner condiciones generales como en (5.5.3.0.7), será más simple usar el lema del diamante en cada caso.

5.5.3.4.1. $V = Y_7^1$. Como en 5.5.0.3, $a \in \mathcal{P}_{\sigma,1}(A)$ y $b = rar^3 \in \mathcal{P}_{r^2\sigma,1}(A)$. Como

$$\begin{aligned} &\sigma \rightharpoonup x = -x, \quad r \rightharpoonup x = y, \quad r \rightharpoonup y = r^2 \rightharpoonup x = x, \\ &\sigma \rightharpoonup y = \sigma r \rightharpoonup x = r^3\sigma \rightharpoonup x = r(r^2\sigma) \rightharpoonup x = -r \rightharpoonup x = -y, \end{aligned}$$

tenemos

$$\sigma a \sigma = -a, \quad rar^3 = b, \quad \sigma b \sigma = -b, \quad rbr^3 = a.$$

Por 5.1.8, $a^2 = b^2 = 0$, y $ab + ba \in \mathcal{P}_{r^2,1}(A)$, de donde (tomando un múltiplo escalar de a ó de b), tenemos $ab + ba = \lambda(r^2 - 1)$, con $\lambda \in \{0, 1\}$. Luego, hay 2 levantamientos:

1. $a^2 = b^2 = 0$, $ab + ba = 0$. Esta es la bosonización $\mathfrak{B}(Y_7^1)\#\mathbf{k}\Gamma$.
2. $a^2 = b^2 = 0$, $ab + ba = (r^2 - 1)$.

5.5.3.4.2. $V = Y_7^2$. Similar al caso Y_7^1, $a \in \mathcal{P}_{\sigma,1}(A)$ y $b = rar^3 \in \mathcal{P}_{r^2\sigma,1}(A)$ tales que

$$\sigma a \sigma = -a, \quad rar^3 = b, \quad \sigma b \sigma = b, \quad rbr^3 = -a.$$

Como en aquel caso, $a^2 = b^2 = 0$ por 5.1.8, y $ab - ba = \lambda(r^2 - 1)$ con $\lambda \in \{0, 1\}$, pero ahora el lema del diamante se aplica:

$$0 = bba = bab - \lambda b(r^2 - 1) = abb - \lambda(r^2 - 1)b - \lambda b(r^2 - 1) = 2\lambda b,$$

de donde $\lambda = 0$ para que A sea de dimensión 32.

Luego hay un único levantamiento: la bosonización $\mathfrak{B}(Y_7^2)\#\mathbf{k}\Gamma$.

5.5.3.4.3. $V = Y_7^3$. Por 5.5.0.3, tenemos aquí $a \in \mathcal{P}_{r,1}(A)$, $b = \sigma a \sigma \in \mathcal{P}_{r^3,1}(A)$, y

$$rar^3 = -a, \quad rbr^3 = -b, \quad \sigma a \sigma = b, \quad \sigma b \sigma = a.$$

Tenemos ahora $a^2 = \lambda_1(r^2 - 1)$, $b^2 = \lambda_2(r^2 - 1)$. Como $ab + ba \in \mathcal{P}(A)$ entonces $ab + ba = 0$ por 5.1.8. Podemos tomar $\lambda_i \in \{0, 1\}$, por lo que tenemos 4 levantamientos. Sin embargo, el automorfismo $r \mapsto r^3$, $\sigma \mapsto \sigma$ da un isomorfismo entre el álgebra que corresponde a $(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1)$ y la de $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0)$, y luego hay 3 levantamientos no isomorfos:

1. $a^2 = 0$, $b^2 = 0$, $ab + ba = 0$. Esta es la bosonización $\mathfrak{B}(Y_7^3)\#\mathbf{k}\Gamma$.
2. $a^2 = (r^2 - 1)$, $b^2 = 0$, $ab + ba = 0$.
3. $a^2 = (r^2 - 1)$, $b^2 = (r^2 - 1)$, $ab + ba = 0$.

5.5.3.4.4. $V = Y_7^4$. Como en 5.5.0.4 (con $t = r$), tenemos aquí $a, b \in \mathcal{P}_{r^2,1}(A)$, con

$$rar^3 = b, \quad rbr^3 = -a, \quad \sigma a \sigma = b, \quad \sigma b \sigma = a.$$

Por 5.1.8, tenemos $a^2 = b^2 = ab + ba = 0$, y luego hay un único levantamiento: la bosonización $\mathfrak{B}(Y_7^4)\#\mathbf{k}\Gamma$.

5.5.3.5. $\Gamma = \mathbb{H}$. Tomamos $\mathbb{H} = \{e, (-e), \underline{i}, -\underline{i}, \underline{j}, -\underline{j}, \underline{k}, -\underline{k}\}$ con las relaciones estándar $\underline{i}\underline{j} = \underline{k}$, etc. Las clases de conjugación son $\{e\}$, $\{(-e)\}$, $\{\underline{i}, -\underline{i}\}$, $\{\underline{j}, -\underline{j}\}$ y $\{\underline{k}, -\underline{k}\}$. Como las últimas tres clases dan álgebras isomorfas vía los morfismos

$$(\underline{i} \mapsto \underline{j} \mapsto \underline{k} \mapsto \underline{i}) \quad \text{and} \quad (\underline{i} \mapsto -\underline{i},\ \underline{j} \mapsto -\underline{j},\ \underline{k} \mapsto -\underline{k}),$$

módulo isomorfismo hay un solo caso como en 5.5.0.2.2, que está dado por $g = \underline{i}$, $\chi(\underline{i}) = -1$.

Hay un único caso como en 5.5.0.2.3, que está dado por $g = (-e)$, $\rho = \rho_0$, donde

$$\rho_0(\underline{i}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \rho_0(\underline{j}) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}, \ \rho_0(\underline{k}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

La lista de las álgebras de Nichols que dan álgebras no isomorfas una vez bosonizadas es entonces

$\Gamma = \mathbb{H}$				
$M(h,\rho)$	h	ρ	$q_{12} = q_{21}$	$\dim \mathfrak{B}(M)$
Y_8^1	$\underline{i}$	$\underline{i} \mapsto -1$	-1	4
Y_8^2	$(-e)$	ρ_0	-1	4

Los levantamientos son:

5.5.3.5.1. $V = Y_8^1$. Como en 5.5.0.3, $a \in \mathcal{P}_{\underline{i},1}(A)$ y $b = \underline{j}a(-\underline{j}) \in \mathcal{P}_{-\underline{i},1}(A)$, con la acción dada por

$$\underline{i}a(-\underline{i}) = -a, \quad \underline{j}a(-\underline{j}) = b, \quad \underline{k}a(-\underline{k}) = -b,$$
$$\underline{i}b(-\underline{i}) = -b, \quad \underline{j}b(-\underline{j}) = a, \quad \underline{k}b(-\underline{k}) = -a.$$

Tenemos $\lambda_1, \lambda_2 \in \{0,1\}$ tales que $a^2 = \lambda_1((-e)-1)$, $b^2 = \lambda_2((-e)-1)$. Como $ab + ba \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow ab + ba = 0$. Sin embargo, aplicando el lema del diamante obtenemos que $\lambda_1 = \lambda_2$, ya que

$$\underline{j}a^2 = \lambda_1\underline{j}((-e)-1) = \lambda_1((-\underline{j}) - \underline{j}),$$
$$\underline{j}a^2 = b\underline{j}a = b^2\underline{j} = \lambda_2((-e)-1)\underline{j} = \lambda_2((-\underline{j}) - \underline{j}).$$

Luego, hay dos levantamientos:

1. $a^2 = 0$, $b^2 = 0$, $ab + ba = 0$. Esta es la bosonización $\mathfrak{B}(Y_8^1)\#\mathbf{k}\Gamma$.
2. $a^2 = ((-e)-1)$, $b^2 = ((-e)-1)$, $ab + ba = 0$.

5.5.3.5.2. $V = Y_8^2$. Como en 5.5.0.4 tenemos $a, b \in \mathcal{P}_{-e,1}(A)$ con la acción dada por

$$\underline{i}a(-\underline{i}) = b, \qquad \underline{j}a(-\underline{j}) = \mathbf{i}a, \qquad \underline{k}a(-\underline{k}) = \mathbf{i}b,$$
$$\underline{i}b(-\underline{i}) = -a, \quad \underline{j}b(-\underline{j}) = -\mathbf{i}b, \quad \underline{k}b(-\underline{k}) = \mathbf{i}a.$$

Por 5.1.8, tenemos $a^2 = b^2 = 0$, y $ab+ba = 0$, y luego hay un único levantamiento: la bosonización $\mathfrak{B}(Y_8^2)\#\mathbf{k}\Gamma$.

5.5.4. Γ orden 16.

Ahora $\dim \mathfrak{B}(V) = 2$, de donde debemos tener $V = M(h,\chi)$, $h \in Z(\Gamma)$ y χ un carácter tal que $\chi(h) = -1$. Luego, para que Γ tenga módulos de Yetter–Drinfeld V con $\dim \mathfrak{B}(V) = 2$, es necesario que $Z(\Gamma) \not\subset [\Gamma;\Gamma]$. Hay 14 grupos de orden 16. Entre ellos 3 no verifican esta condición.

Como se explicó en 5.1.7, tomamos $a \in \mathcal{P}_{h,1}(A)$ tal que $ga = \chi(g)ag$ para $g \in \Gamma$. Más aun, existe $\lambda \in \{0,1\}$ tal que $a^2 = \lambda(h^2-1)$. Análogamente a (5.5.3.0.4), para que A tenga dimensión 32 tenemos

$$\lambda g(h^2-1) = ga^2 = \chi^2(g)a^2g = \lambda\chi^2(g)(h^2-1)g \quad \forall g \in \Gamma$$

de donde $\lambda(\chi^2(g)-1)(h^2-1)=0$. Combinando esto con 5.1.8 obtenemos

$$\lambda(\chi^2-1)=0. \tag{5.5.4.0.1}$$

5.5.4.1. $\Gamma = C_2\times C_2\times C_2\times C_2$. Como en el caso $\Gamma = C_2\times C_2\times C_2$, el grupo $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ actúa transitivamente en los módulos V tales que $\dim \mathfrak{B}(V)=2$, por lo que tenemos sólo un álgebra después de bosonizar. Tomamos $V=M(g_1,\hat{g}_1)$. Por 5.1.8, hay un único levantamiento: la bosonización $\mathfrak{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma$.

5.5.4.2. $\Gamma = C_2\times C_2\times C_4$. Hay 4 órbitas con respecto a la acción de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$: $\{1\}$, $\{g_3^2\}$, $\{g_1^ig_2^jg_3^k,\ (i,j)\neq(0,0),\ k=0,2\}$, $\{g_1^ig_2^jg_3^k,\ k=1,3\}$. La primera órbita, como siempre, no da un álgebra de Nichols de dimensión 2. Para las otras, tenemos la siguiente lista de módulos de YD que dan álgebras no isomorfas cuando se las bosoniza (incluimos sólo los casos $\dim\mathfrak{B}(V)=2$). Ponemos también sus correspondientes levantamientos:

$\Gamma = C_2\times C_2\times C_4$, levantamientos					
$M(h,\chi)$	Levant.	h	χ	a^2	Observaciones
Y_9^1	1	g_3^2	$\hat{g}_3$	0	Ver 5.1.8
Y_9^2	1	g_1	$\hat{g}_1$	0	Ver 5.1.8
Y_9^3	1	g_1	$\hat{g}_1\hat{g}_3$	0	Ver 5.1.8
Y_9^4	2	g_3	$\hat{g}_3^2$	0	
				(g_3^2-1)	
Y_9^5	2	g_3	$\hat{g}_1\hat{g}_3^2$	0	
				(g_3^2-1)	

5.5.4.3. $\Gamma = C_4\times C_4$. Las órbitas son $\{1\}$, $\{g_1^2, g_1^2g_2^2, g_2^2\}$, $\{g_1^ig_2^j,\ \ 2\nmid i \text{ ó } 2\nmid j\}$. Las posibilidades son

$\Gamma = C_4\times C_4$, levantamientos					
$M(h,\chi)$	Levant.	h	χ	a^2	Observaciones
Y_{10}^1	2	g_1	$\hat{g}_1^2$	0	
				(g_1^2-1)	
Y_{10}^2	1	g_1	$\hat{g}_1^2\hat{g}_2$	0	Ver 5.5.4.0.1
Y_{10}^3	1	g_1^2	$\hat{g}_1$	0	Ver 5.1.8

5.5.4.4. $\Gamma = C_2 \times C_8$. Las órbitas son $\{1\}$, $\{g_2^4\}$, $\{g_1 g_2^2, g_1 g_2^6\}$, $\{g_1, g_1 g_2^4\}$, $\{g_2^2, g_2^6\}$, $\{g_1^i g_2^j,\ j = 1, 3, 5, 7\}$. La lista es

$\Gamma = C_2 \times C_8$, levantamientos					
$M(h,\chi)$	Levant.	h	χ	a^2	Observaciones
Y_{11}^1	1	g_2^4	$\hat{g}_2$	0	Ver 5.1.8
Y_{11}^2	2	$g_1 g_2^2$	$\hat{g}_1$	0	
				$(g_2^4 - 1)$	
Y_{11}^3	1	$g_1 g_2^2$	$\hat{g}_2^2$	0	Ver 5.5.4.0.1
Y_{11}^4	1	g_1	$\hat{g}_1$	0	Ver 5.1.8
Y_{11}^5	1	g_1	$\hat{g}_1 \hat{g}_2^2$	0	Ver 5.1.8
Y_{11}^6	1	g_1	$\hat{g}_1 \hat{g}_2$	0	Ver 5.1.8
Y_{11}^7	1	g_2^2	$\hat{g}_2^2$	0	Ver 5.5.4.0.1
Y_{11}^8	1	g_2^2	$\hat{g}_2^6$	0	Ver 5.5.4.0.1
Y_{11}^9	1	g_2^2	$\hat{g}_1 \hat{g}_2^2$	0	Ver 5.5.4.0.1
Y_{11}^{10}	2	g_2	$\hat{g}_2^4$	0	
				$(g_2^2 - 1)$	
Y_{11}^{11}	2	g_2	$\hat{g}_1 \hat{g}_2^4$	0	
				$(g_2^2 - 1)$	

5.5.4.5. $\Gamma = C_{16}$. Las órbitas son

$$\{1\},\ \{g^8\},\ \{g^4, g^{12}\},\ \{g^2, g^6, g^{10}, g^{14}\},\ \{g^i,\ \ 2 \nmid i\}.$$

La lista es

$\Gamma = C_{16}$, levantamientos					
$M(h,\chi)$	Levant.	h	χ	a^2	Observaciones
Y_{12}^1	1	g^8	$\hat{g}$	0	Ver 5.1.8
Y_{12}^2	1	g^4	$\hat{g}^2$	0	Ver 5.5.4.0.1
Y_{12}^3	1	g^4	$\hat{g}^6$	0	Ver 5.5.4.0.1
Y_{12}^4	1	g^2	$\hat{g}^4$	0	Ver 5.5.4.0.1
Y_{12}^5	1	g^2	$\hat{g}^{12}$	0	Ver 5.5.4.0.1
Y_{12}^6	2	g	$\hat{g}^8$	0	
				$(g^2 - 1)$	

5.5.4.6. *Grupos no abelianos.* Como se dijo antes, los grupos no abelianos que verifican $Z(\Gamma) \not\subset [\Gamma; \Gamma]$ son 6, y pueden ser presentados en la siguientes lista:

Grupos no abelianos de orden 16				
Grupo	Generadores, relaciones	$Z(\Gamma)$	$[\Gamma;\Gamma]$	Γ_{ab}
B_1	$(g_1,g_2)/(g_1^8, g_2^2, g_2g_1g_2g_1^3)$	(g_1^2)	(g_1^4)	$C_4\times C_2$
B_2	$(g_1,g_2,g_3)/R_2$	(g_1)	(g_1^2)	$C_2\times C_2\times C_2$
B_3	$(g_1,g_2)/(g_1^4, g_2^4, g_2g_1g_2^3g_1)$	(g_1^2,g_2^2)	(g_1^2)	$C_2\times C_4$
$B_4=\mathbb{D}_4\times C_2$	(r,σ,t)	(t,r^2)	(r^2)	$C_2\times C_2\times C_2$
B_5	$(g_1,g_2,g_3)/R_5$	(g_1^2,g_2)	(g_2)	$C_4\times C_2$
$B_6=\mathbb{H}\times C_2$	$(\underline{i},\underline{j},t)$	$(t,-e)$	$(-e)$	$C_2\times C_2\times C_2$

donde ponemos para B_2 y B_5 los subgrupos R_2 y R_5 generados por los elementos

$$R_2:\quad g_1^4,\ g_2^2,\ g_3^2,\ [g_1;g_2],\ [g_1;g_3],\ [g_3;g_2]g_1^2,$$
$$R_5:\quad g_1^4,\ g_2^2,\ g_3^2,\ [g_1;g_2],\ [g_3;g_2],\ [g_1;g_3]g_2.$$

El nombre B_i corresponde a la clasificación de [**Bur55**, Sect. 118]. En estos grupos, tenemos $[\Gamma;\Gamma]\subset Z(\Gamma)$, $(Z(\Gamma)-[\Gamma;\Gamma])=\{h_1,h_2\}$. Luego, hay sólo dos posibilidades para g en cada grupo.

Para $\Gamma=B_4$, por ejemplo, $g_1=t$ y $g_2=r^2t$. Como el automorfismo

$$(r\mapsto r,\ \sigma\mapsto\sigma,\ t\mapsto r^2t)$$

manda g_1 a g_2, consideramos sólo $g=t$. Hay 4 caracteres $\chi\in\widehat{\Gamma}$ tales que $\chi(t)=-1$. Están dados por

$$\chi(t)=-1,\quad \chi(r)=\pm1,\quad \chi(\sigma)=\pm1.$$

Sin embargo, los automorfismos

$$(t\mapsto t,\ r\mapsto t^ir,\ \sigma\mapsto t^j\sigma)\quad i,j=0,1$$

actúan transitivamente en estas representaciones, por lo que tenemos solamente un álgebra.

Haciendo el mismo análisis con los otros grupos, llegamos a la siguiente lista (tomamos a como se explica al comienzo de 5.5.4):

Γ no abeliano de orden 16, levantamientos							
Grupo	$M(h,\chi)$	Lev.	h	χ		a^2	Obs.
B_1	Y_{13}^1	1	g_1^2	$\chi(g_1)=\mathbf{i}$	$\chi(g_2)=1$	0	Ver 5.5.4.0.1
B_1	Y_{13}^2	1	g_1^2	$\chi(g_1)=\mathbf{i}$	$\chi(g_2)=-1$	0	Ver 5.5.4.0.1
B_1	Y_{13}^3	1	g_1^2	$\chi(g_1)=-\mathbf{i}$	$\chi(g_2)=1$	0	Ver 5.5.4.0.1
B_1	Y_{13}^4	1	g_1^2	$\chi(g_1)=-\mathbf{i}$	$\chi(g_2)=-1$	0	Ver 5.5.4.0.1
sigue en la próxima página							

viene de la página anterior							
Grupo	$M(h,\chi)$	Lev.	h	χ		a^2	Obs.
B_2	Y_{13}^5	2	g_1	$\chi(g_1)=-1$	$\chi(g_2)=1$	0	
					$\chi(g_3)=1$	g_1^2-1	
B_2	Y_{13}^6	2	g_1	$\chi(g_1)=-1$	$\chi(g_2)=-1$	0	
					$\chi(g_3)=-1$	g_1^2-1	
B_3	Y_{13}^7	1	g_2^2	$\chi(g_1)=1$	$\chi(g_2)=\mathbf{i}$	0	Ver 5.1.8
B_3	Y_{13}^8	1	$g_1^2g_2^2$	$\chi(g_1)=1$	$\chi(g_2)=\mathbf{i}$	0	Ver 5.1.8
B_4	Y_{13}^9	1	t	$\chi(t)=-1$	$\chi(r)=1$	0	Ver 5.1.8
					$\chi(\sigma)=1$		
B_5	Y_{13}^{10}	1	g_1^2	$\chi(g_1)=\mathbf{i}$	$\chi(g_2)=1$	0	Ver 5.1.8
					$\chi(g_3)=1$		
B_6	Y_{13}^{11}	1	t	$\chi(t)=-1$	$\chi(\underline{i})=1$	0	Ver 5.1.8
					$\chi(\underline{i})=1$		

CAPíTULO 6

Últimas consideraciones

6.1. Teorías Homológicas

Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana con sumas numerables. Un complejo es una cadena de objetos de $\mathcal{C}$

$$\mathbf{M} = \cdots \leftarrow M_{i-1} \xleftarrow{\partial_i} M_i \xleftarrow{\partial_{i+1}} M_{i+1} \leftarrow \cdots$$

tal que $\partial^2 = 0$, es decir, $\partial_i \partial_{i+1} = 0 \ \forall i$. Se denota $H_i(\mathbf{M}) = \ker \partial_i / \operatorname{Im} \partial_{i+1}$. Usaremos $\mathbf{M}$ para referirnos al complejo y también a la suma $\mathbf{M} = \oplus_i M_i \in \mathcal{C}$. Supongamos que $\mathcal{C}$ es monoidal y que el cuerpo $\mathbf{k}$ es la unidad de la estructura monoidal. Consideremos $H = \mathbf{k}\mathbb{Z}$ como álgebra de Hopf. Por comodidad en la notación diremos que g genera $\mathbb{Z}$ y escribiremos su estructura en forma multiplicativa, esto es, H tiene base $\{g^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Entonces, por ser $\mathbf{M}$ un objeto $\mathbb{Z}$-graduado, es claro que es un H-comódulo, digamos a izquierda (la coacción es simplemente $\delta(m) = g^i \otimes m$ si $m \in M_i$). Si tomamos el álgebra $A = \mathbf{k}1 \oplus \mathbf{k}\partial$ con estructura dada por $\partial^2 = 0$, entonces es claro que $\mathbf{M}$ es un A-módulo a derecha, con acción $m \times \partial = \partial_i(m)$ si $m \in M_i$. Por otra parte, A es un H-comódulo álgebra, con estructura dada por $\delta(\partial) = g^{-1} \otimes \partial$. El hecho de que ∂ sea un morfismo de grado -1 en $\mathbf{M}$ se refleja en que la coacción de H y la acción de A verifican la relación de compatibilidad

$$(ma)_{(-1)} \otimes (ma)_{(0)} = m_{(-1)} a_{(-1)} \otimes m_{(0)} a_{(0)}. \tag{6.1.1}$$

En otro lenguaje, $\mathbf{M}$ es un módulo de Doi–Hopf, como está definido por ejemplo en [**BDRvO98**]. En este caso la coálgebra C coincide con H.

6.1.2. Observación. Se podría haber dualizado A y haber presentado una coálgebra construida a partir de H y A^*, y haber dicho que $\mathbf{M}$ era simplemente un comódulo sobre esa coálgebra. Usamos en cambio una presentación similar a la de los módulos de Doi–Hopf porque parece más natural.

La intención, como dijimos, es generalizar la estructura de un complejo de cadenas. Una generalización "extrema" es, como en la observación, tomar la teoría de los módulos de Doi–Hopf, pero esto sería excesivamente general como para dar resultados útiles. Observamos que A no es otra cosa que $\mathfrak{B}(V)$, con V

el módulo de dimensión 1 con base ∂ y trenza $c(\partial \otimes \partial) = -\partial \otimes \partial$. Llegamos entonces a

6.1.3. Definición. Sea H un álgebra de Hopf, (V, c) un PTR y $A = \mathfrak{B}(V)$ el álgebra de Nichols. Supongamos que A es un H-comódulo álgebra. Decimos entonces que un *complejo de cadenas* es un objeto $\mathbf{M}$ que es a la vez un H-comódulo a izquierda y un A-módulo a derecha que verifica (6.1.1). Si conviene aclararlo, diremos que $\mathbf{M}$ es un (H, V)-complejo.

Como vimos, esta definición generaliza la de complejo en el sentido usual. Sin embargo, también generaliza la de N-complejo, en el sentido de [**Kap96**]. Para ver esto, simplemente se toma (V, c) una Línea Cuántica como en 2.4.1. Se tiene entonces $\partial^N = 0$.

6.1.4. Definición. Sea $\mathbf{M}$ un (H, V)-complejo, y supongamos que $\mathfrak{B}(V)$ es de dimensión finita. Sea $\operatorname{top} V$ como siempre el grado de su integral. Para $1 < i \leq \operatorname{top} V$ definimos la *i-homología de* $\mathbf{M}$ por

$$H^i(\mathbf{M}) = Z^i(\mathbf{M})/B^i(\mathbf{M}) = \frac{\left(\bigcap_{\substack{z \in \mathfrak{B}^j(V) \\ j \geq i}} \ker z\right)}{\left(\sum_{\substack{z \in \mathfrak{B}^j(V) \\ j \geq \operatorname{top} V + 1 - i}} \operatorname{Im} z\right)}.$$

Dados $z, z' \in \mathfrak{B}(V^*)$ con $\deg z + \deg z' > \operatorname{top} V$, tenemos $z \cdot z' = 0$, por lo que es fácil concluir que la imagen de z' está incluida en el núcleo de z, y por lo tanto el cociente está bien definido. Supongamos ahora que $H = \mathbf{k}G$ es un álgebra de grupo. Entonces tanto $\mathbf{M} = \oplus_{g \in G}(\mathbf{M})_g$ como $\mathfrak{B}(V) = \oplus_{g \in G}(\mathfrak{B}(V))_g$ están graduadas por G, y $\mathfrak{B}(V)$ actúa sobre $\mathbf{M}$ en forma graduada, esto es, $m \cdot z \in M_{gh}$ si $m \in M_g$ y $z \in (\mathfrak{B}(V))_h$. Supongamos además que la graduación de G descompone cada componente $\mathfrak{B}^n(V^*)$, es decir que $\mathfrak{B}^n(V^*) = \oplus_{g \in G}(\mathfrak{B}^n(V^*))_g$. Luego podemos descomponer la homología de $\mathbf{M}$ en componentes sobre G de la siguiente manera:

$$H^i_g(\mathbf{M}) = Z^i_g(\mathbf{M})/B^i_g(\mathbf{M}) = \frac{\left(\bigcap_{\substack{z \in (\mathfrak{B}^j(V^*))_h \\ j \leq i,\ h \in G}} \ker(z : \mathbf{M}_g \to \mathbf{M}_{gh})\right)}{\left(\sum_{\substack{z \in (\mathfrak{B}^j(V^*))_h \\ j \geq \operatorname{top} V + 1 - i,\ h \in G}} \operatorname{Im}(z : \mathbf{M}_{gh^{-1}} \to \mathbf{M}_g)\right)}.$$

Diremos que este es *el caso graduado.* A las componentes H^i_g las llamaremos *homología graduada* de $\mathbf{M}$.

6.1.5. Observación. Si (V, c) es una Línea Cuántica generada por ∂, podemos poner $H = \mathbf{k}\mathbb{Z}$ (tomamos por comodidad $\mathbb{Z}$ con generador g), y ponemos

$\delta(\partial) = (g^{-1} \otimes \partial)$, de manera que $\partial \in (\mathfrak{B}^1(V))_{g^{-1}}$. La definición que se da aquí de $H^i_{g^n}$ no es otra cosa que la definición de ${}_iH_n$ de Kapranov.

Es evidente cómo definir morfismos entre complejos: simplemente un morfismo entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{M}'$ es un morfismo en la categoría ${}^H\mathcal{M}_A$. Un morfismo $f : \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ da lugar a morfismos en las homologías $f^i : H^i(\mathbf{M}) \to H^i(\mathbf{M}')$. En el caso graduado ($H$ un álgebra de grupo tal que descompone cada componente $\mathfrak{B}^j(V^*)$), f se descompone en $f^i_g : H^i_g(\mathbf{M}) \to H^i_g(\mathbf{M}')$.

Observamos que en general ${}^H\mathcal{M}_A$ no es una categoría monoidal. Para trabajar con productos tensoriales de complejos es necesario reconstruirla como una categoría de comódulos sobre un álgebra de Hopf, y para eso hace falta, por ejemplo, que A sea un álgebra de Hopf trenzada en $\mathcal{YD}^H_H$. No profundizaremos este punto de vista.

Una *homotopía* entre dos morfismos $f, g : \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ es un morfismo $\Lambda : \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ tal que

$$f - g = \sum_i z_i \Lambda \tilde{z}_i,$$

donde $\{z_1, \ldots, z_n\}$ y $\{\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n\}$ son bases duales de $\mathfrak{B}(V)$ como en 3.4.1. Es inmediato comprobar que si f es homotópico a g entonces

$$H(f) = H(g) : H(\mathbf{M}) \to H(\mathbf{M}').$$

En particular, un complejo $\mathbf{M}$ es *contráctil* si id es homotópico a 0, ó en otras palabras, si $\exists\ \Lambda : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ tal que $\sum_i z_i \Lambda \tilde{z}_i = 1$. Una propiedad más fuerte que la contractibilidad es tener una estructura de $\mathcal{A}V$-módulo.

6.1.6. Definición. Supongamos que la estructura de H-módulo álgebra de $\mathfrak{B}(V)$ se extiende a $\mathcal{A}V$ (esto es equivalente a que $\mathfrak{B}(V)$ sea además un H-módulo coálgebra y que la trenza de $\mathfrak{B}(V)$ sea un morfismo en ${}^H\mathcal{M}$). Un (H, V)-complejo $\mathbf{M}$ se dirá *fuertemente contráctil* si $\mathbf{M}$ es un módulo de Doi-Hopf sobre $H, \mathcal{A}V$, esto es, si $\mathbf{M} \in {}^H\mathcal{M}_{\mathcal{A}V}$.

Tenemos entonces

6.1.7. Proposición. *Si* $\mathbf{M}$ *es fuertemente contráctil entonces:*

1. $\mathbf{M}$ *es libre sobre* $\mathfrak{B}(V^*)$*, y más aun,* $\mathbf{M} \simeq Z^1(\mathbf{M}) \otimes \mathfrak{B}(V^*)$ *con el morfismo dado por la acción.*
2. $P_{\mathbf{M}}$ *es divisible por* $P_{\mathfrak{B}(V)}$*, donde* P *denota el polinomio de Hilbert sobre el grupo de* H*, esto es, si* $\mathbf{M} = \oplus_{g \in G}(\mathbf{M})_g$*, ponemos* $P_{\mathbf{M}} = \sum_{g \in G} \dim(\mathbf{M})_g \cdot g$.

Prueba. La primera parte se prueba exactamente igual que 3.4.1 parte 1. La segunda parte es una consecuencia inmediata de la primera. ☐

Veamos unos ejemplos.

6.1.8. EJEMPLO. Sea (V, c) un PTTG de rango de Nichols finito. Consideremos $G \simeq \mathbb{Z}$ el grupo libre con un generador g. Tomando $H = \mathbf{k}G$ con grados dados por $\deg x = g\ \forall x \in V$, tenemos $\mathfrak{B}(V)$ un (H, V)-complejo. La acción de $\mathcal{A}V$ prueba que el complejo es fuertemente contráctil. Más aún, si $W \subseteq V$ es un subespacio como en 3.3.2, la inclusión de álgebras $\mathcal{A}W \hookrightarrow \mathcal{A}V$ prueba que $\mathfrak{B}(V)$ es un (H, W)-complejo fuertemente contráctil. La proposición anterior entonces re-prueba el teorema 3.4.1.

6.1.9. EJEMPLO. Sea $\mathbf{M} = \oplus_{p,q}\mathbf{M}_{pq}$ un complejo doble con diferenciales $\partial_1 : \mathbf{M}_{pq} \to \mathbf{M}_{p-1,q}$, $\partial_2 : \mathbf{M}_{pq} \to \mathbf{M}_{p,q-1}$. Si tomamos (V, c) con base $\{\partial_1, \partial_2\}$ y trenza $c(\partial_i \otimes \partial_j) = -\partial_j \otimes \partial_i$, entonces $\mathfrak{B}(V)$ es un ELC, $\mathfrak{B}(V) \simeq \Lambda V$ el álgebra exterior de V. Las condiciones sobre $\mathbf{M}$ para que sea un complejo doble son las mismas que las de ser un módulo sobre $\mathfrak{B}(V)$. Si se toma $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con generadores g_1, g_2, y $H = \mathbf{k}G$, queda claro que $\mathbf{M}$ es un (H, V)-complejo. La homología del complejo total no es otra cosa que la homología del $(\bar{H}, W)$-complejo restringiendo la acción de $\mathfrak{B}(V)$ a $\mathfrak{B}(W)$, con $W = \operatorname{span}\{\partial_1 + \partial_2\}$ y $\bar{H} = H/(g_1 - g_2) \simeq \mathbf{k}\mathbb{Z}$. La teoría precedente dice que tiene sentido considerar también las dos homologías

$$H^1(\mathbf{M}) = (\ker \partial_1 \cap \ker \partial_2)/(\operatorname{Im}(\partial_1 \partial_2)),$$
$$H^2(\mathbf{M}) = (\ker(\partial_1 \partial_2))/(\operatorname{Im} \partial_1 + \operatorname{Im} \partial_2),$$

que son graduadas sobre G.

6.2. Preguntas aún abiertas

6.2.1. PREGUNTA. Como se dijo previamente, en característica 0 no se conocen álgebras R de dimensión finita que vivan en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ (Γ un grupo finito) tales que verifiquen (2.3.4), (2.3.5) y (2.3.6) pero no (2.3.7). En característica positiva no se conocen álgebras que verifiquen (2.3.4), (2.3.5) y (2.3.6) pero no (2.3.7), y que además su dimensión no sea divisible por la característica del cuerpo. Es de esperar que pueda probarse, para R en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$, que

$$(2.3.4) + (2.3.5) + (2.3.6) + (\operatorname{car} \mathbf{k} \nmid \dim R) \Rightarrow R \text{ de Nichols},$$

concluyendo así el paso 4 del Procedimiento. Esto aparece como conjetura en [**ASa**].

6.2.2. PREGUNTA. Una primera generalización de los núcleos de FL aparece considerando los órdenes de nilpotencia de las adjuntas. En 4.3.1 calculamos cuándo esto es efectivo para álgebras de tipo A_2 y B_2. Sería una buena aproximación a la solución del caso diagonal resolver cuándo la matriz de Cartan construida a partir de los órdenes de nilpotencia permite calcular bases de PBW de las álgebras de Nichols.

6.2.3. PREGUNTA. No me fue posible calcular la dimensión de $\mathfrak{B}(V_{3,q})$ con $q \neq -1$. Unos cuantos días de corridas de [**Mül98a**] parecen indicar que son en general de dimensión infinita. Tampoco me fue posible calcular la dimensión de $\mathfrak{B}(V_{4,q,-1})$ con $q \neq -1$, y también parecen ser de dimensión infinita.

6.2.4. PREGUNTA. Si se hace la lista de los módulos irreducibles en ${}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ con $\Gamma = \mathbb{S}_3$, se observa que las álgebras de Nichols son todas de dimensión infinita salvo para $M(\sigma, \mathrm{sgn})$, que es $V_{3,-1}$. No me fue posible calcular la dimensión de $\mathfrak{B}(M(\sigma, \mathrm{sgn}) \oplus M(\sigma, \mathrm{sgn}))$. También aquí las corridas de [**Mül98a**] parecen indicar que es de dimensión infinita. Si fuera así, esto clasificaría todas las álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_3$ de dimensión finita. Es fácil encontrar los levantamientos de $\mathfrak{B}(M(\sigma, \mathrm{sgn}))\#\mathbf{k}\mathbb{S}_3$. Con las técnicas desarrolladas (y usando el lema del diamante) se ve enseguida que hay dos: la bosonización y el álgebra con los mismos generadores y relaciones excepto por

$$x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = (r-1), \quad x_1x_0 + x_2x_1 + x_0x_2 = (r^2-1).$$

6.2.5. PREGUNTA. La clasificación de los conjuntos cruzados módulo isomorfismo se puede hacer mecánicamente. Ya vimos que los conjuntos cruzados de cardinal 3 son diagonales (o sea, $x \triangleright y = y \; \forall x, y$), o bien el conjunto cruzado subyacente a $V_{3,q}$, es decir $X = \mathbb{Z}/3$, $x \triangleright y = -x - y$. Más aun, calculamos la homología en este caso. También vimos los conjuntos cruzados de carinal 4 en 4.5. Módulo isomorfismo hay 4 tipos que pasamos a describir. Tomamos $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ y ponemos en una línea las acciones de cada uno de los elementos.

Conjuntos cruzados de cardinal 4				
$1 \triangleright X$	$2 \triangleright X$	$3 \triangleright X$	$4 \triangleright X$	Corresponde a
1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	diagonal, como en 4.5 caso 1
1 2 4 3	1 2 4 3	2 1 3 4	2 1 3 4	como en 4.5 caso 4
1 2 3 4	1 2 4 3	1 4 3 2	1 3 2 4	como en 4.5 caso 4
1 3 4 2	4 2 1 3	2 4 3 1	3 1 2 4	como en 4.5 caso 5c

Los conjuntos cruzados de cardinal 5 módulo isomorfismo son (notamos aquí $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$)

Conjuntos cruzados de cardinal 5					
$1 \triangleright X$	$2 \triangleright X$	$3 \triangleright X$	$4 \triangleright X$	$5 \triangleright X$	Corresponde a
1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	diagonal
1 2 3 5 4	1 2 3 5 4	1 2 3 4 5	2 1 3 4 5	2 1 3 4 5	suma de uno central y uno como en 4.5 caso 4
1 5 3 4 2	5 2 3 4 1	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	2 1 3 4 5	suma de dos centrales y uno de tipo $V_{3,q}$
1 3 4 2 5	4 2 1 3 5	2 4 3 1 5	3 1 2 4 5	1 2 3 4 5	suma de uno central y uno como en 4.5 caso 5c
1 2 5 3 4	1 2 5 3 4	2 1 3 4 5	2 1 3 4 5	2 1 3 4 5	suma de uno de 2 y uno de 3, ambos diagonales. No conmutan entre sí
1 3 2 5 4	3 2 1 5 4	2 1 3 5 4	2 3 1 4 5	3 1 2 4 5	suma de uno de 2 diagonal y uno de 3 como $V_{3,q}$
1 3 2 5 4	4 2 5 1 3	5 4 3 2 1	3 5 1 4 2	2 1 4 3 5	irreducible
1 3 5 2 4	3 2 4 5 1	5 4 3 1 2	2 5 1 4 3	4 1 2 3 5	irreducible
1 5 4 2 3	3 2 5 1 4	2 4 3 5 1	5 3 1 4 2	4 1 2 3 5	irreducible

¿Es posible construir una familia de módulos de PTTGF V_n $(n > 2)$ irreducibles tal que cada V_n tenga dimensión n y sea de rango de Nichols finito? Para $n = 3, 4$ se pueden tomar los módulos $V_{3,-1}$ y $V_{4,-1,1}$.

Bibliografía

[AD95] N. Andruskiewitsch and J. Devoto, *Extensions of Hopf algebras*, Algebra i Analiz **7** (1995), no. 1, 17–52.

[AG99] N. Andruskiewitsch and M. Graña, *Braided Hopf algebras over non abelian finite groups*, Boletín de la Acad. Nac. de Ciencias (Córdoba) **63** (1999), 45–78, También en `q-alg/9802074`.

[ASa] N. Andruskiewitsch and H-J. Schneider, *Finite quantum groups and Cartan matrices*, Aparecerá en Adv. Math.

[ASb] N. Andruskiewitsch and H-J. Schneider, *Finite quantum groups over abelian groups of prime exponent*, preprint.

[AS98a] N. Andruskiewitsch and H-J. Schneider, *Hopf algebras of order p^2 and braided Hopf algebras of order p*, J. Algebra **199** (1998), 430–454.

[AS98b] N. Andruskiewitsch and H-J. Schneider, *Lifting of quantum linear spaces and pointed Hopf algebras of order p^3*, J. Algebra **209** (1998), 659–691.

[AS99] N. Andruskiewitsch and H-J. Schneider, *Lifting of Nichols algebras of type A_2 and pointed Hopf algebras of order p^4*, Hopf algebras and quantum groups (S. Caenepeel, ed.), Proceedings of the colloquium in Brussels (1998), 1999, pp. 1–18.

[BDG99] M. Beattie, S. Dăscălescu, and L. Grünenfelder, *On the number of types of finite-dimensional Hopf algebras*, Inventiones Math. **136** (1999), 1–7.

[BDRvO98] M. Beattie, S. Dăscălescu, Ş. Raianu, and F. van Oystaeyen, *The categories of Yetter–Drinfel'd modules, Doi–Hopf modules and two-sided two-cosided Hopf modules*, Applied Categorical Structures **6** (1998), 223–237.

[Bur55] W. Burnside, *Theory of groups of finite order*, 2nd. ed., Dover Pub., New York, 1955.

[CD98] S. Caenepeel and S. Dăscălescu, *Pointed Hopf algebras of dimension p^3*, J. Algebra **209** (1998), 622–634.

[CDR98] S. Caenepeel, S. Dăscălescu, and Ş. Raianu, *Classifying pointed Hopf algebras of dimension* 16, Aparecerá en Comm. Alg, 1998.

[Cib97] C. Cibils, *Tensor products of Hopf bimodules over a group algebra*, Proc. A.M.S. **125** (1997), 1315–1321.

[CR94] C.W. Curtis and I. Reiner, *Methods of representation theory*, vol. II, J. Wiley, 1994.

[CR97] C. Cibils and M. Rosso, *Algèbres des chemins quantiques*, Adv. in Math. **125** (1997), 171–199.

[Dăs99] S. Dăscălescu, *Pointed Hopf algebras with large coradical*, Comm. Algebra **27** (1999), no. 10, 4827–4851.

[DPR90] R. Dijkgraaf, V. Pasquier, and P. Roche, *Quasi Hopf algebras, group cohomology and orbifold models*, Integrable systems and quantum groups (M. Carfora et al., ed.), Papers from the workshop, Pavia, Italy, March (1990), World Scientific, Singapore, 1990, pp. 75–98.

[Dri86] V.G. Drinfeld, *Quantum groups*, Proceedings of the ICM (Berkeley), 1986, pp. 798–820.

[ESS99] Pavel Etingof, T Schedler, and Alexander Soloviev, *Set-theoretical solutions to the quantum Yang–Baxter equation*, Duke Math. J. **100** (1999), no. 2, 169–209, también en `q-alg/9801047`.

[Gel98] S. Gelaki, *On pointed Hopf algebras and Kaplansky's tenth conjecture*, J. Algebra **209** (1998), 635–657.

[Gra99] M. Graña, *A freeness theorem for Nichols algebras*, Aparecerá en J. Algebra, 1999.

[Gur91] D. Gurevich, *Algebraic aspects of the quantum Yang–Baxter equation*, Leningrad J. of Math. **2** (1991), 801–828.

[JS93] A. Joyal and R. Street, *Braided tensor categories*, Adv. in Math. **102** (1993), no. 1, 20–78.

[Kap96] M.M. Kapranov, *On the q-analog of homological algebra*, `q-alg/9611005`, 1996.

[LS97] V. Lyubashenko and A Sudbery, *Quantum supergroups of $GL(n|m)$ type: differential forms, Koszul complexes and berezinians*, Duke Math. J. **90** (1997), 1–62.

[Lus93] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Birkhäuser, 1993.

[Lyu86] V. Lyubashenko, *Hopf algebras and vector symmetries*, Russian Math. Surveys **41** (1986), 153–154.

[LYZ00] Jiang-Hua Lu, Min Yan, and Yong-Chang Zhu, *On set-theoretical Yang–Baxter equation*, Aparecerá en Duke Math. J., 2000.

[Mac63] S. MacLane, *Natural associativity and commutativity*, Rice University Studies **69** (1963), 28–46.

[Maj94] S. Majid, *Crossed products by braided groups and bosonization*, J. Algebra **163** (1994), 165–190.

[MM65] J. W. Milnor and J. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Annals of Math. **81** (1965), 211–264.

[Mon93] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS, vol. 82, AMS, 1993.

[MS96] A. Milinski and H-J. Schneider, *Pointed indecomposable Hopf algebras over Coxeter groups*, 1996.

[Mül98a] E. Müller, *Computation of bilinear forms. A C++ program for Nichols algebras*, se puede encontrar en `www.mate.uncor.edu/andrus/articulos`, 1998.

[Mül98b] E. Müller, *Some topics on Frobenius-Lusztig kernels I*, J. Algebra **206** (1998), 624–658.

[Nic78] W.D. Nichols, *Bialgebras of type one*, Comm. in Algebra **6** (1978), no. 15, 1521–1552.

[Rad76] D. Radford, *The order of the antipode of a finite-dimensional Hopf algebra is finite*, Amer. J. Math **98** (1976), 333–355.

[Rad85] D. Radford, *Hopf algebras with a projection*, J. Algebra **92** (1985), 322–347.

[Sch] B. Scharfschwerdt, *Talk at* colloquium on quantum groups and hopf algebras, La Falda, 1999.

[Sch93] P. Schauenburg, *Zur nichtkommutativen differentialgeometrie von hauptfäserbundeln – Hopf-Galois erweiterungen von de Rham komplexen*, Algebra Berichte, vol. 71, Verlag Reinhard Fischer, 1993.

[Sch94] P. Schauenburg, *Hopf modules and Yetter–Drinfeld modules*, J. Algebra **169** (1994), no. 3, 874–890.

[Sch95] Hans-Jürgen Schneider, *Lectures on Hopf algebras*, Trabajos de Matemática, FaMAF **31/95** (1995).

[Sol00] Alexander Soloviev, *Non-unitary set-theoretical solutions to the quantum Yang–Baxter equation*, `q-alg/0003194`, 2000.

[ŞvO98] D. Ştefan and F. van Oystaeyen, *Hochschild cohomology and coradical filtration of pointed Hopf algebras*, J. Algebra **210** (1998), 535–556.

[Swe69] M. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New York, 1969.

[Taf71] Earl J. Taft, *The order of the antipode of a finite-dimensional Hopf algebra*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **98** (1971), 2631–2633.

[Tak71] M. Takeuchi, *Free Hopf algebras generated by coalgebras*, J. Math. Soc. Japan **23** (1971), 561–582.

[Tak99a] M. Takeuchi, *Finite Hopf algebras in braided tensor categories*, J. P. Ap. Algebra **138** (1999), 29–82.

[Tak99b] M. Takeuchi, *The Nichols–Zoeller theorem for braided Hopf algebras*, 1999.

[Ufn95] V. Ufnarovski, *Combinatorial and asymptotic methods in algebra*, Algebra VI (Shafarevich and Kostrikin, eds.), Encyclopaedia of Math., Springer–Verlag, Berlin, 1995.

[Whi96] S. J. Whiterspoon, *The representation ring of the quantum double of a finite group*, J. Algebra **179** (1996), 305–329.

Índice Alfabético

Índice de símbolos