NUDOS E INVARIANTES CUÁNTICOS
NOTAS DE UN CURSO EN VAQUERÍAS
4–9 AGOSTO 2003

MATÍAS GRAÑA

1. Se va la primera

La teoría de nudos está a caballo entre topología, álgebra y combinatoria. Si bien los nudos existen y fueron considerados por milenios, uno de los primeros en estudiarlos de manera sistemática fue C. Gauss. El interés en los nudos (re)surgió a fines del siglo XIX, cuando Lord Kelvin los propuso como modelo para estudiar la relación entre los átomos y el éter. Los nudos, de todos modos, sobrevivieron al éter y siguieron siendo estudiados a lo largo del siglo. Hoy en día se los considera como herramienta en la teoría de cuerdas y en biología molecular. Y dentro de la matemática constituyen un cuerpo de estudio bien establecido, con conexiones con otras ramas.

Estas notas son una mera introducción al tema. Para un estudio en profundidad se sugiere comenzar con [L, T] y las referencias allí contenidas.

Definición 1.1. Un *nudo* es una inclusión continua de S^1 en $\mathbb{R}^3$ (ó en S^3). En el conjunto de nudos se define la relación de equivalencia *isotopía*: dos nudos α y β son isotópicos si existe una función continua $H : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ (ó S^3) tal que $H_t = H(\bullet, t)$ es un nudo para todo $t \in [0,1]$, $H_0 = \alpha$ y $H_1 = \beta$. Vamos a considerar exclusivamente nudos *domados*, es decir aquéllos que son isotópicos a uno dado por una función lineal a trozos (poligonal). Equivalentemente, domados son los nudos isotópicos a nudos dados por funciones diferenciables con diferencial nunca nulo. En general, preferiremos las poligonales. Los nudos no domados se denominan *salvajes*. El considerar sólo los nudos domados se justifica en el intento de estudiar nudos reales.

Un *lazo* es una unión disjunta de finitos nudos. Equivalentemente, una función continua e inyectiva de finitas copias de S^1 en $\mathbb{R}^3$ (ó S^3). Se define para lazos el concepto de isotopía de manera análoga, y se estudian lazos domados.

En la figura 1 hay ejemplos de nudos y lazos. Los dos primeros son conocidos como *nudos de trébol*; uno es una imagen especular del otro. No son isotópicos, pero esto no es sencillo de demostrar. En la figura 2 hay un ejemplo de nudo salvaje.

Un *diagrama* de un nudo es una proyección genérica del nudo en un plano. Aquí, *genérica* significa que no hay puntos triples ni puntos dobles donde uno es un vértice (ver figura 3).

En los puntos dobles del diagrama hay un segmento que pasa por encima del otro. El segmento que pasa por debajo se dibuja cortado. Se denomina entonces *arco* de un diagrama a las componentes conexas del mismo. Se denomina *cruce* a los puntos dobles. Salvo cuando en un diagrama hay una componente no anudada (isotópica a un triángulo), la cantidad de cruces coincide con la de arcos.

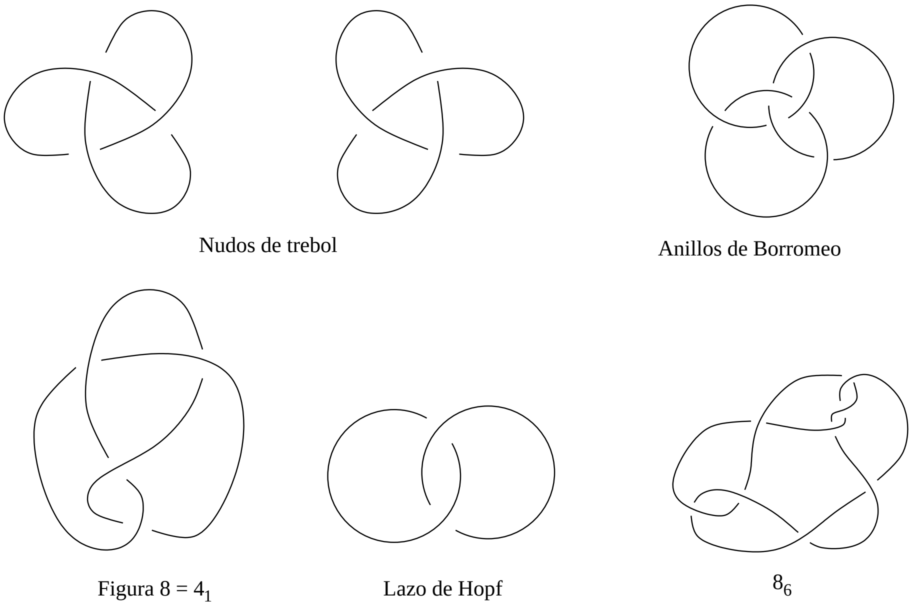


FIGURA 1. Nudos y lazos

FIGURA 2. Nudo salvaje

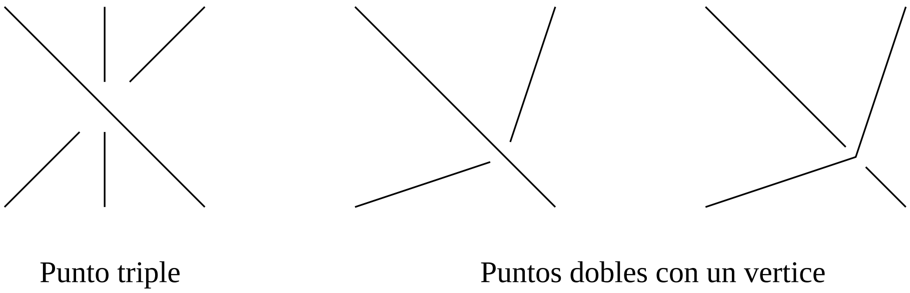


FIGURA 3. Configuraciones no permitidas en un diagrama

Observación 1.2. A partir de aquí los dibujos se harán a menudo con curvas. Pensaremos que las curvas aproximan poligonales con segmentos muy cortos.

Se puede probar que si dos nudos dados por poligonales son isotópicos, lo son mediante una composición de movimientos en los que un lado de un triángulo cuyo interior no se interseca con el nudo se reemplaza por los otros dos, o viceversa. Ver por ejemplo la figura 4.

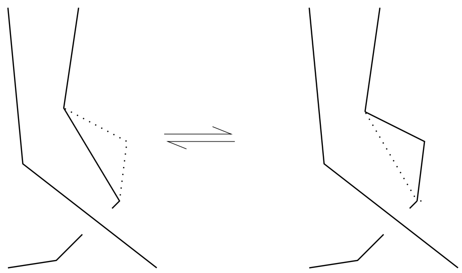


FIGURA 4

De esta manera, si se mira la proyección de este movimiento en el plano, dos nudos son isotópicos si y sólo si sus diagramas están relacionados por una isotopía genérica en el plano y una sucesión de *movimientos de Reidemeister*. Ver figura 5.

En general es complicado saber cuándo dos nudos son isotópicos (o probar que no lo son). El lector puede intentar el siguiente

Ejercicio 1.3. De los tres nudos de la figura 6 hay dos isotópicos. Encontrarlos. (Observación: los dos nudos isotópicos fueron listados como nudos distintos en las primeras tablas de nudos y permanecieron así por más de 70 años hasta que abogado, Perko, notó que eran el mismo. Hoy se los conoce como “el par de Perko”).

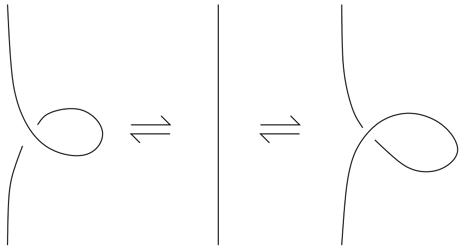
Parte fundamental de la teoría de nudos consiste en tener herramientas para determinar si dos nudos son o no isotópicos. Existe un algoritmo debido a W. Haken que resuelve esta cuestión (ver [H]) pero en la práctica es imposible de usar. Son necesarios entonces *invariantes* que permitan al menos decidir si dos nudos *no* son isotópicos.

Los primeros invariantes aparecieron en la primera mitad del siglo XX. Vamos a ver aquí algunos de ellos. Todos estos invariantes se pueden definir (y calcular) mediante el diagrama de un nudo; es por ello que los movimientos de Reidemeister son importantes.

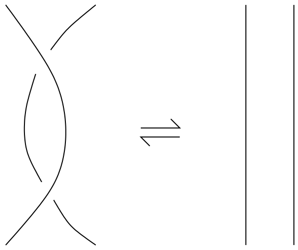
1.1. **Coloreo.** Dado el diagrama de un nudo, se dice que el nudo es 3-*colorable* si se le puede asignar a cada arco un color rojo, azul o amarillo de tal manera que en cada cruce los tres arcos que intervienen tienen, o bien el mismo color, o bien tres colores distintos.

Es fácil ver que la propiedad de ser colorable no cambia bajo los movimientos de Reidemeister: en un movimiento de tipo I, en la figura de la izquierda, si se mira el cruce, dos arcos coinciden y por lo tanto los tres arcos deben tener el mismo color, al igual que en la figura del medio. Consideremos un movimiento de tipo II. Supongamos que los colores de los arcos de la derecha son x e y. Si $x = y$ tomamos $z = x$; si no, tomamos z como el color restante. Escribimos $z = x * y$. Entonces en la figura de la izquierda hay un único coloreo en el que los colores arriba y abajo son x e y: tiene z por color en el arco restante.

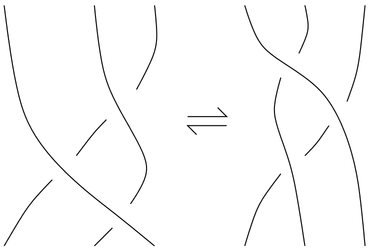
Consideremos un movimiento de tipo III y un coloreo en la figura de la izquierda. Sean x, y, z los colores del lado de arriba y x', y', z' los de abajo. Se tiene $z' = x$,



Movimiento de tipo I



Movimiento de tipo II



Movimiento de tipo III

FIGURA 5. Movimientos de Reidemeister

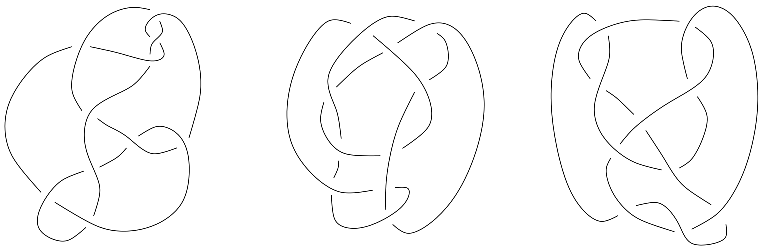


FIGURA 6. De estos tres nudos, dos forman el par de Perko.

$y' = x*y$, $x' = x*(y*z)$. En la figura de la derecha, si coloreamos por x, y, z la parte de arriba, los colores x”, y”, z” abajo serán z” $= x$, y” $= x*y$, x” $= (x*y)*(x*z)$.

Luego, ambos coloreos coinciden arriba y abajo si probamos que para toda terna de colores x, y, z se satisface $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$. Esto se puede verificar a mano, o como caso particular de la construcción más general dada abajo.

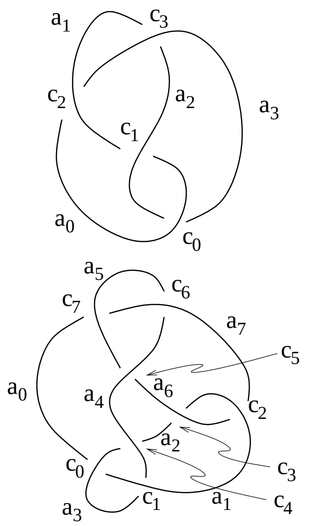
Probemos entonces que el nudo de trébol no es desanudable. Simplemente, tiene un coloreo en el que cada arco tiene un color distinto. El nudo trivial, en cambio, no tiene coloreos no triviales.

Se puede considerar entonces como un invariante de un nudo la cantidad de 3-coloreos.

Generalizamos aquí el invariante de 3-coloreo a un invariante de n-coloreo, donde n es un número entero. Colorear un diagrama *módulo* n significa asignar a cada arco del diagrama un elemento de $\mathbb{Z}_n$ de manera tal que en cada cruce se satisface la relación $y + z = 2x$, donde y, z son los colores de los arcos que van por debajo y x es el color del arco que va por arriba. La demostración de que la cantidad de n-coloreos no cambia bajo movimientos de Reidemeister es la misma que para el caso $n = 3$. Lo único pendiente en aquel caso es verificar que $x*(y*z) = (x*y)*(x*z)$, donde aquí $x * y = 2x - y$:

$$x * (y * z) = 2x - (y * z) = 2x - (2y - z) = 2x - 2y + z,$$
$$(x * y) * (x * z) = (2x - y) * (2x - z) = 2(2x - y) - (2x - z) = 2x - 2y + z.$$

1.2. **Determinante.** Ya observamos que un lazo sin componentes triviales tiene tantos arcos como cruces. Consideremos una matriz con una fila por cruce y una columna por arco. En cada cruce (fila) se pone un 2 en la entrada correspondiente al arco que pasa por encima y -1 en las entradas correspondientes a los arcos que pasan por debajo (ver figura 7). Se ve entonces que un coloreo está dado por un vector columna que multiplicado por la matriz se anula. Luego, estudiar coloreos es estudiar el núcleo de la aplicación asociada a la matriz.



	a_0	a_1	a_2	a_3
c_0	2	0	−1	−1
c_1	−1	−1	2	0
c_2	−1	2	0	−1
c_3	0	−1	−1	2

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
c_0	−1	−1		2				
c_1		2		−1	−1			
c_2		2					−1	−1
c_3		−1	−1				2	
c_4			−1	−1	2			
c_5					2	−1	−1	
c_6					−1	−1		2
c_7	−1					2		−1

FIGURA 7. Matriz de un nudo

Consideremos un diagrama de un lazo en el que no se interrumpen los arcos que pasan por debajo en un cruce. Se tiene entonces un mapa en el plano con la propiedad de que los puntos pertenecen a 1, 2 ó 4 zonas. Esto permite probar que se puede colorear el mapa con dos colores (de tal manera que a zonas vecinas le corresponden colores distintos).

Sea A la matriz de un diagrama; llamemos $F_1, \dots, F_n$ a las filas y $C_1, \dots, C_n$ a las columnas. Usando la propiedad de 2-colorabilidad anterior, se puede probar que hay un vector $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ tal que $\epsilon_i = \pm 1\ \forall i$ y $\sum_i \epsilon_i F_i = 0$. Por otra parte, es claro que $\sum_j C_j = 0$.

Miremos ahora la matriz A como la de un morfismo de grupos $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ (al que llamaremos A también) y consideremos $\mathbb{Z}^n / \operatorname{Im}(A)$. Dado que es un grupo abeliano finitamente generado, se descompone como $\mathbb{Z}^d \oplus \mathbb{Z}_{t_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{t_m}$, donde $t_i | t_{i+1}$. Afirmamos que este grupo es un invariante del nudo.

Prueba. Se debe chequear la invariancia de este grupo por los movimientos de Reidemeister. Consideremos el primer movimiento (ver figura 5, igualdad de la izquierda). Sea a el arco en el dibujo del medio y b_1, b_2 los arcos del dibujo de la izquierda. Sea A la matriz correspondiente al diagrama del medio y B la del diagrama de la izquierda. Supongamos que la columna correspondiente a a es la primera en A y que las correspondientes a b_1, b_2 son las dos primeras en B. Queda claro que las matrices A y B tienen la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \vdots & \\ C_1 & \quad A' \quad \\ \vdots & \end{array} \right), \qquad B = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & & & \\ \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 & & A' & \\ \vdots & \vdots & & & \end{array} \right)$$

donde $C_1 = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$. Es claro entonces que primero con una operación de columnas y luego con operaciones de fila podemos llevar B a la matriz

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \vdots & & & \\ \vdots & C_1 & & A' & \\ 0 & \vdots & & & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Luego, el grupo no cambia si se cambia A por B. Cuentas similares se pueden hacer para los movimientos II y III y se dejan como ejercicio. $\square$

Otra manera de codificar el mismo invariante es, dado $r > 0$, tomar e_r el generador del ideal (en $\mathbb{Z}$) generado por todos los menores de tamaño $n - r$ (si $r \geq n$ se toma $e_r = 1$). La colección de estos números entonces codifica la misma información que el grupo. Por ejemplo, para 4_1 (el primer nudo en 7), se tiene $e_1 = 5$, $e_r = 1$ si $r > 1$.

Este invariante tiene una simplificación y una generalización. Empecemos por la primera: por lo visto arriba, la matriz de un diagrama es degenerada. Si el invariante correspondiente es $\mathbb{Z}^d \oplus \mathbb{Z}_{t_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{t_m}$, resulta entonces $d \geq 1$. Luego se puede matar una componente $\mathbb{Z}$ quitando a la matriz A una fila y una columna cualesquiera (el resultado no depende de la fila y columna elegidas gracias a las observaciones anteriores). Si $d = 1$, el determinante de esta nueva matriz, en valor absoluto, será el orden de la torsión del grupo. Un determinante 0 indica que $d > 1$. Este invariante se conoce como el *determinante* del nudo (y está bien definido módulo un cambio de signo).

Como ejemplo, considérense los dos nudos de la figura 7. El determinante del primero es 5, el del segundo es 9. Entre otras cosas esto muestra que ambos nudos no son isotópicos. También dice que hay un 5-coloreo no trivial del primero: se puede tomar en $\mathbb{Z}_5$ los colores $0, 1, 3, 2$ para a_0, a_1, a_2, a_3 respectivamente.

Veamos ahora la generalización de este grupo.

1.3. **Módulo y polinomio de Alexander.** Se copian aquí las construcciones del punto anterior, reemplazando $\mathbb{Z}$ por el anillo de polinomios de Laurent a coeficientes enteros $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Para ello, lo primero que uno debe hacer es darle una orientación al nudo (o lazo), es decir, fijar un "sentido" en cada componente del lazo. Se distinguen entonces dos tipos de cruces: positivos y negativos, como se indica en la figura 8.

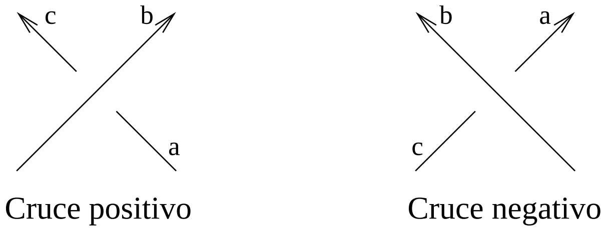


Figura 8

Se considera nuevamente una matriz, A, pero ahora en un cruce como en la figura 8 se pone -1 en el arco c, t en el arco a y $1-t$ en el arco b. Por ejemplo, la matriz asociada al nudo 4_1 (primero de la figura 7), orientándolo de manera que de a_0 se pasa a a_1, es

$$\begin{pmatrix} 1-t & 0 & -1 & t \\ -1 & t & 1-t & 0 \\ -1 & 1-t & 0 & t \\ 0 & t & -1 & 1-t \end{pmatrix}$$

Es claro que la matriz de la sección anterior se obtiene especializando en $t = -1$. Consideremos de nuevo esta matriz como la de un morfismo $(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])^n \to (\mathbb{Z}[t, t^{-1}])^n$, llamado A, y tomemos $(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])^n / \operatorname{Im}(A)$. La demostración de que este módulo no depende del diagrama tomado se puede hacer en este contexto, y por lo tanto este módulo es un invariante.

La diferencia central entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ es que el último no es un dominio de ideales principales, y no se tiene el teorema de estructura para módulos de tipo finito. De todas maneras, $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ es un dominio de factorización única. Lo que se hace entonces es, para $r > 0$, tomar p_r el máximo común divisor entre los menores de tamaño $n - r$ (si $r \geq n$ se pone $p_r = 1$). Esta sucesión está definida módulo unidades de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, es decir módulo $\pm t^m$. Como ejemplo, la sucesión para 4_1 es $p_1 = t^2 - 3t + 1$, $p_r = 1$ si $r > 1$. El invariante p_1 es uno de los invariantes más antiguos en teoría de nudos; es el *polinomio de Alexander*. Es claro que el determinante se obtiene especializando el polinomio de Alexander en $t = -1$. El módulo $(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])^n / \operatorname{Im}(A)$ es llamado *módulo de Alexander*.

Como generalización de los coloreos, se pueden tomar colores a valores en un $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-módulo M (es decir, M es un grupo abeliano con un automorfismo al que llamamos t). Un coloreo a valores en M es una asignación de un elemento C_a de M a cada arco a, de manera que en cada cruce como en la figura 8 se satisface $-C_c + tC_a + (1-t)C_b$. Un coloreo está dado por un morfismo del módulo de Alexander a M. También se puede definir en M una operación binaria $*$, dada por $a * b = ta + (1-t)b$. Un coloreo es una asignación tal que para los cruces de la figura 8 se tiene $c = a * b$.

Ejercicio 1.4. Definir un *quandle* como un conjunto X con una operación binaria $*$ que "permite colorear". Es decir, encontrar los axiomas que hacen de $*$ una operación tal que la cantidad de coloreos no cambie bajo los movimientos de Reidemeister.

Ejercicio 1.5 (Pasatiempo)**.** Encontrar una superficie compacta orientable en $\mathbb{R}^3$ cuyo borde sea un nudo de trébol. Hacer lo mismo con 4_1. Estas superficies se llaman *superficies de Seifert.*

Observación 1.6. El módulo de Alexander de un nudo se puede definir como el H_1 de un revestimiento del complemento del nudo asociado a un grupo cíclico infinito. Recordar que el grupo asociado actúa sobre el revestimiento, y esto da la acción de t. Este H_1, por otra parte, se puede presentar usando la *matriz de Seifert*, que se calcula a partir de la superficie de Seifert.

2. Segundas partes nunca fueron buenas

2.1. **El grupo de trenzas.** El grupo simétrico $\mathbb{S}_n$ se puede definir mediante generadores $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ (τ_i corresponde a la transposición $(i, i+1)$), y relaciones

$$\begin{aligned} &\tau_i^2 = 1 && \\ &\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i && \text{si } |i-j| > 1 \\ &\tau_i\tau_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1} && \text{si } 1 \le i \le n-2 \end{aligned}$$

Una forma de representar un elemento $x \in \mathbb{S}_n$ es dibujar los puntos $(1,0), \dots, (n,0)$ y $(1,1), \dots, (n,1) \in \mathbb{R}^2$, y unir $(i,0)$ con $(x(i),1)$ mediante una curva (continua). Esto se puede hacer respetando las siguientes normas:

- Las curvas van siempre "hacia arriba" (no hay dos puntos en una curva con la misma segunda coordenada).
- No hay puntos triples.
- En los puntos dobles las curvas se cruzan.
- No hay dos cruces con la misma segunda coordenada.

El producto de dos elementos f y g se obtiene poniendo el dibujo de f sobre el de g y volviendo a poner en escala. Dos elementos son iguales si sus dibujos se pueden relacionar mediante una isotopía y movimientos asociados a las relaciones de arriba.

De manera similar se puede definir (y dibujar) el *grupo de trenzas* $\mathbb{B}_n$. Un elemento $F \in \mathbb{B}_n$ se dibuja uniendo con curvas los mismos puntos que antes, respetando las mismas normas, pero con una información más:

- En cada punto doble se debe decir qué curva pasa por encima de la otra (como en los diagramas de nudos, se quiebra la curva que pasa por debajo).

En la figura 9 se dibujan elementos de $\mathbb{B}_5$. El producto se define de la misma manera (ver fig. 9). Dos elementos son iguales si los dibujos se pueden relacionar por una isotopía y los movimientos de la figura 10.

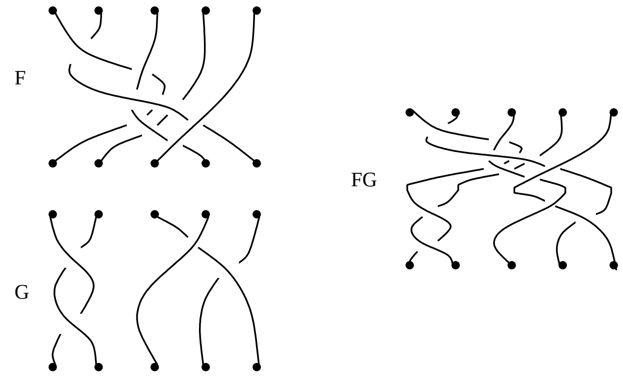


FIGURA 9. Elementos en $\mathbb{B}_5$ y su producto

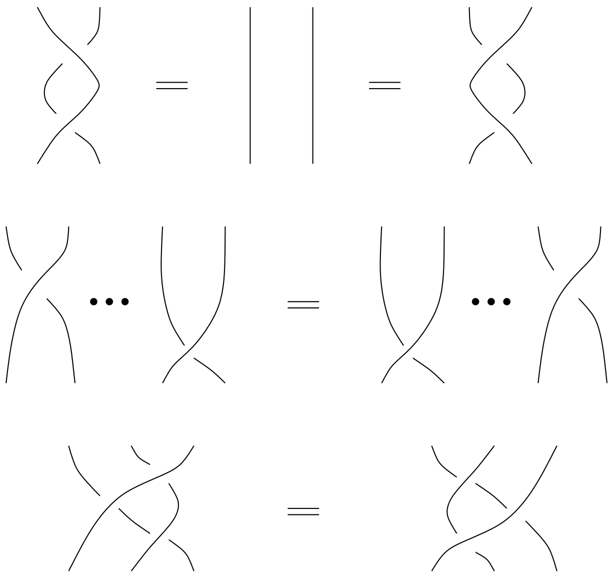


FIGURA 10. Relaciones en el grupo de trenzas

Debería quedar intuitivamente claro entonces que $\mathbb{B}_n$ se puede presentar con generadores $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ y relaciones

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \qquad \text{si } |i-j| > 1 \tag{2.1}$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \qquad \text{si } 1 \leq i \leq n-2 \tag{2.2}$$

Entre otras cosas, esta presentación permite ver que hay una proyección de $\mathbb{B}_n$ a $\mathbb{S}_n$, mandando $\sigma_i \mapsto \tau_i$. A nivel de los dibujos, la proyección corresponde a olvidar la información extra en cada cruce.

La relación entre los grupos de trenzas y los lazos se da en el siguiente teorema, debido a Alexander y Markov (ver por ejemplo [M]).

Teorema 2.1. *Considérese la aplicación de cerrar trenzas, como en la figura 11. Todo lazo se obtiene como la clausura de alguna trenza. Dos trenzas producen lazos isotópicos al clausurarlas si y solo si se puede pasar de una a la otra mediante movimientos de Markov:*

1. *Conjugación:* $\mathbb{B}_n \ni f \leftrightarrow gfg^{-1} \in \mathbb{B}n$, *para cualquier* $g \in \mathbb{B}_n$.
2. *Estabilización:* $\mathbb{B}_n \ni f \leftrightarrow \sigma_n^{\pm 1} i(f) \in \mathbb{B}_{n+1}$, *donde* $i : \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_{n+1}$ *es la inclusión* $\sigma_i \mapsto \sigma_i$, $i < n$.

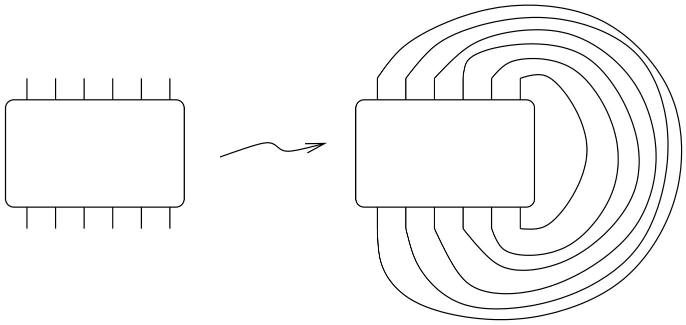


Figura 11. Clausura de una trenza

2.2. **La ecuación de trenzas.** Sea V un espacio vectorial y $c : V \otimes V \to V \otimes V$ un automorfismo. Intentamos obtener una representación del grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$ en el espacio vectorial $V^{\otimes n}$ de manera tal que σ_i se represente por $1_{V^{\otimes i-1}} \otimes c \otimes 1_{V^{\otimes n-i-1}}$. Para que esto sea una representación se deben satisfacer las relaciones de $\mathbb{B}_n$. Las relaciones (2.1) se satisfacen con cualquier c. Las relaciones (2.2) se satisfacen todas si c satisface la siguiente relación:

$$(c \otimes 1)(1 \otimes c)(c \otimes 1) = (1 \otimes c)(c \otimes 1)(1 \otimes c) \in \operatorname{End}(V \otimes V \otimes V) \tag{2.3}$$

Esta relación se conoce como *ecuación de trenzas.* Luego, cualquier solución de la ecuación de trenzas (biyectiva) da una representación de $\mathbb{B}_n$.

Veamos algunas soluciones.

1. $c(x \otimes y) = qy \otimes x$ es una solución para cualquier escalar $q \neq 0$. Si $q^2 = 1$, la representación desciende a $\mathbb{S}_n$.
2. V tiene dimensión 2, con base $\{x, y\}$. La trenza c está dada por la matriz
$$\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$
en la base $\{x \otimes x, x \otimes y, y \otimes x, y \otimes y\}$.
3. V tiene dimensión n, con base $x_0, \ldots, x_{n-1}$, y $c(x_i \otimes x_j) = qx_{2i-j} \otimes x_i$ (se toman los subíndices en $\mathbb{Z}_n$).

2.3. **Cálculo pictórico y rigidez.** Sea $c \in \mathrm{Aut}(V \otimes V)$ una solución de la ecuación de trenzas. Consideraremos la representación $\mathbb{B}_n \to \mathrm{Aut}(V^{\otimes n})$. Esto da un *cálculo pictórico*, por el que ciertos endomorfismos se pueden representar con dibujos. En general necesitaremos más morfismos que aquellos que están en la imagen de la representación. Para ello el concepto de *rigidez*, que pasamos a definir, será de suma utilidad.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y V^* su espacio dual. Hay dos aplicaciones canónicas $e : V^* \otimes V \to \mathbf{k}$ y $b : \mathbf{k} \to V \otimes V^*$. La primera es la evaluación, $e(f \otimes v) = f(v)$. La segunda es su dual, y se puede expresar mejor eligiendo una base $\{b_1, \ldots, b_m\}$ de V y su base dual $\{b^1, \ldots, b^m\}$. Entonces se tiene $b(1) = \sum_{i=1}^m b_i \otimes b^i$. Pese a esta descripción, se puede probar que b no depende de la base elegida.

Para incorporar a V^* en el cálculo pictórico se introducen orientaciones en las trenzas. Convendremos en que, mirando las trenzas de abajo hacia arriba, una cuerda orientada hacia arriba será "pintada" por V, y una cuerda orientada hacia abajo será "pintada" por V^*. Los morfismos e y b se representarán como en la parte de arriba de la figura 12. Es fácil ver que se satisfacen las igualdades de abajo de la figura.

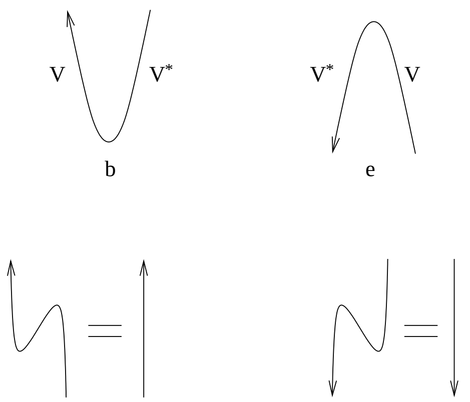


FIGURA 12. Morfismos b y e

Sin embargo, ahora que hemos introducido V^* en nuestro cálculo, tenemos que poder "trenzarlo". Es decir, tenemos que poder asignar un isomorfismo a las trenzas entre V y V^* y a la trenza entre V^* y V^*. Se quiere hacerlo de manera que estas trenzas se comporten bien con los morfismos b y e. La manera de hacerlo es usando la figura 13, que debe entenderse como lo que uno pretende que suceda.

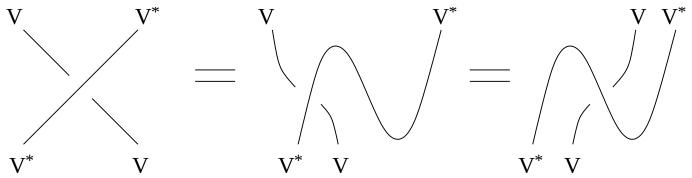


FIGURA 13. Definición de $c_{V^*,V}$

Se define entonces

$$c_{V^*,V} = (e \otimes 1_V \otimes 1_{V^*})(1_{V^*} \otimes c_{V,V} \otimes 1_{V^*})(1_{V^*} \otimes 1_V \otimes b).$$

Definición 2.2. Se dice que c es *rígida* si $c_{V^*,V}$ es un isomorfismo.

De una manera similar se define c_{V,V^*} (esto se deja como ejercicio al lector, conviene definir primero la inversa de este morfismo) y se puede probar que si c es rígida entonces c_{V,V^*} es un iso. Por último, se pone $c_{V^*,V^*} = (c_{V,V})^*$ (se usa la siguiente identificación entre $(V \otimes V)^*$ y $V^* \otimes V^*$: $(f \otimes g) \otimes (v \otimes w) \mapsto f(w)g(v)$).

2.4. **Un caso particular: trenzas "de tipo I".** Supongamos ahora que c satisface las siguientes igualdades:

$$\tau \circ b = c_{V,V^*} \circ b : \mathbf{k} \to V^* \otimes V, \qquad e \circ \tau = e \circ c_{V,V^*} : V \otimes V^* \to \mathbf{k},$$

donde τ es la transposición usual $x \otimes y \mapsto y \otimes x$. Definimos entonces

$$\bar{b} := \tau b : \mathbf{k} \to V^* \otimes V, \qquad \bar{e} := e\tau : V \otimes V^* \to \mathbf{k},$$

que se dibujarán de manera análoga a b y e (ver figura 12), pero con las cuerdas "yendo hacia la derecha".

En este caso podemos definir un invariante *cuántico* de nudos, como sigue. Sea una trenza en $\mathbb{B}_n$, donde se orientan las componentes. Como se dijo antes, las cuerdas hacia arriba se pintan con V, las que son hacia abajo se pintan con V^*. Luego, f tiene asociado un endomorfismo de $W = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, donde $V_i = V$ ó $V_i = V^*$. Nótese que clausurar una trenza corresponde a tomar la traza: si notamos $f : W \to W$ el endomorfismo asociado, la clausura de f se asocia a $\mathbf{k} \ni 1 \mapsto \sum_{i=1}^{M} \bar{b}^i(f(\bar{b}_i)) = \operatorname{tr} f$, con $\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_M\}$ una base de W y $\{\bar{b}^1, \dots, \bar{b}^M\}$ la base dual. Como primer ejemplo, tomemos V el espacio vectorial con base $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, y $c(x_i \otimes x_j) = x_{2i-j} \otimes x_i$ (los subíndices en $\mathbb{Z}_n$). El invariante definido de esta manera cuenta la cantidad de n-coloreos.

De manera más general, sea $(X, *)$ un quandle, es decir, $* : X \times X \to X$ es tal que

(1) $x * \bullet : X \to X$ es biyectiva $\forall x \in X$.
(2) $x * x = x$ $\forall x \in X$.
(3) $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$ $\forall x, y, z \in X$.

Sea $q : X \times X \to \mathbf{k}^\times$ un 2-cociclo de quandles, es decir

(1) $q(x * y, x * z)q(x, z) = q(x, y * z)q(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$,
(2) $q(x, x) = 1$, $\forall x \in X$.

Definimos $V = \mathbf{k}X$ (el espacio vectorial con base X) y $c \in \operatorname{Aut}(V \otimes V)$, $c(x \otimes y) = q(x, y)(x * y) \otimes x$ (y se extiende linealmente). Entonces c es una solución rígida de la ET, y satisface las condiciones $e(c - \tau) = 0$, $(c - \tau)b = 0$. Sirve entonces para encontrar invariantes. Estos invariantes son conocidos como *quandle cocycle invariants*, ver por ejemplo [CJKLS].

2.5. **Categorías de cintas y lazos con marco.** Por encima de la clase de lazos se encuentra la clase de *lazos con marco*. Estos son lazos con un dato adicional: un campo ortogonal nunca nulo. Como nuestros lazos son lineales a trozos, en los puntos en que la tangente del lazo está bien definida, el concepto de *ortogonal* no presenta problemas. En los puntos en que la tangente no está definida, hay una tangente "por derecha" y otra "por izquierda". En estos puntos, *ortogonal* significa ortogonal a ambas tangentes. Dado cualquier diagrama de un lazo, se puede pensar que el marco es el vector apuntando hacia "afuera" del dibujo, en dirección al lector. Todo lazo con marco se puede dibujar de esta manera, al precio de agregar "vueltas" (como del lado izquierdo o derecho del movimiento de Reidemeister de tipo I, en la fig. 5).

Los movimientos de Reidemeister para lazos con marco son levemente distintos a los movimientos para lazos. Mientras los de tipo II y III siguen vigentes, se cambian los movimientos de tipo I por los dibujados en la figura 14. Uno de los usos de

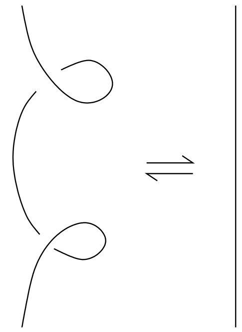


FIGURA 14. Movimiento de Reidemeister de tipo 0

los lazos con marco es la clasificación de las variedades cerradas de dimensión 3, mediante la técnica de cirugía. Determinadas soluciones de la ecuación de trenzas permiten entonces encontrar invariantes de estas variedades.

Si V es un espacio vectorial con una solución de la ET $c \in \mathrm{Aut}(V \otimes V)$ rígida, podemos considerar el caso en que c tenga un *morfismo de cintas*. Esto es una colección de morfismos $\theta_W \in \mathrm{Aut}(W)$ para todo W un producto tensorial de copias de V y V^* tales que θ es natural (es decir, $\theta_{W_2} f = f\theta_{W_1}$ para $f : W_1 \to W_2$ un morfismo que se construye a partir de c, b, e), $\theta_{W^*} = (\theta_W)^*$, y

$$\theta_{W_1 \otimes W_2} = c_{W_2,W_1} c_{W_1,W_2} (\theta_{W_1} \otimes \theta_{W_2}). \tag{2.4}$$

En este caso definimos los morfismos $b^- : \mathbf{k} \to V^* \otimes V$ y $e^- : V \otimes V^* \to \mathbf{k}$:

$$b^- = (1_V \otimes \theta_V^{-1})(c^{-1})_{V,V^*} b, \qquad e^- = e c_{V,V^*} (\theta_V \otimes 1_{V^*}).$$

Estos morfismos se asocian a las curvas de la figura 15.

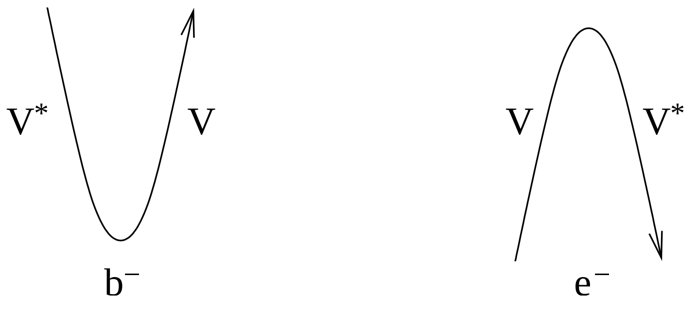


FIGURA 15. Morfismos b^- y e^-

De esta manera podemos asociar un invariante a todo lazo con marco: un diagrama del lazo se interpreta como un morfismo $\mathbf{k} \to \mathbf{k}$ leyéndolo de abajo hacia arriba. Es de notar que la "vuelta" de arriba en la figura 14 se asocia a θ^{-1} mientras que la de abajo se asocia a θ, de donde la invariancia por este movimiento. Por otra parte, esto explica por qué en general esta definición no es invariante por el movimiento de tipo I.

En ciertos casos esto permite definir un invariante de lazos. Supongamos que θ actúa en V y V^* por un escalar. Para un diagrama L de un lazo, consideramos $\omega(L) \in \mathbb{Z}$ como la cantidad de cruces positivos entre cada componente y sí misma, menos la cantidad de cruces negativos entre cada componente y sí misma. Esto se conoce como el *writhe* del diagrama, y cambia con movimientos de tipo I. Lo que se debe hacer, entonces, es normalizar el diagrama multiplicando por $\theta^{-\omega(L)}$. Consideremos como ejemplo un nudo de trébol con cruces positivos. Hay dos presentaciones del mismo en la figura 16, ambos diagramas con writhe 3.

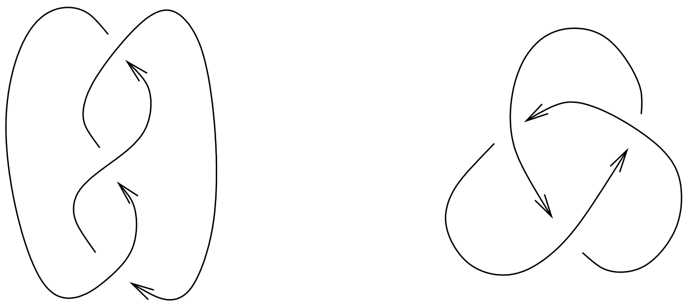


FIGURA 16. Dos presentaciones del nudo de trébol positivo

Al diagrama de la izquierda le asociamos

$$\theta^{-3}(e \otimes e^-)(1_{V^*} \otimes c^3_{V,V} \otimes 1_{V^*})(b^- \otimes b), \tag{2.5}$$

mientras que al de la derecha le asociamos

$$\theta^{-3}e(1_{V^*} \otimes e \otimes 1_V)((c^{-1})_{V^*,V^*} \otimes (c^{-1})_{V,V})(1_{V^*} \otimes c_{V,V^*} \otimes 1_V)(b^- \otimes b^-)$$

(ambos números coinciden). Veremos una familia importante de ejemplos de estos invariantes al final de las notas.

3. La tercera es la vencida

Hay una manera de construir soluciones de la ET de manera sistemática. Este fue justamente el objetivo de Drinfeld cuando introdujo los grupos cuánticos. Para describirlas, debemos ver, aunque de manera muy sucinta, qué es un álgebra de Hopf.

3.1. **Álgebras de Hopf, definiciones.** De aquí en más $\mathbf{k}$ será un cuerpo. Una $\mathbf{k}$-álgebra (asociativa, unitaria) A es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial con dos morfismos m :

$A \otimes A \to A$ y $\eta : \mathbf{k} \to A$ tales que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A \arrow[r, "m\otimes 1_A"] \arrow[d, "1_A\otimes m"'] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\ A\otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, equal] & A\otimes \mathbf{k} \arrow[d, "1_A\otimes\eta"] \\ A & A\otimes A \arrow[l, "m"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, equal] & \mathbf{k}\otimes A \arrow[d, "\eta\otimes 1_A"] \\ A & A\otimes A \arrow[l, "m"] \end{tikzcd}$$

Esta definición permite introducir el concepto dual: una coálgebra (coasociativa, counitaria) C es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial con dos morfismos, $\Delta : C \to C \otimes C$, $\varepsilon : C \to \mathbf{k}$ tales que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} C\otimes C\otimes C & C\otimes C \arrow[l, "\Delta\otimes 1_C"'] \\ C\otimes C \arrow[u, "1_C\otimes\Delta"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[d, equal] & C\otimes \mathbf{k} \arrow[l, "\simeq"'] \\ C \arrow[r, "\Delta"'] & C\otimes C \arrow[u, "1_C\otimes\varepsilon"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[d, equal] & \mathbf{k}\otimes C \arrow[l, "\simeq"'] \\ C \arrow[r, "\Delta"'] & C\otimes C \arrow[u, "\varepsilon\otimes 1_C"'] \end{tikzcd}$$

Más adelante usaremos la siguiente notación, que se debe a Sweedler: dado un elemento $c \in C$, notaremos $\Delta(c) =: \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$. La primera reacción usual ante esta notación es la de rechazo, pero la práctica demuestra que es muy conveniente. Gracias a la coasociatividad, si aplicamos $\Delta \otimes 1_C$ o $1_C \otimes \Delta$ a $\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ obtendremos el mismo elemento, que se notará $\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$. Los axiomas de la counidad se pueden entonces reescribir como $\sum c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}) = \sum \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c$.

Ejemplos de coálgebras: tómese cualquier álgebra de dimensión finita. El dual es una coálgebra (es necesario que sea de dimensión finita para que el morfismo natural $A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ sea suryectivo).

Si A es un álgebra, un A-módulo (a izquierda) es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial M con un morfismo $\rightharpoonup : A \otimes M \to M$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes M \arrow[r, "m\otimes 1_M"] \arrow[d, "1_A\otimes\rightharpoonup"'] & A\otimes M \arrow[d, "\rightharpoonup"] \\ A\otimes M \arrow[r, "\rightharpoonup"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, equal] & \mathbf{k}\otimes M \arrow[d, "\eta\otimes 1_M"] \\ M & A\otimes M \arrow[l, "\rightharpoonup"] \end{tikzcd}$$

Dada entonces una coálgebra C, un *comódulo* (a izquierda) es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial N con un morfismo $\delta : N \to C \otimes N$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} C\otimes C\otimes N & C\otimes N \arrow[l, "\Delta\otimes 1_N"'] \\ C\otimes N \arrow[u, "1_C\otimes\delta"] & N \arrow[l, "\delta"] \arrow[u, "\delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N \arrow[d, equal] & \mathbf{k}\otimes N \arrow[l, "\simeq"'] \\ N \arrow[r, "\delta"'] & C\otimes N \arrow[u, "\eta\otimes 1_N"'] \end{tikzcd}$$

Se usa para comódulos la siguiente variante de la escritura de Sweedler: $\delta(n) = \sum n_{(-1)} \otimes n_{(0)} \in C \otimes N$.

Ambos conceptos (álgebra y coálgebra) se ponen juntos ahora y se define una *biálgebra* B como un $\mathbf{k}$-espacio vectorial con morfismos $m, \eta, \Delta, \varepsilon$ de manera que B con m y η es un álgebra, B con Δ y ε es una coálgebra y se tiene la siguiente compatibilidad entre m y Δ: el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B\otimes B & \xrightarrow{\Delta\otimes\Delta} & B\otimes B\otimes B\otimes B \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m_{13}\otimes m_{24}} \\ B\otimes B & \xrightarrow[\Delta]{} & B\otimes B \end{array}$$

es conmutativo. Aquí m_{13} es el resultado de aplicar m a las coordenadas 1 y 3; y m_{24} lo es de las coordenadas 2 y 4. En la notación de Sweedler, este diagrama se puede expresar $\sum (xy)_{(1)}\otimes(xy)_{(2)} = \sum x_{(1)}y_{(1)}\otimes x_{(2)}y_{(2)}$.

Como ejemplo de biálgebra puede tomarse $\mathbf{k}[G]$, donde G es un monoide asociativo. El coproducto Δ es $\Delta(g) = g\otimes g$ para $g\in G$ y se extiende linealmente. La counidad ε es $\varepsilon(g) = 1$ $\forall g\in G$ y se extiende linealmente. Se deja como ejercicio chequear que los axiomas se satisfacen.

Si G es un grupo uno tiene un morfismo más: $g\mapsto g^{-1}$. En el lenguaje construido hasta ahora, este morfismo (que extenderemos por linealidad a $\mathbf{k}[G]$ y llamaremos $\mathcal{S}$) se puede describir mediante los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}[G] & \xrightarrow{\Delta} & \mathbf{k}[G]\otimes\mathbf{k}[G] \\ {\scriptstyle \eta\epsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{S}\otimes 1_{\mathbf{k}[G]}} \\ \mathbf{k}[G] & \xleftarrow[m]{} & \mathbf{k}[G]\otimes\mathbf{k}[G] \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{k}[G] & \xrightarrow{\Delta} & \mathbf{k}[G]\otimes\mathbf{k}[G] \\ {\scriptstyle \eta\epsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\mathbf{k}[G]}\otimes\mathcal{S}} \\ \mathbf{k}[G] & \xleftarrow[m]{} & \mathbf{k}[G]\otimes\mathbf{k}[G] \end{array}$$

Con este ejemplo en mente, entonces, podemos definir un *álgebra de Hopf* como una biálgebra H con un morfismo lineal $\mathcal{S}: H\to H$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\Delta} & H\otimes H \\ {\scriptstyle \eta\epsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{S}\otimes 1_H} \\ H & \xleftarrow[m]{} & H\otimes H \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\Delta} & H\otimes H \\ {\scriptstyle \eta\epsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_H\otimes\mathcal{S}} \\ H & \xleftarrow[m]{} & H\otimes H \end{array}$$

En la notación de Sweedler, $\sum h_{(1)}\mathcal{S}(h_{(2)}) = \sum \mathcal{S}(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1$.

Si H es un álgebra de Hopf, la categoría de H-módulos (a izquierda) es *monoidal.* Definiremos esto más adelante, baste decir por ahora que esto quiere decir que hay un producto tensorial con un objeto neutro para el mismo. Específicamente, si M, N son H-módulos, se toma $M\otimes N$ como el producto tensorial de los $\mathbf{k}$-espacios vectoriales M y N con la estructura dada por

$$h(m\otimes n) = \sum h_{(1)}m\otimes h_{(2)}n.$$

Esta estructura se denominará *diagonal.* El objeto neutro es el cuerpo $\mathbf{k}$, visto como H-módulo vía ε: $hk = \varepsilon(h)k$.

La categoría de H-comódulos es también monoidal, con estructura que llamaremos también *diagonal.* Si M y N son H-comódulos, se toma

$$\delta(m\otimes n) = \sum (m_{(-1)}n_{(-1)})\otimes m_{(0)}\otimes n_{(0)}.$$

El objeto neutro es también $\mathbf{k}$, con estructura $k\mapsto 1\otimes k$.

3.2. **Familias de ejemplos de álgebras de Hopf.** Daremos dos nuevas familias ejemplos básicos de álgebras de Hopf: las álgebras envolventes de álgebras de Lie, y las álgebras de Taft.

Recordemos antes que dado un grupo G se tiene una estructura de álgebra de Hopf en $\mathbf{k}[G]$. Esto da, para el caso de un grupo finito, un álgebra de Hopf dual a la anterior: $\mathbf{k}^G$. Como espacio vectorial, son las funciones $G \to \mathbf{k}$, donde se toma el producto punto a punto (en particular, son conmutativas). Si $\{\delta_g \mid g \in G\}$ es una base de $\mathbf{k}^G$ (tomamos $\delta_g(h) = \delta_{gh}$), se tiene $\Delta(\delta_g) = \sum_{h\in G} \delta_{gh^{-1}} \otimes \delta_h$, $\varepsilon(f) = f(1)$, $\mathcal{S}(\delta_g) = \delta_{g^{-1}}$.

Vayamos ahora a las familias prometidas. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie; y sea $U(\mathfrak{g})$ su álgebra envolvente. Se "completa" a $U(\mathfrak{g})$ con la estructura de coálgebra y antípoda dadas por $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 \; \forall x \in \mathfrak{g}$, $\varepsilon(x) = 0 \; \forall x \in \mathfrak{g}$, $\mathcal{S}(x) = -x \; \forall x \in \mathfrak{g}$. Estos morfismos se extienden a todo $U(\mathfrak{g})$ por linealidad y usando que son multiplicativos (Δ y ε) o antimultiplicativos ($\mathcal{S}$).

Estas estructuras son naturales para cualquiera que haya mirado con detenimiento un álgebra de Lie. En particular, la categoría de $U(\mathfrak{g})$-módulos (es decir, la categoría de $\mathfrak{g}$-módulos) es monoidal, con acción $x(m\otimes n) = xm\otimes n + m\otimes xn \; \forall x \in \mathfrak{g}$.

Veamos las álgebras de Taft. Sea q una raíz de la unidad de orden n. El álgebra T_q es, como álgebra, la generada por g, x con relaciones $g^n = 1$, $x^n = 0$, $gx = qxg$. Es intuitivamente claro entonces que el conjunto $\{x^i g^j \mid 0 \le i, j < n\}$ es una base, por lo que $\dim T_q = n^2$. La estructura de coálgebra se puede definir, como antes, en los generadores: $\Delta(g) = g \otimes g$, $\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1$. La antípoda existe, está determinada por $\mathcal{S}(g) = g^{-1} = g^{n-1}$, $\mathcal{S}(x) = -g^{-1}x$.

El caso $q = -1$ da un álgebra de dimensión 4 también conocida como *álgebra de Sweedler*. Fue el primer ejemplo de un álgebra de Hopf no conmutativa ni coconmutativa (noción dual a la conmutatividad, cuya definición se deja a cargo del lector).

3.3. **Categoría de Yetter-Drinfeld.** Las álgebras de Hopf adquirieron una súbita consideración cuando en los 80 Drinfeld inventó lo que hoy se conoce como *doble de Drinfeld* de un álgebra de Hopf de dimensión finita. Esto permitió encontrar una gran cantidad de soluciones nuevas a la ecuación de trenzas. El punto central es que un módulo M sobre el doble de Drinfeld de un álgebra de Hopf tiene asociado naturalmente un morfismo $c_M \in \mathrm{Aut}(M \otimes M)$ que es una solución de la ecuación.

La construcción del doble de un álgebra es de todas maneras un proceso delicado y lleva tiempo hacer las cuentas en detalle. Hoy en día hay un lenguaje un poquito más sencillo que tiene además la ventaja de que sirve para álgebras de Hopf de dimensión infinita: el de los módulos de Yetter-Drinfeld.

Sea H un álgebra de Hopf. Un módulo (a izquierda) de Yetter-Drinfeld sobre H es un H-módulo M (con estructura $\rightharpoonup$) que es a la vez un H-comódulo (con estructura δ) tal que

$$\delta(hm) = \sum h_{(1)} m_{(-1)} \mathcal{S}(h_{(3)}) \otimes h_{(2)} m_{(0)} \tag{3.1}$$

Se deja como ejercicio escribir esto en términos de diagramas conmutativos.

Llamamos ${}^H_H\mathcal{YD}$ a la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre H (los morfismos son las funciones lineales que son morfismos de módulos y de comódulos). El producto tensorial de dos objetos en ${}^H_H\mathcal{YD}$ es un nuevo objeto en ${}^H_H\mathcal{YD}$ con las estructuras diagonales de módulo y comódulo.

Si M y N son objetos en ${}^H_H\mathcal{YD}$, se considera el isomorfismo $c_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M$ dado por

$$c_{M,N}(m \otimes n) = m_{(-1)}n \otimes m_{(0)} \in N \otimes M.$$

Supongamos entonces que M, N, P son tres objetos de ${}^H_H\mathcal{YD}$. Se puede demostrar, gracias al hecho de que $c_{\bullet,\bullet}$ es un morfismo en la categoría (o simplemente a mano), que

$$\begin{aligned}(c_{N,P} \otimes 1_M)(1_N \otimes c_{M,P})(c_{M,N} \otimes 1_P) &= (1_P \otimes c_{M,N})(c_{M,P} \otimes 1_N)(1_M \otimes c_{N,P})\\ &: M \otimes N \otimes P \to P \otimes N \otimes M.\end{aligned}$$

En particular, si $M = N = P$, esto prueba que $c_{M,M}$ es una solución de la ecuación de trenzas.

3.4. **Un caso interesante: el álgebra de Taft.** Sea $q \in \mathbf{k}^\times$. Si q es una raíz de la unidad, pondremos M su orden. Si no, tomamos $M = \infty$. Consideramos H el álgebra generada por x, g, g^{-1} con relación $gx = qxg$. Si $M < \infty$ agregamos también las relaciones $x^M = 0$, $g^M = 1$, y resulta $H = T_q$ el álgebra de Taft. El conjunto $\{x^i g^j \mid 0 \le i, j < M\}$ es una base de H. La comultiplicación, counidad y antípoda se definen para el caso $M = \infty$ con las mismas fórmulas que para el caso finito. Si $M < \infty$, supondremos que es impar, y tomaremos $\frac{1}{2} = \frac{M+1}{2} \in \mathbb{Z}_M$ en fórmulas del estilo $g^{\frac{1}{2}}$, $q^{\frac{1}{4}}$, etcétera.

En el caso $M < \infty$, $H^* \simeq H$. Para explicitar este isomorfismo, consideremos otra copia de H generada por y, G (y juega el papel de x y G el de g). La dualidad está dada por $y^i G^j(x^k g^l) = \delta_{ik}(i)^!_q q^{jl}$. Consideramos entonces, para $n \in \mathbb{N}_0$, el espacio V_n con base $\{v_{-n}, v_{-n+2}, v_{-n+4}, \dots, v_{n-2}, v_n\}$. Definimos una acción de H sobre V_n por

$$gv_r = q^{-\frac{r}{2}}, \qquad xv_r = v_{r-2}.$$

En el caso $M < \infty$ tomamos una estructura similar, como módulo a derecha sobre H^*:

$$v_r G = q^{-\frac{r}{2}}, \qquad v_r y = \alpha_r v_{r+2},$$

donde $\alpha_r = q^{-\frac{r+n+2}{2}}(q-1)(\frac{r+n+2}{2})_q(\frac{n-r}{2})_q$. Esto da una estructura de H-comódulo a izquierda:

$$\delta(v_r) = \sum_{i\ge 0} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_{r+2j}}{(i)^!_q} x^i g^{-\frac{r+2i}{2}} \otimes v_{r+2i}.$$

Esta estructura se puede definir también para el caso $M = \infty$. Es tedioso pero sencillo probar que con estas estructuras V_n es un módulo de Yetter-Drinfeld sobre H.

Observación 3.1. Estas estructuras son similares a las de los módulos simples sobre $U(\mathfrak{sl}_2)$. La razón es que, cuando $M < \infty$, hay un morfismo de álgebras de Hopf $D(T_q) \to u_q(\mathfrak{sl}_2)$, por lo que de la categoría de módulos sobre $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ (que se parece a la de los módulos sobre $U(\mathfrak{sl}_2)$) hay un funtor de pullback en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre T_q.

Se puede probar que $V_n^* \simeq V_n$. Se puede probar también que V_n es simple. Gracias a [KR], en el caso $M < \infty$ la categoría ${}^H_H\mathcal{YD}$ es de cintas. Como V_n es simple, el twist θ actúa por una constante en V_n, llamémosla θ_n. Calculamos $c_{V_n,V_m}(v_n \otimes v_m) = q^{\frac{nm}{4}}(v_m \otimes v_n)$, y luego la ecuación (2.4) se transforma en

$$\theta_{n+m} = q^{\frac{nm}{2}}\theta_n\theta_m, \qquad \theta_0 = 1.$$

Las soluciones de esta ecuación son de la forma $\theta_n = q^{\frac{n^2+\gamma n}{4}}$. Mirando la descomposición $V_1 \otimes V_1 \simeq V_2 \oplus V_0$, se puede probar que necesariamente es $\gamma = 2$, con lo que $\theta_n = q^{\frac{n^2+2n}{4}}$.

Consideremos el caso $n = 1$. Llamemos $V = V_1$, $v_- = v_{-1}$, $v_+ = v_1$. Llamamos w_-, w_+ a la base dual, y pondremos, por ejemplo $z_{+-} = v_+ \otimes v_-$ si estamos en $V \otimes V$, o $z_{+-} = v_+ \otimes w_-$ si estamos en $V \otimes W$, etcétera. Es fácil ver que la trenza c_{V_1,V_1} está dada por la matriz

$$c = c_{V,V} = \begin{pmatrix} q^{1/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{1/4} - q^{-3/4} & q^{-1/4} & 0 \\ 0 & q^{-1/4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{1/4} \end{pmatrix}$$

en la base $\{z_{--}, z_{-+}, z_{+-}, z_{++}\}$. En las mismas bases, las matrices de c_{V^*,V^*}, $c_{V^*,V}$, $c_{V^*,V}$ son

$$c_{V^*,V^*} = \begin{pmatrix} q^{1/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1/4} & 0 \\ 0 & q^{-1/4} & q^{1/4} - q^{-3/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{1/4} \end{pmatrix}$$

$$c_{V^*,V} = \begin{pmatrix} q^{1/4} & 0 & 0 & q^{-1/4} - q^{3/4} \\ 0 & 0 & q^{1/4} & 0 \\ 0 & q^{1/4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1/4} \end{pmatrix}$$

$$c_{V,V^*} = \begin{pmatrix} q^{-1/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{1/4} & 0 \\ 0 & q^{1/4} & 0 & 0 \\ q^{-5/4} - q^{-1/4} & 0 & 0 & q^{1/4} \end{pmatrix}$$

Con estas matrices se puede calcular b^- y e^-; es fácil ver que

$$b^-(1) = q^{1/2} z_{--} + q^{-1/2} z_{++}, \qquad e^-(z_{--}, z_{-+}, z_{+-}, z_{++}) = (q^{-1/2}, 0, 0, q^{1/2}).$$

Finalmente, calculemos como ejemplo el invariante a los dos nudos de trébol. Los podemos presentar como la clausura de las trenzas $\sigma_1^3 \in \mathbb{B}_2$ y $\sigma_1^{-3} \in \mathbb{B}_2$. Para eso es bueno calcular las matrices de c^3 y c^{-3}, que son

$$c^3 = \begin{pmatrix} q^{3/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-9/4}(q-1)(q^2+1) & q^{-7/4}(q^2-q+1) & 0 \\ 0 & q^{-7/4}(q^2-q+1) & q^{-1/4} - q^{-5/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{3/4} \end{pmatrix},$$

$$c^{-3} = \begin{pmatrix} q^{-3/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{1/4} - q^{5/4} & q^{-1/4}(q^2-q+1) & 0 \\ 0 & q^{-1/4}(q^2-q+1) & -q^{-3/4}(q-1)(q^2+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-3/4} \end{pmatrix}.$$

El invariante asociado al nudo de trébol con cruces positivos es entonces, de acuerdo con (2.5),

$$\begin{aligned}
&\theta_2^{-3}(e\otimes e^-)(1_{V^*}\otimes c^3\otimes 1_{V^*})(b^-\otimes b)\\
&\quad= \theta_2^{-3}(e\otimes e^-)(1_{V^*}\otimes c^3\otimes 1_{V^*})\\
&\qquad\quad \big(q^{1/2}z_{----}+q^{1/2}z_{--++}+q^{-1/2}z_{++--}+q^{-1/2}z_{++++}\big)\\
&\quad= \theta_2^{-3}(e\otimes e^-)\big(q^{5/4}z_{----}+q^{-7/4}(q-1)(q^2+1)z_{--++}\\
&\qquad\quad +q^{-5/4}(q^2-q+1)z_{-+-+}+q^{-9/4}(q^2-q+1)z_{+-+-}\\
&\qquad\quad +(q^{-3/4}-q^{-7/4})z_{++--}+q^{1/4}z_{++++}\big)\\
&\quad= \theta_2^{-3}(q^{3/4}+q^{-5/4}(q-1)(q^2+1)+(q^{-5/4}-q^{-9/4})+q^{3/4})\\
&\quad= \theta_2^{-3}(q^{3/4}+q^{7/4}-q^{3/4}+q^{-1/4}-q^{-5/4}+q^{-5/4}-q^{-9/4}+q^{3/4})\\
&\quad= q^{-1/2}+q^{-3/2}+q^{-5/2}-q^{-9/2}
\end{aligned}$$

De manera similar se calcula el invariante del nudo de trébol con cruces negativos, y se obtiene

$$-q^{9/2}+q^{5/2}+q^{3/2}+q^{1/2},$$

con lo que tenemos una prueba de que ambos nudos no son isotópicos.

Observación 3.2. El polinomio de Jones se puede recuperar a partir de la familia de invariantes obtenidos coloreando con los módulos V_n. Este polinomio fue el primer invariante capaz de distinguir nudos simétricos.

Referencias

[CJKLS] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford and M. Saito, *State-sum invariants of knotted curves and surfaces from quandle cohomology*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear. Also in `math.GT/9903135`.

[H] G. Hemion, *The classification of knots and 3-dimensional spaces*, Oxford University Press, 1992.

[KR] L.H. Kauffman y D.E. Radford, *A necessary and sufficient condition for a finite dimensional Drinfel'd double to be a ribbon Hopf algebra*, J. Algebra **159**, (1993), 98–114.

[L] W.B.R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Springer Verlag, GTM **175** (1997).

[M] H.R. Morton, *Threading knot diagrams*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **99**, (1986), 247–260.

[T] V.G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, de Gruyter, Studies in Mathematics **18**, (1994).

Otras fuentes no citadas en el texto

[A] P. Almodóvar, *Átame*, (1990).

[As] Clifford W. Ashley , *The Ashley Book of Knots*, (1944). The Ashley Book of Knots takes us back to a time when knots saved lives and put dinner on the table. Whether out at sea or in a pioneer cabin, knots were a part of daily life, one that is nearly lost today. But in this attractive, well-organized archive of more than 3,900 different knots–presented through 7,000 illustrations–the art of knot tying lives on, both as a historical reference and a reservoir of handy knowledge.

[B] Geoffrey Budworth, *The Complete Book of Fishing Knots*, (1999).

[FM] T. Fink y Y. Mao, *The 85 Ways to Tie a Tie: The Science and Aesthetics of Tie Knots*, (2001). También en Nature, **398**, 31–32 (1999).

[IR] M.H. Ibertis Rivera, *Maria Als Knotenlöserin*, (2001).

[O] P. Owen, *Los nudos decorativos paso a paso*, (2002).