

## ALGEBRA III

## Práctica 7

1. Sea  $p$  primo y sea  $t$  trascendente sobre  $\mathbb{Z}_p$ . Probar que  $X^p - t$  es irreducible en  $\mathbb{Z}_p(t)[X]$ .
2. Sea  $K$  un cuerpo de característica  $p > 0$ . Si  $a \in K - K^p$  y  $n \in \mathbb{N}_0$ , probar que  $X^{p^n} - a$  es irreducible en  $K[X]$ .
3. Dar ejemplos de extensiones no separables.
4. Sea  $K$  un cuerpo de característica  $p > 2$  y sea  $\{u, v\}$  indeterminadas independientes sobre  $K$ . Sea  $f = X^{2p} + uvX^p + u \in K(u, v)[X]$ . Probar que la extensión  $K(u, v)[X]/\langle f \rangle$  es de grado  $2p$  sobre  $K(u, v)$  y no es separable ni puramente inseparable.
5. Sea  $\{u, v\}$  indeterminadas independientes sobre  $\mathbb{Z}_p$ 
  - (i) Calcular el grado y el grado de inseparabilidad de  $\mathbb{Z}_p(u, v)/\mathbb{Z}_p(u^p, v^p - v - u)$ .
  - (ii) Idem para  $\mathbb{Z}_p(u, v)/\mathbb{Z}_p(u^p - u, v^p - v)$ .
6. Sea  $K = \mathbb{Z}_p(t)$  con  $t$  trascendente sobre  $\mathbb{Z}_p$ ,  $C/K$  una clausura algebraica,  $r, n \in \mathbb{N}$  tales que  $r < p^n$  y  $\alpha \in C$  una raíz de  $X^{p^n} - tX^r + t \in K[X]$ . Sea  $m = \max\{k \in \mathbb{N}_0 / p^k | r\}$ . Probar que  $[K(\alpha)/K]_{\text{ins}} = p^m$ .
7. Sea  $K = \mathbb{Z}_p(u)$ , donde  $p$  es primo distinto de 2 y  $u$  trascendente sobre  $\mathbb{Z}_p$ . Sea  $C/K$  una clausura algebraica y  $\alpha \in C$  una raíz de  $f = X^{p^3} - uX^p + u \in K[X]$ . Sea  $L$  la clausura normal de la clausura separable de  $K(\alpha)/K$ . Hallar  $[L : K]$ .
8. Sea  $K$  un cuerpo de característica  $p$  (donde  $p$  puede ser 0). Sea  $C/K$  una clausura algebraica y sea  $G = G(C/K)$ .

Sea  $K^{p^{-\infty}} := \{x \in C / \sigma(x) = x \ \forall \sigma \in G\} (= C^G)$ .

Definición equivalente de cuerpo perfecto: Un cuerpo  $K$  se dice *perfecto* sii  $K^{p^{-\infty}} = K$

Probar que:

(i)

$$K^{p^{-\infty}} = \begin{cases} K & \text{si } p = 0 \\ \{x \in C / x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\} & \text{si } p \neq 0 \end{cases}$$

(ii) Probar que la construcción de  $K^{p^{-\infty}}$  no depende de la clausura algebraica elegida.

(iii) Sea  $K$  de característica  $p > 0$ . Probar que  $K$  es perfecto si y sólo si el morfismo  $f : K \rightarrow K$  definido por  $f(x) = x^p$  es automorfismo.

9. (i) Probar que  $K$  es perfecto si y sólo si toda extensión algebraica de  $K$  es separable.  
(ii) Probar que si  $K$  no es perfecto entonces  $[K^{p^{-\infty}} : K] = \infty$ .
10. Probar que  $K^{p^{-\infty}}$  es perfecto y que  $C/K^{p^{-\infty}}$  es de Galois.
11. Probar que si  $K$  es un cuerpo de característica positiva entonces  $K(X)$  no es perfecto.
12. Sea  $K$  un cuerpo y sea  $E/K$  una extensión algebraica.
  - (i) Probar que si  $K$  es perfecto entonces  $E$  es perfecto.
  - (ii) Probar que si  $E$  es perfecto y  $E/K$  separable entonces  $K$  es perfecto.
  - (iii) Probar que si  $[E : K] < \infty$  y  $E$  es perfecto entonces  $E/K$  es separable.