

ALGEBRA III
Práctica 3

1. Sea E/K extensión algebraica tal que todo polinomio no cte en $K[X]$ se descompone linealmente en $E[X]$. Probar que E es algebraicamente cerrado.
2. Exhibir cuerpos de descomposición, determinando su grado y sistemas de generadores para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados:
 - (i) $X^p - a$ sobre \mathbb{Q} , con p primo y $a \in \mathbb{N} - \mathbb{N}^p$.
 - (ii) $X^3 - 10$ sobre \mathbb{Q} , $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$
 - (iii) $X^4 - 5$ sobre \mathbb{Q} , $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$, $\mathbb{Q}[i]$.
 - (iv) $\prod_{i=1}^n (X^2 - p_i)$ sobre \mathbb{Q} , con p_1, \dots, p_n primos distintos.
 - (v) $X^3 - 2$ sobre \mathbb{Z}_7 .
 - (vi) $(X^3 - 2)(X^3 - 3)(X^2 - 2)$ sobre \mathbb{Z}_5 .
 - (vii) $X^n - t$ sobre $\mathbb{C}(t)$, con t trascendente sobre \mathbb{C}
3. Sea $f = X^3 + X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$. Sea C/\mathbb{Z}_3 una clausura algebraica de \mathbb{Z}_3 y $\alpha \in C$ una raíz de f . Probar que $\mathbb{Z}_3(\alpha)/\mathbb{Z}_3$ es normal.
4. Sea K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y t trascendente sobre K . Probar que $K(t)/K(t^n)$ es normal si y sólo si $X^n - 1$ se factoriza linealmente en $K[X]$.
5. Sea $f = (X^2 + 1)(X^2 + X - 1) \in \mathbb{Z}_3[X]$. Calcular un cuerpo de descomposición de f sobre \mathbb{Z}_3 y determinar su grupo de Galois.
6. Caracterizar los cuerpos de descomposición de $X^3 + 2X + 1$ y de $X^3 + X^2 + X + 2$ sobre \mathbb{Z}_3 . Probar que son isomorfos como extensiones de \mathbb{Z}_3 .
7. Calcular los cuerpos de descomposición de los polinomios irreducibles de grado 2 sobre \mathbb{Z}_5 . ¿Son isomorfos entre ellos?
8. Sea K un cuerpo de característica $p \neq 0$
 - (i) Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, la aplicación $f : K \rightarrow K$ definida por $f(x) = x^{p^n}$ es un \mathbb{Z}_p -morfismo de cuerpos.
 - (ii) Probar que si K es finito, entonces f es automorfismo.
9. Probar que los cuerpos finitos no son algebraicamente cerrados.
10. Sea (G, \cdot) un grupo finito. Se define el *exponente de G* como:

$$\text{exp}(G) = \min\{n \in \mathbb{N} / x^n = 1 \forall x \in G\}$$

Probar que:

- (i) Si G es cíclico, $\exp(G) = |G|$ ($|G|$ es el orden de G)
 - (ii) Si G es grupo abeliano finito, entonces existe $x \in G$ tal que $\exp(G) = |x|$
 - (iii) Si K es un cuerpo finito de m elementos, entonces K^* es cíclico de orden $m - 1$.
(Sug: si $r = \exp(K^*) \Rightarrow x^{r+1} = x \forall x \in K$)
 - (iv) Toda extensión finita de un cuerpo finito es normal.
11. Dar ejemplos de extensiones con grupo de Galois trivial que no sean normales.
 12. Caracterizar $G(E/\mathbb{Z}_2)$ para los cuerpos E de 4 y 8 elementos.
 13. Determinar el cuerpo de descomposición de $X^4 - 10X^2 + 5$ y su grupo de Galois, sobre \mathbb{Q} , \mathbb{Z}_3 y \mathbb{Z}_7 .
 14. Sea E/\mathbb{Q} una extensión que es cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado n . Probar que $[E : \mathbb{Q}] = n!$. Dar ejemplos de extensiones donde se cumpla la igualdad y donde no se cumpla.
 15. Determinar si las siguientes extensiones son normales, calcular $G(E/K)$ y $\text{Hom}(E/K, C/K)$ donde C es una clausura algebraica de K :
 - (i) $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]/\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}, \sqrt{5}]/\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$
 - (ii) $\mathbb{Q}[\xi_n]/\mathbb{Q}$
 - (iii) $\mathbb{Z}_3[a]/\mathbb{Z}_3$ con a raíz de $X^3 + X + 2$
 16. Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$ son normales, pero $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}$ no lo es. ¿Conclusiones?
 17. Sean E/K y F/K subextensiones normales de una extensión H/K . Probar que $E.F/K$ y $E \cap F/K$ son normales.
 18. Probar que toda extensión generada por elementos de grado 2 es normal. ¿Para qué valores de n se cumple que toda extensión de grado n sobre \mathbb{Q} es normal?