Capítulo 2

Números Naturales e Inducción.

Como ya sabemos, los *números naturales* son informalmente el conjunto infinito

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, 1001, 1002, \dots, 2356789, \dots\}$$

de números que empiezan en 1 y se obtienen los demás sumando siempre 1. Al final de este capítulo, se describe una construcción formal de los números naturales a través de los axiomas de Peano.

En el conjunto $\mathbb{N}$ se puede sumar y multiplicar: si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $m + n \in \mathbb{N}$ y $m \cdot n \in \mathbb{N}$. Además la suma y el producto se "portan bien":

- *Conmutatividad:* $m + n = n + m$ y $m \cdot n = n \cdot m$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$.
- *Asociatividad:* $(m + n) + k = m + (n + k)$ y $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$, $\forall\, m, n, k \in \mathbb{N}$.
- *Distributividad del producto sobre la suma:* $m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k$, $\forall\, m, n, k \in \mathbb{N}$.

El objetivo de este capítulo es adquirir herramientas que permiten demostrar (en algunos casos) que una proposición p enunciada sobre el conjunto de los números naturales es Verdadera, o sea si la proposición p está dada para cada $n \in \mathbb{N}$ por una afirmación $p(n)$, probar que $p(n)$ es Verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos de tales proposiciones p, q pueden ser

$$p: \ \forall\, n \in \mathbb{N}: \ n^2 \geq 1 \quad \text{o} \quad q: \ \forall\, n \in \mathbb{N}: \ n \geq 3.$$

Una tal proposición p es Verdadera si la afirmación asociada $p(n) : n^2 \geq 1$ es Verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$, o Falsa si la afirmación $p(n) : n^2 \geq 1$ es Falsa para al menos algún $n \in \mathbb{N}$, o sea en este caso si existe $n \in \mathbb{N} : \ n^2 < 1$. En estos ejemplos es claro que p es Verdadera, y que q es Falsa, pues $\exists\, n \in \mathbb{N} : n < 3$, por ejemplo $n = 1$.

Demostrar que una proposición p enunciada sobre todos los números naturales es Verdadera no se puede hacer "verificando" porque nunca vamos a lograr agotar todos los números naturales, sino que hacen falta ciertos mecanismos que garanticen que la demostración está probando la afirmación para todos los números naturales.

Para ejemplificar por qué una simple verificación puede engañar, consideremos el siguiente conjunto

$$A := \{\sqrt{1141n^2+1},\ n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N}.$$

Por ejemplo para $n = 1$, $\sqrt{1141n^2+1} = 33,79\ldots$, luego $1 \notin A$, y para $n = 2$, $\sqrt{1141n^2+1} = 67,56\ldots$, luego $2 \notin A$. Por tiempo se creyó que $A = \emptyset$ pero resulta que no lo es! Lo que ocurre es que el primero número natural $n \in A$ tiene 26 dígitos...


Goldbach

Otro ejemplo es la *Conjetura de Goldbach*, por el matemático prusiano *Christian Goldbach*, 1690-1764, que afirma que todo número natural par ≥ 4 es la suma de dos números primos (por ejemplo $4 = 2+2$, $8 = 5+3$, $12 = 7+5$, $100 = 3+97$). A la fecha (Agosto 2013) se verificó que esta conjetura es cierta para todos los números pares $\leq 4 \cdot 10^{18}$ pero sin embargo aún no está probada, a pesar de la cantidad de esfuerzos invertidos en ella.

Empecemos con un par de ejemplos muy clásicos e importantes.

2.1. La suma de Gauss y la serie geométrica.

2.1.1. La suma de Gauss.

Carl Friedrich Gauss, 1777-1855, fue uno de los matemáticos (y físicos) más influyentes de la historia, se lo conoce como "el príncipe de las matemáticas".

Supongamos que queremos sumar los 100 primeros números naturales, o sea

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100.$$


Gauss

Se puede hacer recursivamente $1 + 2 = 3$ luego $1 + 2 + 3 = 3 + 3 = 6$ etc., pero eso puede tardar mucho! Dice la historia que el pequeño Carl-Friedrich, cuando el maestro les dio ese problema a sus alumnos para tener un poco de paz por un rato, él contestó inmediatamente 5050, que es la respuesta correcta! ¿Qué fue lo que hizo? Se dio cuenta que si uno sumaba "al derecho y al revés", tenía una forma de sumar de dos maneras distintas:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 98 & + & 99 & + & 100 & & \\ S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 & & \\ \hline 2S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 & + & 101 & = & 100 \cdot 101. \end{array}$$

Luego $S = (100 \cdot 101)/2 = 50 \cdot 101 = 5050$.

Este procedimiento es claramente generalizable a cualquier número natural n, y se obtiene

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Notar que este número siempre es un número natural (como debe ser) ya que $n(n+1)$ siempre es un número par!

2.1.2. La serie geométrica.

Ahora, sea un número q cualquiera, y queremos sumar las $n+1$ primeras potencias de q,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n.$$

El mecanismo siguiente, parecido al de la suma de Gauss, permite hallar la suma de esta serie geométrica:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} Q & = & 1 & + & q & + & q^2 & + & \cdots & + & q^{n-1} & + & q^n & & \\ q \cdot Q & = & & & q & + & q^2 & + & q^3 & + & \cdots & + & q^n & + & q^{n+1} \\ \hline q \cdot Q - Q & = & -1 & + & & & & & & & & & & & q^{n+1}. \end{array}$$

Luego $(q-1)Q = q^{n+1} - q$ Lo que implica que si $q \neq 1$, $Q = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Pero es fácil calcular la suma para $q = 1$: da $n+1$ ¿por qué? Es decir,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad 1 + q + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ n+1 & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}$$

2.2. Sumatoria y Productoria.

Al final del capítulo anterior, vimos que a la cantidad $1 \cdot 2 \cdots n$ se le otorgó un nombre particular, el factorial, con su notación $n!$, y que la definición recursiva permite (intuitivamente) evitar el uso de los puntos suspensivos (esto lo vamos a formalizar un poco más adelante). Si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots)$ es una sucesión de números, lo mismo se puede hacer con las cantidades $a_1 + \cdots + a_n$ y $a_1 \cdots a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (como por ejemplo la suma de Gauss y la serie geométrica de arriba).

Sea entonces $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots)$ una sucesión de números $a_i \in A$ que se pueden sumar y multiplicar en el conjunto A (por ejemplo números naturales, enteros, racionales, reales, complejos, pero veremos más ejemplos en lo que sigue del curso).

2.2.1. Sumatoria.

Sea $n \in \mathbb{N}$. La notación $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$, que se lee la *sumatoria* para i de 1 a n de a_i, representa la suma de los n primeros términos de la sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n,$$

que se define formalmente *por recurrencia*, para evitar los puntos suspensivos:

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \ + a_{n+1} \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Aquí el índice i es el índice de sumación que simplemente indica cuáles son los términos de la sucesión que se suman, desde el primer a_i indicado por el valor que toma i cuando dice $i = 1$ abajo del símbolo de la sumatoria, hasta el último a_i indicado por el valor que toma i cuando dice n arriba de la sumatoria, y no tiene importancia si se lo llama i o k o de cualquier forma. Así $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k$. También se puede escribir $\sum_{1\le i\le n} a_i$.

<u>*Ejemplos:*</u>

- $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
- $\sum_{i=1}^{n} 1 = n, \ \sum_{i=1}^{n} a = n\,a, \ \sum_{i=1}^{n} n = n^2, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Esta definición de sumatoria se extiende tal cual a

$$\sum_{i=n_0}^{n} a_i = a_{n_0} + \cdots + a_n,$$

para $n_0 \le n$, y de hecho se extiende a $n_0 = 0$ (o sea tiene sentido $\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + \cdots + a_n$ si el término a_0 está definido) e incluso a índices negativos $n_0 \in \mathbb{Z}$ (si los términos a_i correspondientes están definidos). Por ejemplo:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ n+1 & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

La sumatoria satisface las dos propiedades siguientes para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo par de sucesiones $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en A y para todo $c \in A$:

- $\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)$.
- $c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i$.

Así por ejemplo, $\sum_{k=1}^{n^2}(k+n) = \Big(\sum_{k=1}^{n^2} k\Big) + \Big(\sum_{k=1}^{n^2} n\Big) = \frac{n^2(n^2+1)}{2} + n^3$.

<u>*Un programa recursivo para la sumatoria en Haskell,*</u> (de una serie que toma valores enteros, usando la *currificación* que vieron en el taller):

sumatoria :: (Integer $\to$ Integer) $\to$ Integer $\to$ Integer
sumatoria a $0 = 0$
sumatoria a $n = a\ n +$ sumatoria a $(n-1)$

Un programa iterativo para la sumatoria en Python:

Supongamos que la sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en A está definida por una función $a:\mathbb{N}\to A$, o sea tal que $a(i)=a_i$. Entonces el programa es

```
def sumatoria(n):
    s = 0
    for i in range (1, n + 1):
        s = s + a(i)
    return s
```

(La línea $s=0$ pone en la variable s el valor 0. Luego la instrucción "for i in range $(1,n+1)$" ejecuta la línea que sigue (es decir poner en la variable s el valor que tenía s sumado el valor de a_i) para todos los valores de $i\geq 1$ y $<n+1$, es decir entre 1 y n.)

2.2.2. Productoria.

Sea $n\in\mathbb{N}$. La notación $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$, que se lee la *productoria* para i de 1 a n de a_i, representa el producto de los n primeros términos de la sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1\cdots a_n,$$

que se define formalmente *por recurrencia*, para evitar los puntos suspensivos:

$$\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1 \quad \text{y} \quad \prod_{i=1}^{n+1} a_i = \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)\cdot a_{n+1}\ ,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Ejemplos:

- $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i = n!,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$
- $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} c = c^n,\ \forall\, c\in A,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$

La productoria satisface la propiedad siguiente para todo $n\in\mathbb{N}$ y sucesiones $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en A:

- $\displaystyle\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)\cdot\Big(\prod_{i=1}^{n} b_i\Big) = \prod_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i).$

Un programa recursivo para la productoria en Haskell:

productoria :: (Integer $\to$ Integer) $\to$ Integer $\to$ Integer
productoria a $0 = 0$
productoria a $n = a$ $n *$ productoria a $(n-1)$

Un programa iterativo para la productoria en Python:

Supongamos que la sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en A está definida por una función $a : \mathbb{N} \to A$, o sea tal que $f(i) = a_i$. Entonces el programa es

def prod(n):
    $p = 1$
    for i in range $(1, n+1)$:
        $p = p * f(i)$
    return p

2.3. El conjunto inductivo $\mathbb{N}$ y el principio de inducción.

Pascal

Como no a todos se nos ocurren los trucos "à la Gauss" para probar que ciertas afirmaciones son válidas para todos los números naturales, o a veces no hay truco, hay un mecanismo muy útil y que se usa muchísimo para demostrar eso, que se llama el *principio de inducción*. Este principio fue usado a lo largo del tiempo de distintas maneras desde mucho antes de Cristo, en distintas civilizaciones, aunque la primer formulación explícita de este principio fue introducida en 1665 por el matemático, físico, escritor, inventor y filósofo francés *Blaise Pascal*, 1623-1662. Lo vamos a aplicar reiteradas veces a lo largo de toda la materia, y lo van a seguir aplicando a lo largo de toda la matemática que hagan.

El principio funciona en dos pasos. El primer paso, conocido como *caso base* es probar que la afirmación en cuestión es Verdadera para el 1er número natural. El segundo paso, conocido como *paso inductivo*, es probar que la afirmación para un número natural cualquiera implica la afirmación para el número natural siguiente. El principio de inducción es el principio que infiere de estos dos pasos que la afirmación es Verdadera para todos los números naturales.

Se basa en el hecho que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es un *conjunto inductivo*.

Definición 2.3.1. (Conjunto inductivo.)

Sea $H \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se dice que H es un conjunto *inductivo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- $1 \in H$,
- $\forall\, x,\ x \in H \Rightarrow x + 1 \in H$.

<u>*Ejemplos:*</u>

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_{\geq -13}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $[1, +\infty)$ son conjuntos inductivos.
- $\mathbb{N} \cup \{1/2\}$, $\mathbb{Z} - \{0\}$, $[1, 2]$ no son conjuntos inductivos.

De hecho, $\mathbb{N}$ es el "más chico" de los conjuntos inductivos, en el sentido que si $H \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto inductivo, entonces $\mathbb{N} \subseteq H$. El principio de inducción se basa en este hecho: Si logramos probar que un conjunto $H \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, entonces $H = \mathbb{N}$.

Sea $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, una afirmación sobre los números naturales, y sea H el subconjunto de $\mathbb{N}$ definido como

$$H := \{n \in \mathbb{N} : p(n) \text{ es Verdadera}\}.$$

Si logramos probar que H es un conjunto inductivo, entonces $H = \mathbb{N}$. Es decir $p(n)$ es Verdadera, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Dicho de otra manera:

Teorema 2.3.2. (Principio de inducción.)

Sea $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, una afirmación sobre los números naturales. Si p satisface

- (Caso base) $p(1)$ *es Verdadera,*
- (Paso inductivo) $\forall\, h \in \mathbb{N}$, $p(h)$ *Verdadera* $\Rightarrow p(h+1)$ *Verdadera,*

entonces $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Aquí la hipótesis "$p(h)$ Verdadero" para un h dado se denomina la *hipótesis inductiva* (HI).

Retomemos el ejemplo de la suma de Gauss por el que empezamos, probando por inducción que vale la fórmula dada por Gauss (notemos que la desventaja es que tenemos que conjeturar a priori lo que vale la suma para poder probar la afirmación por inducción).

<u>*Ejemplos:*</u>

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

   Aquí la afirmación $p(n)$ para cada número natural n es:

   $$p(n): \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   Queremos probar que $p(n)$ es Verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ por inducción. Lo vamos a hacer con todo detalle.

- Caso base: ¿Es $p(1)$ Verdadera? ¿Es cierto que $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$? Sí, pues $\sum_{i=1}^{1} i = 1$ y $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ también. Luego $p(1)$ V.
- Paso inductivo: Dado $h \in \mathbb{N}$, ¿es cierto que si suponemos que $p(h)$ es Verdadera, podemos deducir que entonces $p(h+1)$ es Verdadera también? O sea, suponiendo la hipótesis inductiva HI "$p(h)$ Verdadera", es decir $\sum_{i=1}^{h} i = \frac{h(h+1)}{2}$, queremos probar que entonces $p(h+1)$ es Verdadera también, es decir, queremos probar que

$$\sum_{i=1}^{h+1} i = \frac{(h+1)\big((h+1)+1\big)}{2} = \frac{(h+1)(h+2)}{2}.$$

Pero $\sum_{i=1}^{h+1} i = \Big(\sum_{i=1}^{h} i\Big) + (h+1)$. Y por HI, $\sum_{i=1}^{h} i = \frac{h(h+1)}{2}$, luego

$$\sum_{i=1}^{h+1} i = \Big(\sum_{i=1}^{h} i\Big) + (h+1) \underset{\text{HI}}{=} \frac{h(h+1)}{2} + (h+1) = \frac{h(h+1)+2(h+1)}{2} = \frac{(h+1)(h+2)}{2},$$

que es lo que se quería probar.

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. $\frac{(2n)!}{n!^2} \le (n+1)!$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$p(n): \quad \frac{(2n)!}{n!^2} \le (n+1)!.$$

- Caso base: ¿$p(1)$ V? Sí, pues $\frac{(2\cdot 1)!}{1!^2} = 2 \le (1+1)!$.
- Paso inductivo: Dado $h \in \mathbb{N}$, ¿$p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V?
  - HI: $\frac{(2h)!}{h!^2} \le (h+1)!$.
  - Qpq (Quiero probar que) $\frac{\big(2(h+1)\big)!}{(h+1)!^2} \le \big((h+1)+1\big)!$, es decir $\frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} \le (h+2)!$.

  Pero

$$\frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} = \frac{(2h+2)(2h+1)(2h)!}{\big((h+1)h\big)!^2} = \frac{2(h+1)(2h+1)(2h)!}{(h+1)^2 h!^2}$$
$$= \frac{2(2h+1)}{h+1}\,\frac{(2h)!}{h!^2} \underset{HI}{\le} \frac{2(2h+1)}{h+1}\,(h+1)!$$

  ya que $\frac{2(2h+1)}{h+1} > 0$.

Por lo tanto para probar que $\dfrac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} \le (h{+}2)!$, alcanza con probar que $\dfrac{2(2h+1)}{h+1} \le h+2$ porque así se tendrá la cadena de desigualdades:

$$\frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} \underset{HI}{\le} \frac{2(2h+1)}{h+1}\,(h+1)! \le (h+2)(h+1)! = (h+2)!$$

Mostremos entonces que $\dfrac{2(2h+1)}{h+1} \le h+2$. Se tiene

$$\frac{2(2h+1)}{h+1} \le h{+}2 \underset{h+1>0}{\iff} 2(2h{+}1) \le (h{+}1)(h{+}2) \iff 4h{+}2 \le h^2{+}3h{+}2 \iff h \le h^2 \underset{h>0}{\iff} 1 \le h$$

(donde siempre verificamos que no cambia el sentido de la desigualdad pues se multiplica/divide por cantidades > 0). La última desigualdad es cierta pues $h \in \mathbb{N}$, por lo tanto hemos logrado probar que $\dfrac{2(2h+1)}{h+1} \le h+2$, como queríamos.
Concluimos que $p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V.

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadera, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \sqrt{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. (En particular esto prueba que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge...):

$$p(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \sqrt{n}.$$

- Caso base: ¿$p(1)$ V? Sí, pues $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 \ge \sqrt{1}$.
- Paso inductivo: Dado $h \in \mathbb{N}$, ¿$p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V?
  - HI: $\displaystyle\sum_{k=1}^{h} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \sqrt{h}$.
  - Qpq $\displaystyle\sum_{k=1}^{h+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \sqrt{h+1}$.

  Pero

$$\sum_{k=1}^{h+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{h} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{h+1}} \underset{HI}{\ge} \sqrt{h} + \frac{1}{\sqrt{h+1}}.$$

  Por lo tanto para probar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{h+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \sqrt{h+1}$, alcanza con probar que $\sqrt{h} + \dfrac{1}{\sqrt{h+1}} \ge \sqrt{h+1}$ porque así se tendrá la cadena de desigualdades:

$$\sum_{k=1}^{h+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \sqrt{h} + \frac{1}{\sqrt{h+1}} \ge \sqrt{h+1}.$$

Mostremos entonces que $\sqrt{h} + \dfrac{1}{\sqrt{h+1}} \geq \sqrt{h+1}$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{h} + \frac{1}{\sqrt{h+1}} \geq \sqrt{h+1} &\iff \frac{\sqrt{h}\cdot\sqrt{h+1}+1}{\sqrt{h+1}} \geq \sqrt{h+1} \\
&\iff \sqrt{h}\cdot\sqrt{h+1}+1 \geq (\sqrt{h+1})^2 = h+1 \\
&\iff \sqrt{h}\cdot\sqrt{h+1} \geq h \iff \sqrt{h(h+1)} \geq h \\
&\underset{h(h+1)\geq 0}{\iff} h(h+1) \geq h^2 \iff h^2+h \geq h^2 \iff h \geq 0
\end{aligned}$$

La última desigualdad es cierta pues $h \in \mathbb{N}$, por lo tanto hemos logrado probar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{h+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{h+1}$, como queríamos.
Concluimos que $p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V.

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadera, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2.3.1. Inducción "corrida".

Supongamos que queremos probar que para todo $n \geq 5$, se tiene $2^n > n^2$.

Este ejemplo plantea el problema de probar una afirmación que no es cierta para todos los números naturales, pero a partir de cierto número. No podemos aplicar directamente el principio de inducción ya que si bien se satisface el caso base $p(1)$ Verdadera (pues $2 = 2^1 > 1^2 = 1$), no se satisface $p(2)$ Verdadera, pues $2^2 = 4$ y por lo tanto no es cierto que para $n = 2$ se tiene $2^n > n^2$. Por lo tanto no vamos a poder deducir de $p(1)$ Verdadera que $p(2)$ es Verdadera! Notemos que tampoco es cierta la afirmación para $n = 3$ (pues $2^3 = 8 < 9 = 3^2$) ni para $n = 4$ (pues $2^4 = 16 = 4^2$).

También podríamos querer probar que una afirmación es cierta a partir de cierto número entero negativo n_0, por ejemplo $n_0 = -11$. ¿Será cierto que podemos usar el mismo principio de inducción, pero "corriéndolo"? es decir ¿verificando el caso base $n_0 = 5$ en el ejemplo (o $n_0 = -11$) y luego probar $p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V, $\forall\, h \geq n_0$?

La respuesta bastante intuitiva es que "sí", y se puede mostrar que es así mostrando que el conjunto $H = \{n \in \mathbb{N} : p(n-1+n_0) \text{ es Verdadera}\}$ es un conjunto inductivo, pues así $1 \in H \Leftrightarrow p(1-1+n_0) = p(n_0)$ es Verdadero.

De esta manera se prueba que es el análogo "corrido" del Principio de Inducción formulado en el Teorema 2.3.2:

Teorema 2.3.3. (Principio de inducción "corrido".)

Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$ y sea $p(n), n \geq n_0$, una afirmación sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si p satisface

- (Caso base) $p(n_0)$ *es Verdadera,*
- (Paso inductivo) $\forall\, h \geq n_0,$ $p(h)$ *Verdadera* $\Rightarrow p(h+1)$ *Verdadera,*

entonces $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos:

1. Probar que para todo $n \geq 5$ se tiene $2^n > n^2$.

   Vamos a probarlo por medio del principio de inducción corrido.

   $$p(n): \quad 2^n > n^2$$

   - Caso base: ¿$p(5)$ V? Sí, pues $31 = 2^5 > 5^2 = 25$.
   - Paso inductivo: Dado $h \geq 5$, ¿$p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V?
     - HI: $2^h > h^2$ (recordando $h \geq 5$).
     - Qpq $2^{h+1} > (h+1)^2$, es decir $2 \cdot 2^h > h^2 + 2h + 1$.

     Pero por HI, $2 \cdot 2^h > 2\,h^2$. Por lo tanto para probar que $2 \cdot 2^h > h^2 + 2h + 1$, alcanza con probar que $2\,h^2 \geq h^2 + 2h + 1$, pues en ese caso se tendría la cadena de desigualdades

     $$2 \cdot 2^h > 2\,h^2 \geq h^2 + 2h + 1,$$

     y al haber en la cadena una desigualdad estricta $>$, la desigualdad que vale entre el miembro más a la izquierda y el más a la derecha es $>$ también. Se tiene:

     $$2\,h^2 \geq h^2 + 2h + 1 \iff h^2 \geq 2h + 1 \iff h^2 - 2h - 1 \geq 0.$$

     Pero al ser $h \geq 5$, se tiene

     $$h^2 - 2h - 1 = h \cdot h - 2h - 1 \geq 5h - 2h - 1 = 3h - 1 \geq 3 \cdot 5 - 1 \geq 14 \geq 0.$$

     (Notemos que la desigualdad $h^2 - 2h - 1 \geq 0$ no se cumple para $h = 1$ ni para $h = 2$, sólo se cumple de hecho a partir de $h = 3$.)
     Concluimos que para $h \geq 5$, $p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V.

   Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadera, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. *(El distribuidor automático.)*

   Un distribuidor automático sólo tiene billetes de \$ 2 y \$ 5. Mostrar que puede dar cualquier suma n entera de \$, con $n \geq 4$.

   $$p(n): \quad \exists\, i, j \in \mathbb{N}_0 \ \text{ t.q. } \ n = i \cdot 2 + j \cdot 5.$$

   - Caso base: ¿$p(4)$ V? Sí, pues $4 = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5$.
   - Paso inductivo: Dado $n \geq 4$, ¿$p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V?
     - HI: $\exists\, i, j \in \mathbb{N}_0$ tales que $h = i \cdot 2 + j \cdot 5$ (recordando $h \geq 4$).
     - Qpq $\exists\, i', j' \in \mathbb{N}_0$ tales que $h + 1 = i' \cdot 2 + j' \cdot 5$.

Por HI, $\exists\, i, j \in \mathbb{N}_0$ tales que $h = i \cdot 2 + j \cdot 5$.

- Si se usó algún billete de 5 para escribir n, es decir si $j \geq 1$, reemplazar ese billete de 5 por 3 billetes de 2 (lo que da 6), o sea reemplazar j por $j' = j - 1$ (que satisface $j' \geq 0$ pues $j \geq 1$) y reemplazar i por $i' = i + 3$:

$$i' \cdot 2 + j' \cdot 5 = (i+3) \cdot 2 + (j-1) \cdot 5 = i \cdot 2 + j \cdot 5 + 6 - 5 = n + 1.$$

- Si no se usó ningún billete de 5 para escribir n, es decir si $j = 0$, se tiene $n = i \cdot 2$. Pero como $n \geq 4$, entonces $i \geq 2$ y podemos reemplazar dos billetes de 2 por un billete de 5, o sea reemplazar i por $i' = i - 2$ (que satisface $i' \geq 0$ pues $i \geq 2$) y reemplazar $j = 0$ por $j' = 1$:

$$i' \cdot 2 + j' \cdot 5 = (i-2) \cdot 2 + 5 = i \cdot 2 + 5 - 4 = n + 1.$$

Concluimos que en todos los casos logramos mostrar que existen $i', j' \in \mathbb{N}_0$ tales que $n + 1 = i' \cdot 2 + j' \cdot 5$. Así probamos el paso inductivo.

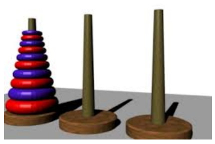
Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadera, $\forall\, n \geq 4$.

2.4. Sucesiones definidas por recurrencia.

Los ejemplos siguientes muestran sucesiones definidas por recurrencia, de la misma manera que fueron definidos por recurrencia el factorial, la sumatoria y la productoria.

Las torres de Hanoi.

El problema de las torres de Hanoi fue inventado por el matemático francés Edouard Lucas en 1883.

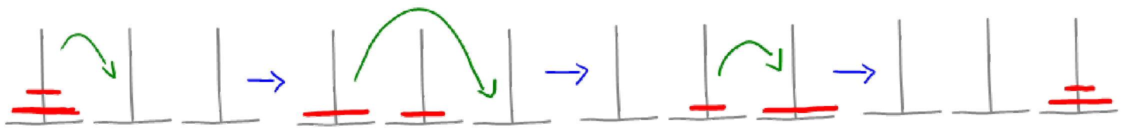


Tenemos 3 estacas, y un cierto número n de discos de distinto diámetro ensartados en la primer estaca, ordenados por tamaño, de mayor a menor estando el menor encima, como en el dibujo. El objetivo del juego es lograr mover toda la pila de discos a otra estaca, con las condiciones siguientes:

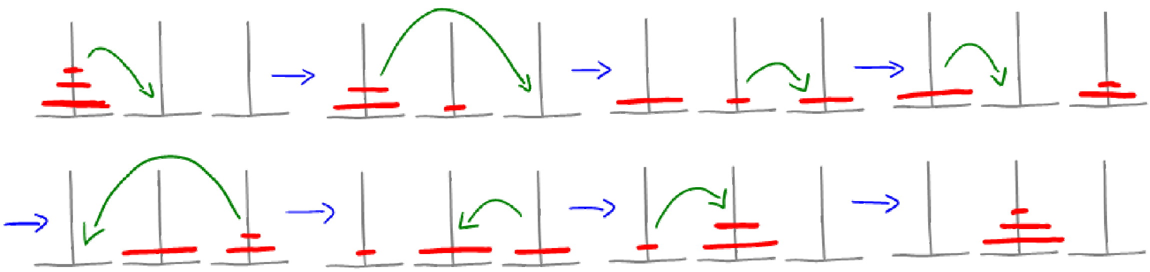
- no se puede mover más de un disco a la vez
- sólo se puede sacar el disco de la parte superior de cada pila de discos

- en todo momento los discos de cada estaca deben estar ordenados por tamaño, de mayor a menor con el menor encima.

¿Cuántos movimientos alcanzan para realizar esta operación? Por ejemplo para 2 discos podemos realizar los movimientos siguientes:



O sea alcanza con 3 movimientos. Y para 3 discos podemos hacer lo siguiente:



Y por lo tanto nos alcanza con 7 movimientos. También nos podemos dar cuenta a este nivel que saber cómo mover 3 discos ayuda a mover 4 discos, ya que para mover los 4 discos, podemos primero pasar los 3 discos de arriba a otra estaca, realizando 7 movimientos (ya que aquí al quedar el disco más grande abajo en la primer estaca, podemos usar tranquilamente esa estaca sin contradecir las reglas del juego), luego mover el disco más grande que quedó solo a la estaca libre (1 movimiento), y luego volver a mover la pila de los 3 discos arriba del más grande realizando nuevamente 7 movimientos. Así para mover 4 discos nos alcanzan $2 \cdot 7 + 1 = 15$ movimientos.

Este razonamiento se generaliza para $n+1$ discos: Llamemos a a_n una cantidad de movimientos suficientes para mover n discos. Por ejemplo $a_1 = 1$, $a_2 = 3, a_3 = 7$.

Lucas

Para mover los $n+1$ discos podemos empezar moviendo los n de arriba a otra estaca, con a_n movimientos, luego pasar el disco grande a la estaca libre, con 1 movimiento, y luego mover la pila de los n discos arriba del disco grande, con nuevamente a_n movimiento. Así obtenemos $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

Notemos que si queremos deducir de esta definición cuánto vale a_7 vamos a necesitar conocer cuánto vale a_6, luego a_5, etc. hasta necesitar conocer a_1.

Una sucesión definida de esta manera, como aquí:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

es una sucesión definida *por recurrencia*, ya que para calcular un término necesitamos conocer el anterior. Además de necesitar conocer el caso base $n = 1$ obviamente, sino no sabríamos por donde empezar.

Observación 2.4.1. Esta definición por recurrencia permite obtener el valor de a_n para cualquier $n \in \mathbb{N}$: si queremos ser formales, podemos observar que el conjunto

$$H = \{n \in \mathbb{N} : \ a_n \ \text{ está definida} \}$$

es un subconjunto inductivo de $\mathbb{N}$ (pues $1 \in H$ ya que $a_1 = 1$, y si $h \in H$, entonces $h+1 \in H$ pues $a_{h+1} = 2a_h + 1$), y por lo tanto coincide con $\mathbb{N}$. (Así definimos en forma recursiva el factorial $n!$ (en realidad desde $n = 0$), la sumatoria $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_n$ y la productoria $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_n$.)

Ahora nos interesa deshacernos de la recurrencia: habrá una fórmula que me diga quién es el término general a_n de la sucesión, sin tener que calcular el término anterior y el anterior y el anterior?

Veamos:

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15, a_5 = 31, a_6 = 63.$$

Pareciera ser que puede valer $a_n = 2^n - 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Conjeturemos luego que la sucesión definida por recurrencia como

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

satisface

$$a_n = 2^n - 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Lo podemos probar por inducción:

$$p(n) : \quad a_n = 2^n - 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

- Caso base: ¿$p(1)$ V? Sí, pues $2^1 - 1 = 1 = a_1$.
- Paso inductivo: Dado $h \in \mathbb{N}$, ¿$p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V?
  - HI: $a_h = 2^h - 1$
  - Qpq $a^{h+1} = 2^{h+1} - 1$.

  Pero por definición de la sucesión, sabemos que $a_{h+1} = 2a_h + 1$. Luego

  $$a_{h+1} \ = \ 2a_h + 1 \underset{HI}{=} 2(2^h - 1) + 1 \ = \ 2^{h+1} - 2 + 1 \ = \ 2^{h+1} - 1$$

  como se quería probar.

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

<u>*Pregunta 1:*</u> Acabamos de probar que con $2^n - 1$ movimientos se puede resolver el problema de las torres de Hanoi con n discos. ¿Será éste el mínimo número posible?

<u>*Pregunta 2:*</u> Con cuál de las dos formulaciones: $a_1 = 1, \ a_{n+1} = 2a_n + 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, o $a_n = 2^n - 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ se logra hacer menos cuentas si se quiere calcular por ejemplo a_{256}? La respuesta se encuentra al final de la Práctica 2.

Un ejemplo más.

Sea la sucesión definida por recurrencia como

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \big(\sqrt{a_n} - (n+1)\big)^2, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

O sea

$a_1 = 1, a_2 = (\sqrt{1}-2)^2 = 1,\ a_3 = (\sqrt{1}-3)^2 = 4,\ a_4 = (\sqrt{4}-4)^2 = 4,\ a_5 = (\sqrt{4}-5)^2 = 9,\ a_6 = (\sqrt{9}-6)^2 = 9.$

Pareciera que va dando los cuadrados, repetidos dos veces cada uno, o sea $a_{2n-1} = a_{2n} = n^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Escrito en términos de a_n, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 & \text{si } \ n \text{ es impar} \\ \left(\frac{n}{2}\right)^2 & \text{si } \ n \text{ es par.} \end{cases}$$

Probemoslo por inducción.

$$p(n): \quad a_n = \begin{cases} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 & \text{si } \ n \text{ es impar} \\ \left(\frac{n}{2}\right)^2 & \text{si } \ n \text{ es par} \end{cases}$$

- Caso base: ¿$p(1)$ V? Sí, pues como 1 es impar, $\left(\frac{1+1}{2}\right)^2 = 1 = a_1$.
- Paso inductivo: Dado $h \in \mathbb{N}$, ¿$p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V?
  - HI: $a_h = \left(\frac{h+1}{2}\right)^2$ si h es impar y $a_h = \left(\frac{h}{2}\right)^2$ si h es par.
  - Qpq $a_{h+1} = \left(\frac{h+2}{2}\right)^2$ si $h+1$ es impar y $a_{h+1} = \left(\frac{h+1}{2}\right)^2$ si $h+1$ es par.

  Pero por definición de la sucesión, sabemos que $a_{h+1} = \big(\sqrt{a_h} - (h+1)\big)^2$. Luego:

  - Si $h+1$ es impar, es que h es par, y por lo tanto por HI, $a_h = \left(\frac{h}{2}\right)^2$. Así,

$$\begin{aligned} a_{h+1} = \big(\sqrt{a_h} - (h+1)\big)^2 &\underset{HI}{=} \Big(\sqrt{\big(\frac{h}{2}\big)^2} - (h+1)\Big)^2 \\ = \Big(\frac{h}{2} - (h+1)\Big)^2 &= \Big(-\frac{(h+2)}{2}\Big)^2 = \Big(\frac{h+2}{2}\Big)^2. \end{aligned}$$

  - Si $h+1$ es par, es que h es impar, y por lo tanto por HI, $a_h = \left(\frac{h+1}{2}\right)^2$. Así,

$$\begin{aligned} a_{h+1} = \big(\sqrt{a_h} - (h+1)\big)^2 &\underset{HI}{=} \Big(\sqrt{\big(\frac{h+1}{2}\big)^2} - (h+1)\Big)^2 \\ = \Big(\frac{h+1}{2} - (h+1)\Big)^2 &= \Big(-\frac{(h+1)}{2}\Big)^2 = \Big(\frac{h+1}{2}\Big)^2. \end{aligned}$$

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2.5. Inducción completa.

2.5.1. Inducción completa – Un caso particular.

Empecemos considerando la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente de la manera siguiente:

$$a_1 = 5, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

¿Se puede decidir quién es a_2? Se ve que en este caso no, ya que la sucesión requiere saber lo que valen dos términos anteriores cada vez: para conocer a_2 necesitaríamos conocer a_1 y a_0, y no sabemos quién es a_0. Pero si definimos la sucesión a_n como

$$a_1 = 5, \ a_2 = 13, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

al tener los dos primeros términos de la sucesión dados, podemos recursivamente deducir el valor de todos los demás:

$$a_1 = 5, \ a_2 = 13, \ a_3 = 5 \cdot 13 - 6 \cdot 5 = 35, \ a_4 = 5 \cdot 35 - 6 \cdot 13 = 97 \ \ldots$$

Observación 2.5.1. Cuando una sucesión está definida por recurrencia usando los dos términos anteriores, y se dan los valores de los dos términos iniciales a_1 y a_2, entonces a_n está definido para cualquier $n \in \mathbb{N}$: si queremos ser formales, podemos observar que el conjunto

$$H = \{n \in \mathbb{N} : \ a_n \ \text{ está definida}\}$$

coincide con $\mathbb{N}$. Pues supongamos que no: entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a_{n_0} no está definido, y podemos tomar el más chico de todos con esa propiedad de no estar definido. Se sabe que $n_0 \geq 3$ pues a_1 y a_2 están definidos. Pero si $n_0 \geq 3$, se tiene que a_{n_0} está definido por medio de los dos términos anteriores (que están definidos pues a_{n_0} era el más chico de todos los que no estaban definidos. Por lo tanto a_{n_0} está definido. Esto contradice el hecho que a_{n_0} no estaba definido, o sea que $H \neq \mathbb{N}$.

En este razonamiento no probamos directamente que H era un conjunto inductivo, sino usamos lo que se llama *el principio de buena ordenación* (que vale para $\mathbb{N}$) y que es equivalente al Principio de Inducción, como comentaremos en el Apéndice.

Volviendo al Ejemplo (2.1), alguien muy avezado, o un pajarito, o un "oráculo" me puede decir "Oiga, esto da $2^n + 3^n$"!

Supongamos que queremos probar entonces, por inducción, que el término general de la sucesión definida por $a_1 = 5, \ a_2 = 13, \ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, es $a_n = 2^n + 3^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

El caso base $a_1 = 2^1 + 3^1$ es correcto, pero cuando queremos deducir de la HI $a_h = 2^h + 3^h$ que entonces $a_{h+1} = 2^{h+1} + 3^{h+1}$, nos vemos en problemas porque necesitaríamos una HI para a_h y una para a_{h-1}. Por suerte hay una variante del principio de inducción que soluciona ese problema:

Teorema 2.5.2. (Principio de inducción - II)

Sea $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, una afirmación sobre los números naturales. Si p satisface

- (Casos base) *$p(1)$ y $p(2)$ son Verdaderas,*
- (Paso inductivo) *$\forall\, h \in \mathbb{N},\ \ p(h)$ y $p(h+1)$ Verdaderas $\Rightarrow p(h+2)$ Verdadera,*

entonces $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

<u>*Ejemplo:*</u> Probar que el término general de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = 5,\ a_2 = 13 \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

es $a_n = 2^n + 3^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Por inducción, aplicando el Teorema 2.5.2.

$$p(n): \quad a_n = 2^n + 3^n.$$

- Casos base: ¿$p(1)$ y $p(2)$ V? Sí, pues $2^1 + 3^1 = 5 = a_1$ y $2^2 + 3^2 = 13 = a_2$.
- Paso inductivo: Dado $h \in \mathbb{N}$, ¿$p(h)$ V y $p(h+1)$ V $\Rightarrow$ $p(h+2)$ V?
  - HI: $a_h = 2^h + 3^h$ y $a_{h+1} = 2^{h+1} + 3^{h+1}$.
  - Qpq $a_{h+2} = 2^{h+2} + 3^{h+2}$.

  Pero por definición de la sucesión, sabemos que para $h \geq 1$, $a_{h+2} = 5a_{h+1} - 6a_h$. Luego

  $$\begin{aligned} a_{h+2} = &\ 5a_h + 1 - 6a_h \underset{HI}{=} 5\,(2^{h+1} + 3^{h+1}) - 6\,(2^h + 3^h) \\ = &\ 10 \cdot 2^h + 15 \cdot 3^h - 6 \cdot 2^h - 6 \cdot 3^h \ = \ 4 \cdot 2^h + 9 \cdot 3^h \ = \ 2^{h+2} + 3^{h+2} \end{aligned}$$

  como se quería probar.

Es decir hemos probado tanto los casos base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.5.3. Notar que por como está definida la sucesión (por medio de los dos términos anteriores) es indispensable verificar que la afirmación $p(n)$ es Verdadera para los dos casos base $p(1)$ y $p(2)$, pues si no la verificáramos para 2 no podríamos deducir que $p(3)$ es Verdadera. Y podríamos –al hacer ese error– deducir algo completamente falso: que la sucesión definida por $a_1 = 5,\ a_2 = 0,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, también tiene como término general $a_n = 2^n + 3^n$.

Este principio de inducción admite la misma versión "corrida" que el que vimos en la sección anterior:

Teorema 2.5.4. (Principio de inducción - II "corrido")
Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$ y sea $p(n), n \geq n_0$, una afirmación sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si p satisface

- (Casos base) *$p(n_0)$ y $p(n_0+1)$ son Verdaderas,*
- (Paso inductivo) *$\forall\, h \geq n_0,\ \ p(h)$ y $p(h+1)$ Verdaderas $\Rightarrow p(h+2)$ Verdadera,*

entonces $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \geq n_0$.

2.5.2. La sucesión de Fibonacci.

La famosa sucesión de Fibonacci debe su nombre a *Leonardo Pisano Bigollo*, más conocido como *Fibonacci*, $\sim$ 1170-1240, famoso también haber difundido en Europa el sistema de numeración indo-arábigo que utilizamos, que emplea una notación posicional y el cero para marcar una posición nula.

Fibonacci

Fibonacci publicó en el año 1202 un libro, Liber Abaci, donde entre otras cosas propuso el siguiente problema: si colocamos una pareja de conejos en un área cerrada, ¿cuántos conejos habrá luego de n meses si cada pareja de conejos bebés produce una nueva pareja de conejos cada mes, los conejos nunca mueren y una pareja a los dos meses de nacida puede comenzar a tener hijos? En el mes 0, no hay conejos (porque todavía no los colocamos). En el mes 1, tenemos una pareja de conejos bebés. En el mes 2, tenemos la misma única pareja de conejos, pero ya son adultos. En el mes 3, tenemos la pareja original más una pareja bebé (hijos de la pareja original), o sea tenemos dos parejas. En el mes 4, la pareja original tiene otra pareja de bebés, y además la pareja bebé del mes 3 se convierte en adulta (tenemos 3 parejas). En el mes 5, las dos parejas adultas que hay tienen parejas bebés, y tenemos 5 parejas. Si calculamos algunos números más, vemos que los siguientes meses tenemos: 8, 13, 21, 34 ... Para encontrar una fórmula para esta sucesión, llamenos A_n al número de parejas adultas en el mes n y B_n al número de parejas bebés en el mes n. Llamamos también F_n al total de parejas en el mes n, o sea $F_n = A_n + B_n$.

Obtenemos la tabla siguiente:

Mes	A_n	B_n	F_n
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	A_n	B_n	$A_n + B_n$
$n+1$	$A_n + B_n$	A_n	$2A_n + B_n$
$n+2$	$2A_n + B_n$	$A_n + B_n$	$3A_n + 2B_n$

Notemos que el número total de parejas de conejos en el mes $n+2$ es el número que había en el mes $n+1$ más el número de parejas adultas del mes $n+1$, que coincide con el número de parejas del mes n. Luego la sucesión F_n satisface la recurrencia $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo $n \geq 0$. Además, los primeros dos valores de la sucesión son $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Estas condiciones definen una única sucesión, que se llama la sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$

cuyos primeros términos son

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233$$

Esta sucesión está fuertemente relacionada con el *Número de Oro*, o *Número de la proporción divina*, o *de la proporción áurea,* que aparece mucho en la naturaleza, en el arte, en la arquitectura, en medicina. Este número surge de preguntarse, si tenemos un segmento dividido en dos partes de longitudes Φ y 1, con $\Phi \geq 1$, ¿cómo tiene que ser Φ para que la proporción entre esas dos partes Φ y 1 sea la misma que la proporción entre todo el segmento $\Phi + 1$ y Φ. Se tiene

$$\frac{\Phi}{1} = \frac{\Phi + 1}{\Phi}, \quad \text{i.e.} \quad \Phi^2 = \Phi + 1, \quad \text{i.e.} \quad \Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Las dos raíces de la ecuación $X^2 - X - 1 = 0$ son

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sim 1,61803 \ \geq 1 \quad \text{y} \quad \overline{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \ < 0$$

(aquí $\overline{\Phi}$ es solo una notación, no significa que es el conjugado en el sentido de número complejo). Notemos que vale que $\Phi^2 = \Phi + 1$ y $\overline{\Phi}^2 = \overline{\Phi} + 1$, pues ambas cantidades satisfacen la ecuación $X^2 - X - 1 = 0$. Además se satisfacen las relaciones

$$\Phi^0 - \overline{\Phi}^0 = 1 - 1 = 0 \quad \text{y} \quad \Phi^1 - \overline{\Phi}^1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}. \tag{2.2}$$

De distintas maneras se puede probar el resultado siguiente, que describe el término general de la sucesión de Fibonacci. Veremos algunas a continuación. Pero aprovechemos ahora para practicar un poco más el principio de inducción con esta afirmación.

Proposición 2.5.5. (Término general de la Sucesión de Fibonacci.)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \overline{\Phi}^n), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración. Lo probamos por el principio de inducción corrido a $n \geq 0$ presentado en el Teorema 2.5.4.

$$p(n): \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \overline{\Phi}^n\right).$$

- Casos base: ¿$p(0)$ y $p(1)$ V? Sí, pues por las relaciones (2.2),

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0 = 0 = F_0 \ \text{ y } \ \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^1 - \overline{\Phi}^1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1 = F_1.$$

- Paso inductivo: Dado $h \in \mathbb{N}$, ¿$p(h)$ V y $p(h+1)$ V $\Rightarrow$ $p(h+2)$ V?
  - HI: $F_h = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^h - \overline{\Phi}^h\right)$ y $F_{h+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{h+1} - \overline{\Phi}^{h+1}\right)$.
  - Qpq $F_{h+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{h+2} - \overline{\Phi}^{h+2}\right)$.

Pero por definición de la sucesión, sabemos que para $h \geq 0$, $F_{h+2} = F_{h+1} + F_h$. Luego

$$\begin{aligned} F_{h+2} = \; & F_{h+1} + F_h \underset{HI}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^h - \overline{\Phi}^h\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{h+1} - \overline{\Phi}^{h+1}\right) \\ = \; & \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^h - \overline{\Phi}^h + \Phi^{h+1} - \overline{\Phi}^{h+1}\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^h(1+\Phi) - \overline{\Phi}^h(1+\overline{\Phi})\Big) \\ = \; & \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^h \cdot \Phi^2 - \overline{\Phi}^h \cdot \overline{\Phi}^2\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^{h+2} - \overline{\Phi}^{h+2}\Big) \end{aligned}$$

como se quería probar.

Es decir hemos probado tanto los casos base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Cassini

Una propiedad (a priori sorprendente) de la sucesión de Fibonacci, que permite de hecho mostrar por qué el Número de Oro Φ aparece naturalmente en este contexto, es la *Identidad de Cassini*, que fue descubierta en 1680 por el astrónomo francés de origen italiano *Gian Domenico Cassini*, 1625-1712.

Proposición 2.5.6. (Identidad de Cassini.)

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Por ejemplo,

$$F_2F_0 - F_1^2 = 1 \cdot 0 - 1 = (-1)^1, \; F_3F_1 - F_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 = (-1)^2.$$

Demostración. Lo probamos por inducción:

$$p(n): \quad F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

- Caso base: ¿$p(1)$ V? Sí, lo verificamos arriba.
- Paso inductivo: Dado $h \in \mathbb{N}$, ¿$p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V?
  - HI: $F_{h+1} \cdot F_{h-1} - F_h^2 = (-1)^h$.
  - Qpq $F_{h+2} \cdot F_h - F_{h+1}^2 = (-1)^{h+1}$.

  Pero por definición de la sucesión, sabemos que para $h \geq 1$, $F_{h+2} = F_{h+1} + F_h$ y $F_{h+1} = F_h + F_{h-1}$ (pues en este último caso, $h \geq 1$ implica $h - 1 \geq 0$, luego F_{h-1} está definida). Luego

$$\begin{aligned} F_{h+2} \cdot F_h - F_{h+1}^2 = \; & (F_{h+1} + F_h) \cdot F_h - (F_h + F_{h-1}) \cdot F_{h+1} \\ = \; & F_{h+1} \cdot F_h + F_h^2 - F_h \cdot F_{h+1} - F_{h-1} \cdot F_{h+1} \\ = \; & F_h^2 - F_{h-1} \cdot F_{h+1} = -\Big(F_{h-1} \cdot F_{h+1} - F_h^2\Big) \underset{HI}{=} -(-1)^h = (-1)^{h+1} \end{aligned}$$

  como se quería probar.

Es decir hemos probado tanto los casos base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. $\square$

Esto implica que $\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}$. Así,

$$\left|\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}}\right| = \frac{1}{F_{n-1}F_n}.$$

Esto implica que para $m > n$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F_{m+1}}{F_m} - \frac{F_n}{F_{n-1}}\right| &\le \sum_{i=n}^{m}\left|\frac{F_{i+1}}{F_i} - \frac{F_i}{F_{i-1}}\right| \le \sum_{i=n}^{m}\frac{1}{F_{i-1}F_i}\\ &\le \sum_{i=n}^{m}\frac{1}{(i-1)i} = \sum_{i=n}^{m}\Big(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\Big) = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{m} = \frac{m-n+1}{(n-1)m} \underset{n\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

ya que es fácil ver que $F_i \ge i$, y esto implica $\frac{1}{F_{i-1}F_i} \le \frac{1}{(i-1)i}$). Por lo tanto, para los que saben un poco de Análisis, la sucesión $(\frac{F_{n+1}}{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y luego converge.

Sea entonces $F := \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$. Se observa que $F \ge 1$ dado que $F_{n+1} \ge F_n$. Entonces

$$F = \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\big(1+\frac{F_{n-1}}{F_n}\big) = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{F}.$$

Por lo tanto el límite F satisface la ecuación $F = 1 + \frac{1}{F}$, o equivalentemente la ecuación $F^2 = F + 1$. Se concluye que $F = \Phi$, ya que es la raíz ≥ 1 del polinomio $X^2 - X - 1$.

¿No es esto fantástico? ¡La proporción entre dos números de Fibonacci consecutivos tiene a la proporción divina $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1,61803$! Por ejemplo $\frac{F_{12}}{F_{11}} = \frac{144}{89} \sim 1,61798$ y $\frac{F_{13}}{F_{12}} = \frac{233}{144} \sim 1,61806$.

2.5.3. Sucesiones de Lucas.

Veamos ahora un método muy clásico que permite determinar el término general de todas las sucesiones de Lucas, que son sucesiones "de tipo Fibonacci" definidas recursivamente mediante los dos términos inmediato anteriores.

Una *sucesión de Lucas* es una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida recursivamente por

$$a_0 = a,\ a_1 = b,\quad a_{n+2} = c\,a_{n+1} + d\,a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son números dados.

En lo que sigue desarrollamos un método que permite determinar el término general a_n de la sucesión de Lucas definida arriba.

Consideremos la ecuación $X^2 - cX - d = 0$ asociada a la sucesión de Lucas (que se obtiene de la expresión $a_2 - c\,a_1 - d\,a_0 = 0$ y luego reemplazando a_2 por X^2, a_1 por X y a_0 por 1).

Observemos que en el caso de la sucesión de Fibonacci, la ecuación asociada es $X^2 - X - 1 = 0$, justamente la ecuación que tiene como raíces a Φ y $\overline{\Phi}$.

Supongamos que estamos en el caso en que $X^2 - cX - d$ tiene dos raíces distintas r y $\overline{r}$. Observemos que estas dos raíces r y $\overline{r}$ satisfacen las relaciones

$$r^2 = c\,r + d \quad \text{y} \quad \overline{r}^2 = c\,\overline{r} + d. \tag{2.3}$$

<u>*Afirmación 1:*</u> Las sucesiones $(r^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\overline{r}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, y más aún cualquier combinación lineal de ellas

$$(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\alpha\, r^n + \beta\, \overline{r}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

satisfacen la misma recurrencia

$$\gamma_{n+2} = c\,\gamma_{n+1} + d\,\gamma_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

que la sucesión de Lucas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ original, de la cuál queremos determinar el término general.

Esto es cierto pues

$$\begin{aligned}\gamma_{n+2} \underset{def}{=} \ & \alpha\, r^{n+2} + \beta\, \overline{r}^{n+2} \ = \ \alpha\, r^2\, r^n + \beta\, \overline{r}^2\, \overline{r}^n \\ = \ & \alpha(cr+d)r^n + \beta(c\overline{r}+d)\overline{r}^n \ = \ c(\alpha r^{n+1} + \beta \overline{r}^{n+1}) + d\,(\alpha r^n + \beta \overline{r}^n) \ = \ c\gamma_{n+1} + d\gamma_n.\end{aligned}$$

(Aquí se aplicaron las relaciones (2.3).)

<u>*Afirmación 2:*</u> Existe una única sucesión $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\alpha\, r^n + \beta\, \overline{r}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ que satisface las condiciones iniciales $\gamma_0 = a$, $\gamma_1 = b$.

Esto es cierto pues para ello hay que resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} \alpha & + & \beta & = & a \\ \alpha\, r & + & \beta\, \overline{r} & = & b \end{cases}$$

que tiene solución y es única pues $r \neq \overline{r}$ por hipótesis: se obtiene

$$\alpha = \frac{b - a\,\overline{r}}{r - \overline{r}} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{a\,r - b}{r - \overline{r}}.$$

Se concluye que esta sucesión $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\alpha\, r^n + \beta\, \overline{r}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ coincide con la sucesión de Lucas original $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, ya que satisface las mismas condiciones iniciales y la misma recurrencia. Por lo tanto el término general de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es

$$a_n = \alpha\, r^n + \beta\, \overline{r}^n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

En el caso de la sucesión de Fibonacci, se tiene $r = \Phi$, $\overline{r} = \overline{\Phi}$, y al resolver el sistema

$$\begin{cases} \alpha & + & \beta & = & 0 \\ \alpha\, \Phi & + & \beta\, \overline{\Phi} & = & 1 \end{cases},$$

se obtiene

$$\alpha = \frac{1}{\Phi - \overline{\Phi}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad y \quad \beta = \frac{-1}{\Phi - \overline{\Phi}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

o sea

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\Phi^n - \Phi^n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$

que coincide obviamente con el resultado que probamos en la Proposición 2.5.5.

<u>Pregunta:</u> ¿Qué podemos hacer en el caso en que la ecuación asociada $X^2 - cX - d = 0$ tiene una única raíz r, o sea $X^2 - cX - d = (X - r)^2$? En este caso se puede probar, usando que $2r = c$ (¿por qué?), que el término general a_n de la sucesión, cuando $r \neq 0$, es

$$a_n = a\, r^n + \big(\frac{b}{r} - a\big)\, n\, r^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Cuando $r = 0$, la sucesión está dada simplemente por $a_0 = a,\ a_1 = b,\ a_{n+2} = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

2.5.4. Inducción completa – Formulación general.

El principio de inducción admite una formulación equivalente a las de los Teoremas 2.3.2 y 2.5.2 que es la que resulta útil cuando al querer probar el paso inductivo, no sabemos para cuál $k \leq h$, o para cuáles, vamos a tener que suponer que la hipótesis inductiva se cumple, o cuando necesitamos que la hipótesis inductiva se cumpla para todo $k \leq h$.

Consideremos el ejemplo siguiente: sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

O sea

$$a_1 = 1, a_2 = 1 + a_1 = 2,\ a_3 = 1 + a_1 + a_2 = 4,\ a_4 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 = 8.$$

Pareciera que esta sucesión admite como término general $a_n = 2^{n-1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Pero si queremos probar esta afirmación por inducción, resulta que no nos alcanza suponer la hipótesis inductiva $a_h = 2^{h-1}$ para lograr probar que $a_{h+1} = 2^h$.

Teorema 2.5.7. (Principio de inducción completa.)

Sea $p(n),\ n \in \mathbb{N}$, una afirmación sobre los números naturales. Si p satisface

- (Caso base) $p(1)$ *es Verdadera,*
- (Paso inductivo) $\forall\, h \in \mathbb{N},\ p(1), \dots, p(h)$ *Verdaderas* $\Rightarrow p(h+1)$ *Verdadera,*

entonces $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(El paso inductivo en este caso también suele escribirse en la forma: $\forall\, h \in \mathbb{N}$, $p(k)$ Verdadera para $1 \leq k \leq h \Rightarrow p(h+1)$ Verdadera.)

<u>*Ejemplo:*</u> Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que el término general de la sucesión es $a_n = 2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Aplicaremos aquí (por necesidad) el principio de inducción completa enunciado en el Teorema 2.5.7.

$$p(n): \quad a_n = 2^{n-1}.$$

- Caso base: ¿$p(1)$ V? Sí, pues $2^0 = 1 = a_1$.
- Paso inductivo: Dado $h \in \mathbb{N}$, ¿$p(1), \ldots, p(h)$ Verdaderas $\Rightarrow$ $p(h+1)$ Verdadera?
  - HI: $a_1 = 2^{h-1}, \ldots, a_h = 2^{h-1}$, o sea $a_k = 2^{k-1}$ para $1 \leq k \leq h$.
  - Qpq $a_{h+1} = 2^h$.

  Pero por definición de la sucesión, para $h \geq 1$ se tiene

  $$a_{h+1} \underset{def}{=} 1 + \sum_{k=1}^{h} a_k \underset{HI}{=} 1 + \sum_{k=1}^{h} 2^{k-1} = 1 + \sum_{i=0}^{h-1} 2^i 1 + (2^h - 1) = 2^h$$

  como se quería probar.

Es decir hemos probado tanto los casos base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Demos un último ejemplo en este capítulo del curso donde se usa el principio de inducción completa, corrido esta vez.

<u>*Ejemplo:*</u> Probar que si se tienen estampillas de 4 y 5 Pesos, se pueden mandar cartas de cualquier precio n entero, con $n \geq 12$.

Demostración.

- Caso base: ¿$p(12)$ V? Sí, pues $12 = 3 \cdot 4$: se necesitan 3 estampillas de 4 Pesos.
- Paso inductivo: Dado $h \geq 12$, ¿$p(k)$ V para $12 \leq k \leq h \Rightarrow$ $p(h+1)$ V?

  Inmediatamente se ve que para obtener $h+1$ con estampillas de 4 y 5 Pesos, conviene obtener $h-3$ con estampillas de 4 y 5 Pesos, y luego agregarle una estampilla de 4 Pesos, ya que $h+1 = (h-3)+4$. O sea necesitamos aplicar la hipótesis inductiva para $h-3$, y de ella podremos deducir que $p(h+1)$ es Verdadero.

La hipótesis inductiva permite suponer que $p(k)$ es V para $12 \leq k \leq h$. Entonces debemos verificar que $h-3$ está en las condiciones de la HI.

Está claro que $h-3 \leq h$. Pero $h-3 \geq 12 \Leftrightarrow h+1 \geq 16$. O sea la HI nos permite probar que $p(h+1)$ es V a partir de $h+1=16$. Por lo tanto tenemos que verificar los casos $h=13$, $h=14$ y $h=15$ aparte (porque para ellos la HI requerida sería $p(10)$ V, $p(11)$ y $p(12)$ V, que no se cumple.

- ¿$p(13)$ V? Sí, pues $13 = 2\cdot 4 + 1\cdot 5$: se necesitan 2 estampillas de 4 Pesos y una de 5.
- ¿$p(14)$ V? Sí, pues $14 = 1\cdot 4 + 2\cdot 5$: se necesitan 1 estampilla de 4 Pesos y 2 de 5.
- ¿$p(15)$ V? Sí, pues $15 = 3\cdot 5$: se necesitan 3 estampillas de 5 Pesos.

Así terminamos de probar el paso inductivo.

Es decir hemos probado tanto los casos base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

□

Durante este curso veremos varios ejemplos donde usaremos esta versión del principio de inducción, o su variante corrida, por ejemplo para probar el Algoritmo de División entera en $\mathbb{Z}$, o para probar el Teorema de Gauss que dice que todo número natural $n \neq 1$ es divisible por algún número primo.

2.6. El número combinatorio.

En el primer capítulo, contamos distintas cosas relacionadas con conjuntos y funciones, pero no contamos aún cuántos subconjuntos con un número dado k de elementos tiene un conjunto de n elementos, o lo que es lo mismo, cuántas formas tengo de elegir k elementos en un conjunto de n elementos (sin que importe el orden). Concentrémonos ahora en ese problema.

Notación 2.6.1. (El símbolo $\binom{n}{k}$.)

Sea $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ un conjunto con n elementos. Para $0 \leq k \leq n$, se nota con el símbolo $\binom{n}{k}$ la cantidad de subconjuntos con k elementos que tiene A_n (o lo que es lo mismo, la cantidad de formas que tenemos de elegir k elementos en un conjunto A_n con n elementos).

Ejemplos:

- Sea $A_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ un conjunto con 4 elementos. Entonces
  - $\binom{4}{0} = 1$ pues el único subconjunto con 0 elementos de A_4 es el subconjunto vacío $\emptyset$.
  - $\binom{4}{1} = 4$ pues los subconjuntos con 1 elemento de A_4 son $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}$.
  - $\binom{4}{2} = 6$ pues los subconjuntos con 2 elementos de A_4 son

$$\{a_1,a_2\}, \{a_1,a_3\}, \{a_1,a_4\}, \{a_2,a_3\}, \{a_2,a_4\}, \{a_3,a_4\}.$$

- $\binom{4}{3} = 4$ pues los subconjuntos con 3 elementos de A_4 son

$$\{a_{1,2}, a_3\}, \{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_4\}.$$

- $\binom{4}{4} = 1$ pues el único subconjunto con 4 elementos de A_4 es el conjunto A_4.

- Para disipar dudas $\binom{0}{0} = 1$ porque el conjunto vacío $\emptyset$ tiene un único subconjunto, el $\emptyset$, con 0 elementos.

Mucho de lo observado en el ejemplo anterior vale en general:

Observación 2.6.2.

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ pues el único subconjunto de A_n con 0 elementos es el conjunto $\emptyset$, y el único subconjunto de A_n con n elementos es A_n mismo.

- $\binom{n}{1} = n$ pues los subconjuntos de A_n con 1 elemento son los subconjuntos

$$\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_{n-1}\}, \{a_n\}.$$

- Podemos darnos cuenta que $\binom{n}{n-1} = n$ también ya que dar un subconjunto de A_n con $n-1$ elementos es lo mismo que elegir cuál elemento a_i quedó afuera del subconjunto: por ejemplo el subconjunto $\{a_1, \dots, a_{n_1}\}$ es el que corresponde a haber dejado a_n afuera.

- Con el mismo razonamiento, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\forall\, k, 0 \le k \le n$, ya que a cada subconjunto B_k de A_n con k elementos, podemos asignarle el subconjunto complemento B_k' que tiene $n-k$ elementos, y esta asignación es una función biyectiva... O lo que es lo mismo, cada vez que elegimos k elementos en A_n estamos dejando de elegir los $n-k$ elementos complementarios.

- Más aún, dado que $\binom{n}{k}$, $0 \le k \le n$, cuenta la cantidad de subconjuntos con k elementos en el conjunto A_n con n elementos, y que sabemos que la cantidad total de subconjuntos que hay en A_n es 2^n, se tiene:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

2.6.1. El triángulo de Pascal: una fórmula recursiva para $\dbinom{n}{k}$.

Queremos encontrar una forma de calcular $\binom{n}{k}$ sin listar todos los subconjuntos con k elementos de A_n, con un razonamiento del tipo del que aplicamos para resolver el problema de las torres de Hanoi.

Sea $A_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ un conjunto con 5 elementos. Supongamos que queremos calcular $\binom{5}{3}$ sin listar todos los subconjuntos con 3 elementos de A_5. Podemos razonar de la manera siguiente:

Sea B_3 un subconjunto con 3 elementos de A_5. Entonces

- O bien $a_5 \in B_3$, con lo cual para determinar B_3 hay que elegir los 2 elementos que faltan en el conjunto $A_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Y ya sabemos que hay $\binom{4}{2} = 6$ formas de elegir 2 elementos en A_4.
- O bien $a_5 \notin B_3$, con lo cual para determinar B_3 hay que elegir los 3 elementos en el conjunto $A_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Y ya sabemos que hay $\binom{4}{3} = 4$ formas de elegir 3 elementos en A_4.

Como estos dos casos son disjuntos (o bien $a_5 \in B_3$ o bien $a_5 \notin B_3$), la cantidad total de subconjuntos B_3 con 3 elementos de A_5 es igual a la suma $6 + 4 = 10$, es decir

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}.$$

Y este razonamiento se generaliza sin dificultad a un conjunto $A_{n+1} = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ con $n+1$ elementos. Ya sabemos que $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$. Queremos ahora calcular $\binom{n+1}{k}$ para un k cualquiera, $1 \le k \le n$.

Sea B_k un subconjunto con k elementos de A_{n+1}. Entonces

- O bien $a_{n+1} \in B_k$, con lo cual para determinar B_k hay que elegir los $k-1$ elementos que faltan en el conjunto $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$. Y ya sabemos que hay $\binom{n}{k-1}$ formas de elegir $k-1$ elementos en A_n. (Aquí interviene la condición $k \ge 1$ pues tiene que ser $k-1 \ge 0$ para que esto tenga sentido.)
- O bien $a_{n+1} \notin B_k$, con lo cual para determinar B_k hay que elegir los k elementos en el conjunto $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$. Y ya sabemos que hay $\binom{n}{k}$ formas de elegir k elementos en A_n. (Aquí interviene la condición $k \le n$ para que esto tenga sentido.)

Como estos dos casos son disjuntos (o bien $a_{n+1} \in B_k$ o bien $a_{n+1} \notin B_k$), la cantidad total de subconjuntos B_k con k elementos de A_{n+1} es igual a la suma $\binom{n+1}{n-1} + \binom{n+1}{k}$, es decir se satisface

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad \text{para } \ 1 \le k \le n.$$

Así obtuvimos el resultado siguiente:

Proposición 2.6.3. (Una fórmula recursiva para el número combinatorio.)

Se tiene

$$\binom{0}{0} = 1 \quad y \quad \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1, \ \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad \textit{para } \ 1 \le k \le n, \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Esto da el siguiente triángulo, conocido como el *triángulo de Pascal*, que empieza con:

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0}\\
\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}\\
\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}\\
\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}\\
\binom{4}{0}\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad\binom{4}{4}\\
\binom{5}{0}\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad\binom{5}{5}\\
\binom{6}{0}\quad\binom{6}{1}\quad\binom{6}{2}\quad\binom{6}{3}\quad\binom{6}{4}\quad\binom{6}{5}\quad\binom{6}{6}\\
\binom{7}{0}\quad\binom{7}{1}\quad\binom{7}{2}\quad\binom{7}{3}\quad\binom{7}{4}\quad\binom{7}{5}\quad\binom{7}{6}\quad\binom{7}{7}
\end{array}$$

Y como ya sabemos que los dos bordes de ese triángulo siempre valen 1, y que cada término de una fila, o sea $\binom{n+1}{k}$, se obtiene como la suma de los 2 términos de la fila anterior que están "encima", o sea $\binom{n}{k-1}$ y $\binom{n}{k}$, esto permite ir deduciendo fila a fila los valores:

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad\binom{2}{1}\quad 1\\
1\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad 1\\
1\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad 1\\
1\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad 1\\
1\quad\binom{6}{1}\quad\binom{6}{2}\quad\binom{6}{3}\quad\binom{6}{4}\quad\binom{6}{5}\quad 1\\
1\quad\binom{7}{1}\quad\binom{7}{2}\quad\binom{7}{3}\quad\binom{7}{4}\quad\binom{7}{5}\quad\binom{7}{6}\quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad 1\\
1\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad 1\\
1\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad 1\\
1\quad\binom{6}{1}\quad\binom{6}{2}\quad\binom{6}{3}\quad\binom{6}{4}\quad\binom{6}{5}\quad 1\\
1\quad\binom{7}{1}\quad\binom{7}{2}\quad\binom{7}{3}\quad\binom{7}{4}\quad\binom{7}{5}\quad\binom{7}{6}\quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad 1\\
1\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad 1\\
1\quad\binom{6}{1}\quad\binom{6}{2}\quad\binom{6}{3}\quad\binom{6}{4}\quad\binom{6}{5}\quad 1\\
1\quad\binom{7}{1}\quad\binom{7}{2}\quad\binom{7}{3}\quad\binom{7}{4}\quad\binom{7}{5}\quad\binom{7}{6}\quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad 1\\
1\quad\binom{6}{1}\quad\binom{6}{2}\quad\binom{6}{3}\quad\binom{6}{4}\quad\binom{6}{5}\quad 1\\
1\quad\binom{7}{1}\quad\binom{7}{2}\quad\binom{7}{3}\quad\binom{7}{4}\quad\binom{7}{5}\quad\binom{7}{6}\quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad\binom{6}{1}\quad\binom{6}{2}\quad\binom{6}{3}\quad\binom{6}{4}\quad\binom{6}{5}\quad 1\\
1\quad\binom{7}{1}\quad\binom{7}{2}\quad\binom{7}{3}\quad\binom{7}{4}\quad\binom{7}{5}\quad\binom{7}{6}\quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&2&&1&&&&& \\
&&&&1&&3&&3&&1&&&& \\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\
1&&\binom{7}{1}&&\binom{7}{2}&&\binom{7}{3}&&\binom{7}{4}&&\binom{7}{5}&&\binom{7}{6}&&1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&2&&1&&&&& \\
&&&&1&&3&&3&&1&&&& \\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}$$


Tartaglia

Vale mencionar que el triángulo de Pascal, que lleva ese nombre en Occidente en honor a las investigaciones que hizo Blaise Pascal sobre él, era conocido mucho antes, por ejemplo por el matemático italiano *Niccolò Fontana Tartaglia*, 1500-1557, o incluso mucho antes por el matemático chino *Yang Hui*, 1238–1298.

2.6.2. La expresión del número combinatorio.


Hui

Busquemos ahora cuál es el término general (no recursivo) del número combinatorio $\binom{n}{k}$ conjeturando una fórmula y probándola por inducción.

Si queremos contar la cantidad de subconjuntos B_3 con 3 elementos que tiene el conjunto $A_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ con 5 elementos, tenemos que elegir los 3 elementos que van a formar parte del subconjunto B_3. Pongamosle por ahora un orden a esos elementos (ya que esto lo sabemos contar, como cuando contamos las funciones inyectivas): para el 1er elemento de B_3 tenemos 5 posibilidades: cualquiera de los elementos a_1 hasta a_5. Pero luego para el 2do elemento nos quedan 4 posibilidades (uno de los que no hayamos elegido como 1er elemento) y para el 3er elemento nos quedan solo 3 posibilidades. Así tenemos $5 \cdot 4 \cdot 3 = 5!/2!$ elecciones. Pero en realidad al hacer esto estamos contando las ternas ordenadas de elementos (b_1, b_2, b_3) formadas con elementos distintos de A_5, y no los subconjuntos (donde no importa el orden). Por ejemplo el subconjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ aparece aquí $6 = 3!$ veces si contamos las ternas formadas por estos elementos:

$$(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_2, a_1, a_3), (a_2, a_3, a_1), (a_3, a_1, a_2), (a_3, a_2, a_1).$$

Cada subconjunto $\{b_1, b_2, b_3\}$ fue así contado 3! veces, luego:

$$3!\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!} \quad \Longrightarrow \quad \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10,$$

que coincide con el valor calculado en la sección anterior.

Con el mismo razonamiento para el caso general, podemos conjeturar entonces para todo $n \in \mathbb{N}_0$ la fórmula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad \text{para } \ 0 \le k \le n.$$

Teorema 2.6.4. (Número combinatorio.)

Sea $n \in \mathbb{N}_0$ y sea A_n un conjunto con n elementos. Para $0 \le k \le n$, la cantidad de subconjuntos con k elementos del conjunto A_n (o equivalentemente, la cantidad de maneras que hay de elegir k elementos en el conjunto A_n) es igual a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Demostración. Probaremos esta fórmula por inducción corrida a $n \ge 0$, usando la recurrencia de la Proposición 2.6.3 establecida en la sección anterior. Para $n \ge 0$, se tiene

$$p(n): \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad \text{para } \ 0 \le k \le n.$$

- Caso base: ¿Es $p(0)$ V? Sí, pues para $n = 0$ solo hay que verificar qué pasa para $k = 0$ y $\dfrac{0!}{0!0!} = 1 = \binom{0}{0}$.
- Paso inductivo: Dado $h \ge 0$, ¿$p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V?
  - HI: Para $0 \le k \le h$ se tiene $\dbinom{h}{k} = \dfrac{h!}{k!(h-k)!}$.
  - Qpq para $0 \le k \le h+1$ se tiene $\dbinom{h+1}{k} = \dfrac{(h+1)!}{k!(h+1-k)!}$.

  Pero por la Proposición 2.6.3, sabemos que para $1 \le k \le h$ se tiene

$$\begin{aligned}
\binom{h+1}{k} &= \binom{h}{k-1} + \binom{h}{k} \\
&\underset{HI}{=} \frac{h!}{(k-1)!(h-(k-1))!} + \frac{h!}{k!(h-k))!} \\
&= \frac{k \cdot h!}{k(k-1)!(h+1-k))!} + \frac{(h+1-k)h!}{k!(h+1-k)(h-k))!} \\
&= \frac{k \cdot h! + (h+1-k)h!}{k!(h+1-k))!} = \frac{\big(k + (h+1-k)\big)h!}{k!(h+1-k))!} \\
&= \frac{(h+1)h!}{k!(h+1-k))!} = \frac{(h+1)!}{k!(h+1-k))!}
\end{aligned}$$

  como se quería probar.

Faltan entonces los casos $k=0$ y $k=h+1$: en esos casos sabemos que

$$\binom{h+1}{0}=1=\binom{h+1}{h+1}$$

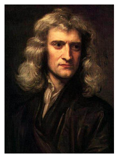
que coinciden con

$$\frac{(h+1)!}{0!(h+1-0)!} \quad \text{y} \quad \frac{(h+1)!}{(h+1)!\big(h+1-(h+1)\big)!}$$

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadera, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

$\square$

2.6.3. El Binomio de Newton.



Newton

Es hora de que entre en escena el que es considerado el matemático y físico más grande de la historia, *Isaac Newton*, 1642-1727. En este caso relacionado con la expansión de la expresíón

$$(x+y)^n,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Por ejemplo, si calculamos los desarrollos para los primeros valores de n,

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1,\\
(x+y)^1 &= x+y,\\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2,\\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,\\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,\\
(x+y)^5 &= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.
\end{aligned}$$

Pareciera que van apareciendo como coeficientes de los monomios x^iy^j los números combinatorios que aparecen en el triángulo de Pascal! O sea pareciera que se tiene

Teorema 2.6.5. (El binomio de Newton).

$$(x+y)^n = x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$

o lo que es lo mismo, ya que los números combinatorios son simétricos ($\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k},\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración. Haremos una demostración combinatoria, o sea "contando". Pensemos que

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdots(x+y)\cdot(x+y)}_{n \text{ factores}}.$$

Cuando aplicamos la distributividad, en cada paréntesis podemos elegir un x o un y (pero no los dos a la vez). Como en total hay n paréntesis terminaremos eligiendo k veces x y $n-k$ veces y, para algún valor de k, $0 \le k \le n$. Por ejemplo si no elegimos ninguna vez x y n veces y, obtenemos –al realizar el producto– el monomio y^n, y si elegimos 1 vez x y $n-1$ veces y, obtenemos el monomio xy^{n-1}. ¿Pero cuántas veces aparece cada uno de estos monomios?

- ¿Cuántas veces se obtiene el monomio y^n? Para ello tenemos que elegir solo el y de cada uno de los paréntesis: hay una única forma de hacer eso, y por lo tanto se obtiene una vez el monomio y^n.
- ¿Cuántas veces se obtiene el monomio xy^{n-1}? Para ello tenemos que elegir en alguno de los paréntesis el x y en todos los demás paréntesis el y: como hay n paréntesis, hay n formas de elegir el x (o bien del 1er paréntesis, o bien del 2do, o bien del 3ro, etc.) y de los demás paréntesis saco el y. Por lo tanto se obtiene $n = \binom{n}{1}$ veces el monomio xy^{n-1}.
- En general, dado k, $0 \le k \le n$, ¿cuántas veces se obtiene el monomio $x^k y^{n-k}$? Para ello tenemos que elegir en k paréntesis el x y en todos $n-k$ paréntesis restantes el y: como hay n paréntesis y tenemos que elegir de cuáles k paréntesis extraemos un x, hay $\binom{n}{k}$ formas de elegir de qué paréntesis saco x (y de los demás paréntesis saco el y). Por lo tanto se obtiene $\binom{n}{k}$ veces el monomio $x^k y^{n-k}$.

En definitiva, tenemos la suma de $n+1$ términos de la forma $\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$, lo que prueba el teorema. □

Observación 2.6.6.

- Con la fórmula del Binomio de Newton, se recupera facilmente la expresión

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

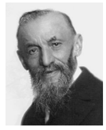
  que habíamos notado al definir el número combinatorio.
- ¿ Cuánto da $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$?
- Más arriba probamos que $\binom{2n}{n} \le (n+1)!$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. En la práctica hay un ejercicio que pide probar que $\binom{2n}{n} < 4^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, como consecuencia de que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$ (¿por qué?). Notemos que $4^n < (n+1)!$ para $n \ge 6$.
- Como una aplicación del binomio y un poco de trabajo, se puede probar por inducción que se tiene

$$\frac{n^n}{3^n} \le n! \le \frac{n^n}{2^n}, \quad \forall\, n \ge 6,$$

  una forma bastante precisa de ubicar el factorial entre dos potencias.

2.7. Apéndice

2.7.1. Los axiomas de Peano.



Peano

A fines del siglo XIX, el matemático, lógico y filósofo italiano *Giuseppe Peano*, 1858-1932, dio una definición axiomática de los números naturales. La clave de la definición de Peano es la noción de *sucesor* S que es la función de $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $S(n) = n + 1$, y las propiedades que satisface.

El conjunto de números naturales es un conjunto que satisface los axiomas siguientes:

1. 1 es un número natural.
2. Existe una función "sucesor" S definida sobre los números naturales que satisface:
   - Para todo número natural n, $S(n)$ es un número natural (es decir S es una función de los números naturales en los números naturales).
   - Para todo número natural n, $S(n) = 1$ es Falso (es decir, 1 no es el sucesor de ningún número natural).
   - Para todo par de números naturales n, m, si $S(n) = S(m)$, entonces $n{=}m$ (es decir la función S es inyectiva).
3. Si K es un conjunto cualquiera que satisface las dos propiedades siguientes
   - $1 \in K$,
   - para todo número natural n, $n \in K \;\Rightarrow\; S(n) \in K$,

   entonces K contiene a todos los números naturales.

Los Axiomas 1 y 2 implican que el conjunto de los números naturales contiene a los elementos $1, S(1), S\big(S(1)\big), \dots$, que son todos distintos entre sí, y es por lo tanto infinito. Pero hay que garantizar que no es más "grande" que el conjunto $\{1, S(1), S\big(S(10\big), \dots\}$: este es papel que juega el Axioma 3, que es de hecho el axioma de Inducción. Por ejemplo el conjunto $\mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\}$ satisface los tres primeros axiomas pero no el 3ro, ya que tomando $K = \mathbb{N}$ tendríamos que deducir que $\mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$.

2.7.2. El Principio de Buena Ordenación y los Principios de Inducción.

El *Principio de Buena Ordenación* dice que todo subconjunto no vacío del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ contiene un *primer elemento*, es decir un elemento que es menor o igual que todos los demás.

De hecho, sabiendo que $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, este resultado es bastante natural ya que si el subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ es finito y no vacío, podemos comparar sus elementos y quedarnos con el más chico, y si el conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ es infinito y no vacío, podemos considerar un elemento $n_0 \in A$ y quedarnos con $A \cap \mathbb{N}_{\leq n_0}$, que es finito y no vacío: el menor elemento de este conjunto es el menor elemento de A.

Pero se puede probar un resultado más potente: se puede probar que de hecho el Principio de Inducción (P.I., Teorema 2.3.2), el Principio de Inducción completa (P.I.C., Teorema 2.5.7) y el Principio de Buena Ordenación (P.B.O.) y son todos equivalentes entre sí, es decir si vale cualquier de ellos valen los otros.

Para demostrar ese tipo de afirmaciones donde hay más de dos proposiciones que son equivalentes, se acostumbra mostrar implicaciones en forma de ciclo: por ejemplo aquí lo se puede probar la sucesión de implicaciones

$$\text{P.I.} \implies \text{P.I.C.} \implies \text{P.B.O.} \implies \text{P.I.}$$

Así por ejemplo para ver que P.B.O $\Rightarrow$ P.I.C. se utiliza el hecho que P.B.O. $\Rightarrow$ P.I. $\Rightarrow$ P.I.C.

Estas demostraciones son bastante sutiles. El lector inquieto las puede encontrar sin dificultad en internet, o en distintos libros, o en las notas de Pacetti-Graña que aparecen en la bibliografía del curso.