ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Práctica 9 $*$ 1er. Cuatrimestre 2002

Ideales Cocientes y Descomposición primaria en $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$

1.– Sean $I, J \subset \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ ideales. Se define el cociente de I por J como:

$$(I:J) := \{\, f \in \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n] : f\,g \in I,\ \forall g \in J\,\}.$$

Probar que:
(i) $(I:J)$ es un ideal que contiene a I.
(ii) $1 \in (I:J) \Leftrightarrow J \subseteq I$.
(iii) Si $I_i, J_i, 1 \le i \le r$ son ideales, $(\bigcap_i I_i : J) = \bigcap_i (I_i : J)$ e $(I : \sum_i J_i) = \bigcap_i (I : J_i)$.

2.– Sean $I, J \subset \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ ideales.
(i) Probar que $\overline{V(I) - V(J)} \subset V(I:J)$ (donde $\overline{X}$ denota la clausura de Zariski de X).
(ii) Probar que si $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, entonces $\overline{V(I) - V(J)} = V(I:J)$.

3.– Sean V, W variedades en $\mathbb{K}^n$. Probar que $(I(V) : I(W)) = I(V - W)$.

4.– Sean I y $f, f_1, \dots, f_s$ un ideal y elementos de $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ respectivamente.
(i) Probar que si $I \cap < f > = < g_1, \dots, g_t >$, entonces $(I : f) = < g_1/f, \dots, g_t/f >$.
(ii) Deducir un algoritmo para calcular un sistema de generadores de $(I : f)$.
(iii) Deducir un algoritmo para calcular un sistema de generadores de $(I :< f_1, \dots, f_s >)$.

5.– En $\mathbb{K}[X,Y,Z]$, sea $I := < X, Y >< X, Z >$. Probar que

$$I = < X, Y > \cap < X, Z > \cap < X, Y, Z >^2$$

es una descomposición primaria minimal de I. ¿Qué componentes son aisladas y cuáles son inmersas?

6.– Sea $I = < X^2, X\,Y >$ en $\mathbb{K}[X,Y]$. Probar que para todo $a \in \mathbb{K}$, $I = < X > \cap < X^2, Y - a\,X >$ es una descomposición primaria minimal de I. Así, si $\mathbb{K}$ es infinito, I tiene infinitas descomposiciones primarias distintas.

7.– Sea A un anillo noetheriano. Para cada I ideal de A, denotamos por $I[X]$ el conjunto de polinomios de $A[X]$ con coeficientes en I.
(i) Probar que $I[X]$ es un ideal de $A[X]$.
(ii) Probar que si $\mathcal{P}$ es un ideal primo de A, entonces $\mathcal{P}[X]$ es un ideal primo de $A[X]$.
(iii) Probar que si $\mathcal{Q}$ es $\mathcal{P}$-primario en A, entonces $\mathcal{Q}[X]$ es $\mathcal{P}[X]$-primario en $A[X]$.
(iv) Deducir cómo es una descomposición primaria minimal de $I[X]$ en función de una descomposición primaria minimal de I.

8.– Probar que en $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ los ideales $\mathcal{P}_i := < X_1, \dots, X_i >$ son primos y sus potencias son primarias.

9.– Sea $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado e $I \subset \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ ideal cero-dimensional. Probar que si $I \subset \mathcal{P}$ con $\mathcal{P}$ ideal primo, entonces $\mathcal{P}$ es maximal.

10.– **Dificil, no sé si puede salir con nuestras herramientas.**
Ejemplo de una potencia de un primo en un anillo de polinomios que no es primario.
Sea $A := \mathbb{K}[X_{ij}, 1 \le i,j \le 3]$ el anillo de polinomios en 9 variables.
Consideremos la matriz $G := [X_{ij}]_{1 \le i,j \le 3}$, su determinante $g \in A$, y $\mathcal{M} := < X_{ij}, 1 \le i,j \le 3 >$.
(i) Probar que el ideal $\mathcal{P}$ generado por todos los menores de orden 2 de G es primo. (Puede intentar probar que $V(\mathcal{P})$ es irreducible.)
(ii) Probar que la descomposición primaria de $\mathcal{P}^2$ es:

$$\mathcal{P}^2 = (\mathcal{P}^2 + < g >) \cap \mathcal{M}^4.$$