ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Práctica 8 $*$ 1er. Cuatrimestre 2002

Cocientes de Anillos Polinomiales

1.– Sea $f : A \to B$ un **epimorfismo** de anillos conmutativos con unidad. Sean $\mathcal{P}$ un ideal primo en A y $\mathcal{Q}$ un ideal primo en B. Decidir si $f(\mathcal{P})$ y si $f^{-1}(\mathcal{Q})$ son ideales primos en B y A respectivamente.

2.– Sea $f : A \to B$ un **epimorfismo** de anillos conmutativos con unidad.
(i) Probar que f se extiende en forma natural a un epimorfismo $\tilde{f} : A[X] \to B[X]$ cuyo núcleo es el ideal $(\mathrm{Ker} f)[X]$ de $A[X]$.
(ii) Probar que los ideales de $A[X]$ que contienen a $\mathrm{Ker} f$ están en correspondencia biyectiva con los ideales de $B[X]$ vía $\tilde{f}$.
(iii) Generalizar esta situación a $A[X_1, \ldots, X_n] \to B[X_1, \ldots, X_n]$.

3.– Sea $f : A \to B$ un **epimorfismo** de anillos conmutativos con unidad. Sea $\mathcal{M}$ un ideal maximal de $A[X]$ que contiene a $\mathrm{Ker} f$. Probar que en $A[X] \to (A/\mathrm{Ker} f)[X]$, la imagen de $\mathcal{M}$ es un ideal maximal.

4.– Sea $f \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{gr}(f) = n$. Probar que $\{ \overline{1}, \overline{X}, \ldots \overline{X^{n-1}} \}$ es una base del $\mathbb{K}-$espacio vectorial $\mathbb{K}[X] \,/ < f >$.

5.– Sea $f(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i) \in \mathbb{K}[X]$ con $\alpha_i \in \mathbb{K}$ todos distintos.
Se define $g_i := \prod_{j \neq i} (X - \alpha_j)$, $1 \leq i \leq n$.
(i) Probar que $\{ \overline{g_1}, \ldots, \overline{g_n} \}$ es una base de $\mathbb{K}[X] \,/ < f >$.
(ii) Dado $g \in \mathbb{K}[X]$, determinar las coordenadas λ_i de $\overline{g} \in \mathbb{K}[X] \,/ < f >$ en la base $\{ \overline{g_1}, \ldots, \overline{g_n} \}$, e identificarlas.

6.– Sea $f(X) = a_n X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ con $a_n \neq 0$.
Se puede escribir :

$$\begin{aligned} f(X) &= (a_n X^{n-1} + \ldots + a_1)X + a_0 \\ &= ((a_n X^{n-2} + \ldots + a_2)X + a_1)X + a_0 \\ \cdots &= ((\ldots((a_n X + a_{n-1})X + a_{n-2})X + \ldots)X + a_1)X + a_0 \end{aligned}$$

Es decir, si se define inductivamente :

$$\begin{aligned} H_n &= a_n \\ H_{n-1} &= H_n X + a_{n-1} \\ H_{n-2} &= H_{n-1} X + a_{n-2} \\ &\vdots \\ H_0 &= H_1 X + a_0 \end{aligned}$$

entonces, $H_0 = f$ y $\mathrm{gr}(H_{n-i}) = i \quad (0 \leq i \leq n)$.
(i) Probar que $\{ \overline{H_1}, \ldots, \overline{H_n} \}$ es una base de $\mathbb{K}[X] \,/ < f >$. (Los polinomios H_i se llaman los polinomios de Horner, y verifican que calcular $H_{n-1}, \ldots, H_0$ sucesivamente es la forma de evaluar un polinomio f general en 1 variable que usa la menor cantidad de productos).
(ii) Sea $\mu_X : \mathbb{K}[X] \,/ < f > \longrightarrow \mathbb{K}[X] \,/ < f >$ la transformación lineal "multiplicar por X" en $\mathbb{K}[X] \,/ < f >$, o sea $\mu_X(\overline{g}) = \overline{Xg}$.
Escribir la matriz de μ_X en la base $\{ H_n, \ldots, H_1 \}$.
(iii) Determinar el polinomio característico de la tranformación lineal μ_X.

7.– Probar que $\mathbb{R}[X] \,/ < X^2 > \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $\overline{f} \mapsto (f(0), f'(0))$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}-$espacios vectoriales.

8.– Probar que $\mathbb{R}[X] \,/ < X^2+1 >$ y $\mathbb{C}$ son anillos (luego cuerpos) isomorfos.

9.– Probar que $\mathbb{K}[X,Y] \,/ < X >$ y $\mathbb{K}[Y]$ son anillos isomorfos.

10.– Probar que $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n] \,/ < X_1,\dots,X_n >$ y $\mathbb{K}$ son anillos (luego cuerpos) isomorfos.

11.– Sea $I = < Y + X^2 - 1, XY - 2Y^2 + 2Y > \subset \mathbb{R}[X,Y]$.
(i) Determinar una base del $\mathbb{R}-$espacio vectorial $\mathbb{R}[X,Y] \,/ I$.
(ii) Determinar un isomorfismo entre $\mathbb{R}[X,Y] \,/ I$ y $\mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
(iii) Escribir la tabla de multiplicación de los elementos de la base hallada en (i) (que determina la multiplicación del anillo $\mathbb{R}[X,Y] \,/ I$) y decidir si $\mathbb{R}[X,Y] \,/ I$ es un cuerpo.

12.– Sea $I = < X^2 + Y^5, X^3 + Y^4 > \subset \mathbb{C}[X,Y]$. Decidir si los siguientes pares de polinomios determinan la misma clase en $\mathbb{C}[X,Y] \,/ I$:
(i) XY , 1
(ii) XY^5 , Y^4
(iii) Y^4 , $-X^4Y$
(iv) $5X^2 + 7Y^2$, $5Y^2 + 7X^2$.

13.– Sea $I = < X^4Y - Z^6, X^2 - Y^3Z, X^3Z^2 - Y^3 > \subset \mathbb{K}[X,Y,Z]$. Determinar una base del $\mathbb{K}-$espacio vectorial $\mathbb{K}[X,Y,Z] \,/ I$.

14.– Sea $I \subset \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ un ideal. Probar que si para un orden monomial dado, el número de monomios en el complemento de $< M(I) >$ es finito e igual a d, entonces es también igual a d para cualquier otro orden monomial.

15.– Sea $I \subset \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n$ ($\mathbb{K}$ cuerpo arbitrario) un ideal que verifica que $\dim_{\mathbb{K}}[X_1,\dots,X_n]/I < \infty$.
(i) Probar que $\dim_{\mathbb{K}}[X_1,\dots,X_n]/\sqrt{I} \leq \dim_{\mathbb{K}}[X_1,\dots,X_n]/I$.
(ii) Probar que $\#V_{\mathbb{K}}(I) \leq \dim_{\mathbb{K}}[X_1,\dots,X_n]/\sqrt{I}$ pero que no tiene por qué darse la igualdad si $\mathbb{K}$ no es algebraicamente cerrado.