ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Práctica 6 $*$ 2do. Cuatrimestre 2004

Resultante, Teoremas de Eliminación y Extensión

1.– Calcular $\mathrm{Res}_X(X^5-3X^4-2X^3+3X^2+7X+6, X^4+X^2+1)$ y decidir si los dos polinomios tienen un factor en común en $\mathbb{Q}[X]$.

2.– Sea $f=aX^2+bX+c=a(X-\alpha)(X-\beta)\in\mathbf{K}[X]$ con $a\neq 0$.
(i) Verificar que el *Discriminante* $\Delta := b^2-4ac$ también es igual a $a^2(\alpha-\beta)^2$, y por lo tanto reencontrar "f tiene una raíz doble $\Longleftrightarrow$ $\Delta=0$".
(ii) Justificar la afirmación "$\mathrm{Res}_X(f,f')=0 \Longleftrightarrow \Delta=0$". Calcular $\mathrm{Res}_X(f,f')$ y comparar con Δ.

3.– Sea $f=X^3+pX+q=(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)\in\mathbf{K}[X]$.
Se define el *Discriminante* de f (caso f mónico) como $\Delta(f):=(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2$. Se verifica que $\Delta(f)=0 \Longleftrightarrow$ f tiene una raíz múltiple.
(i) Verificar que $\Delta(f)=-4p^3-27q^2$. (Observar en primer término que $\Delta(f)$ es simétrico en las raíces y por lo tanto es efectivamente un polinomio en los coeficientes de f.)
(ii) Calcular $\mathrm{Res}_X(f,f')$ y comparar con $\Delta(f)$.

4.– Sea $f=a_0X^n+\cdots+a_n=a_0(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_n)\in\mathbf{K}[X]$, con $a_0\neq 0,\ n\geq 2$.
Se define el *Discriminante* de f como :

$$\Delta(f):=a_0^{2n-2}\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2.$$

Probar que $\mathrm{Res}_X(f,f')=a_0^{n-1}\prod_i f'(\alpha_i)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0\,\Delta(f)$.
(Sug : $f'=a_0\sum_i(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_{i-1})(X-\alpha_{i+1})\ldots(X-\alpha_n)$.)

5.– Sean $f=2X^2+3X+1$ y $g=7X^2+X+3$
(i) Usar el algoritmo de Euclides para calcular $\mathrm{mcd}(f;g)$, y hallar $r,s\in\mathbb{Q}[X]$ tales que $1=rf+sg$.
(ii) Limpiando denominadores, relacionar (i) con $\mathrm{Res}_X(f,g)$.

6.– Sean $f=XY-1$ y $g=X^2+Y^2-4$.
(i) Mirando f y g como polinomios en X a coeficientes en Y, calcular $\mathrm{Res}_X(f,g)$.
¿ Tienen f y g un factor en común en $\mathbb{Q}[X,Y]$? ¿ Y en $\mathbb{Q}(Y)[X]$?
(ii) ¿ Existe un polinomio puro en Y en $<f,g>$?
¿ Existen $r,s\in\mathbb{Q}[X,Y]$ tales que $1=rf+sg$? ¿ Y en $\mathbb{Q}(Y)[X]$?
(iii) Describir $V_{\mathbb{C}}(f,g)$.

7.– Sean $f,\,g\in\mathbf{K}[X_1,\ldots,X_n]$ polinomios que si se miran como polinomios en la variable X_1 tienen grado ≥ 1 y son mónicos.
Probar que f y g tienen un factor en común en $\mathbf{K}[X_1,\ldots,X_n]$ sii $\mathrm{Res}_{X_1}(f,g)$ es el polinomio nulo.

8.– Sean $f=a_nX^n+\cdots+a_0$ y $g=b_mX^m+\cdots+b_0$. En el curso para definir la resultante $\mathrm{Res}(f,g)$, se supuso que $n,m\geq 1$ y $a_n\neq 0,\ b_m\neq 0$.
Analizar qué pasa con la definición de la resultante si $a_n=0$ (pero $b_m\neq 0$), o sea cuando uno no conoce a priori el grado exacto del polinomio f, pudiendo ser éste incluso constante.
¿ Qué pasa si a_n y b_m son cero ?

9.– Sean $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$. Probar que :

$$\#V(f,g) = \infty \iff f \text{ y } g \text{ tienen un factor común no constante en } \mathbb{C}[X,Y].$$

10.– Sea $I = < X^2 + 2Y^2 - 3, X^2 + XY + Y^2 - 3 > \subset \mathbb{C}[X,Y]$.

(i) Caracterizar los ideales $I \cap \mathbb{C}[X]$ e $I \cap \mathbb{C}[Y]$.

(ii) Determinar $V(I) \subset \mathbb{C}^2$. ¿ Cuáles de estas soluciones pertenecen a $\mathbb{Q}^2$?

11.– Sea $I = < X^2 + Y^2 + Z^2 - 4, X^2 + 2Y^2 - 5, XZ - 1 > \subset \mathbb{C}[X,Y,Z]$.

(i) Caracterizar $I \cap \mathbb{C}[Y,Z]$ e $I \cap \mathbb{C}[Z]$.

(ii) ¿ Cuántas soluciones racionales hay en $V(I)$?

12.– Sea $I = < T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2, T^2 + 2X^2 - XY - Z^2, T + Y^3 - Z^3 > \subset \mathbb{C}[X,Y,Z,T]$.

(i) Determinar un sistema de generadores de $I \cap \mathbb{C}[X,Y,Z]$.

(ii) Calcular una Base de Gröbner del sistema de generadores hallado, con respecto al orden "grevlex".

(iii) Calcular ahora una base de Gröbner de I con respecto al orden producto siguiente :

$$T^\alpha X^\beta Y^\gamma Z^\delta < T^{\alpha'} X^{\beta'} Y^{\gamma'} Z^{\delta'} \iff \alpha < \alpha' \text{ o } (\alpha = \alpha' \text{ y } X^\beta Y^\gamma Z^\delta <_{\text{grevlex}} X^{\beta'} Y^{\gamma'} Z^{\delta'})$$

Comparar los polinomios de $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ de la base obtenida con los de (ii), y explicar el resultado.

(iii) Tratar de enunciar condiciones sobre un orden para que valga el teorema de eliminación.

13.– Sea $I = < Y - X^2, Z - X^3 > \subset \mathbb{R}[X,Y,Z]$. Verificar que $V_{\mathbb{R}}(I) = V_{\mathbb{R}}((Y - X^2)^2 + (Z - X^3)^2)$, y generalizar probando que toda variedad de $\mathbb{R}^n$ puede ser definida por medio de un solo polinomio.

14.– Se define $\Pi_k : \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^{n-k}$ como la proyección $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_{k+1}, \ldots, x_n)$.
Sea $I \subset \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ un ideal e $I_k = I \cap \mathbf{K}[X_{k+1}, \ldots, X_n]$ el $k-$ésimo ideal de eliminación.

(i) Probar que $\Pi_k(V(I)) \subset V(I_k)$ pero que no vale siempre la igualdad.

(ii) Probar que $\Pi_k(V(I)) = \{ (a_{k+1}, \ldots, a_n) \in V(I_k) \text{ tq } \exists\, a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{K} \text{ con } (a_1, \ldots, a_n) \in V(I) \}$.

15.– Sea el sistema de ecuaciones dado por :

$$\begin{cases} X^5 + \dfrac{1}{X^5} = Y \\ X + \dfrac{1}{X} = Y \end{cases}$$

(i) Determinar un ideal $I \subset \mathbb{C}[X,Y,Z]$ que "ayude" para resolver este sistema, y encontrar sistemas de generadores de los ideales de eliminación $I \cap \mathbb{C}[Y,Z]$ e $I \cap \mathbb{C}[Z]$.

(ii) Aplicar el teorema de extensión para decidir qué $c \in V(I \cap \mathbb{C}[Z])$ se extienden a $(a,b,c) \in V(I)$.

(iii) ¿ Qué soluciones $(b,c) \in V(I \cap \mathbb{C}[Y,Z])$ se extienden a soluciones $(a,b,c) \in V(I)$? ¿ Por qué no se contradice el teorema de extensión ?

(iv) Resolver completamente el sistema original.

16.– Sean $f_1 = X(Y-Z) + Y - 1$, $f_2 = X(Y-Z) + Z - 1$ e $I = < f_1, f_2 > \subset \mathbb{C}[X,Y,Z]$.

(i) Hallar a mano todas las soluciones del sistema $\{ f_1 = 0, f_2 = 0 \}$.

(ii) Describir $I_1 = I \cap \mathbb{C}[Y,Z]$. ¿ Se extiende todo $(b,c) \in V(I_1)$ a $(a,b,c) \in V(I)$?

(iii) Determinar otros generadores de I donde para todo $(b,c) \in V(I_1)$, existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $(a,b,c) \in V(I)$.

17.– El *Paraguas de Whitney* es la superficie $\mathcal{W}$ dada paramétricamente, con parámetros U, V, por :

$$\begin{cases} X = UV \\ Y = V \\ Z = U^2 \end{cases}$$

(i) Usando Maple, dibujarlo en $\mathbb{R}^3$.
(ii) Hallar ecuaciones en X, Y, Z tales que la variedad V definida por ellas contenga a $\mathcal{W}$.
(iii) Mostrar que (si eligió bien las ecuaciones), en $\mathbb{C}^3$ se tiene $V_{\mathbb{C}} = \mathcal{W}_{\mathbb{C}}$, pero en $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{W}_{\mathbb{R}} \subset V_{\mathbb{R}}$, sin que valga la igualdad. ¿ Qué puntos de $V_{\mathbb{R}}$ no pertenecen a $\mathcal{W}_{\mathbb{R}}$?
(iv) Mostrar que los parámetros U, V no están siempre univocamente determinados por X, Y, Z. ¿ En qué puntos falla la unicidad y qué tienen que ver con el dibujo ?

18.– Sean $f_1 = YX^3 + X^2$, $f_2 = Y^3X^2 + Y^2$ y $f_3 = YX^4 + X^2 + Y^2$, e $I =< f_1, f_2, f_3 >\subset \mathbb{C}[X, Y]$.
(i) Hallar $I_1 := I \cap \mathbb{C}[Y]$.
(ii) Si h_i son los coeficientes principales de los generadores f_i de I como polinomios en X, calcular $V(I_1)$ y $V(I_1) \cap V(h_1, h_2, h_3)$ y compararlos.
(iii) Sea $J =< f_1, f_2, f_3, h_1, h_2, h_3 >$. Probar que $I \neq J$ pero $V(I) = V(J)$ y $V(I_1) = V(J_1)$.
(iv) Considerar los polinomios $g_1 = f_1 - h_1X^3$, $g_2 = f_2 - h_2X^2$, $g_3 = f_3 - h_3X^4$, y probar que $J =< g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3 >$.
Repetir (ii) para J_1. ¿ Hay algo distinto ?
(v) Verificar que si $I =< f_1, \dots, f_s >\subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, vale siempre :
$V(I_1) = \Pi_1(V) \cup (V(h_1, \dots, h_s) \cap V(I_1))$ (con h_i definidos como en (ii), y $\Pi_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto y$),
y que a veces $V(h_1, \dots, h_s) \cap V(I_1)$ coincide con $V(I_1)$ pero a veces está estrictamente incluído.
(Se puede probar que en $\mathbb{C}$ siempre se pueden cambiar las ecuaciones que definen $V(I)$ de manera que $V(h_1, \dots, h_s) \cap V(I_1)$ esté estrictamente contenido en $V(I_1)$.)

19.– Sea $I =< X^2 + Y^2 + Z^2 + 2, 3X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 5 >\subset K[X, Y, Z]$. Sea $I_1 := I \cap \mathbf{K}[Y, Z]$ y $\Pi_1 : \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^2$, $(x, y, z) \mapsto (y, z)$.
(i) Probar que en $\mathbb{C}$ vale : $V_{\mathbb{C}}(I_1) = \Pi_1(V_{\mathbb{C}}(I))$
(ii) Calcular en $\mathbb{R}$: $V_{\mathbb{R}}(I)$ y $V_{\mathbb{R}}(I_1)$, y mostrar que en $\mathbb{R}$ no hay modo de hallar nuevas ecuaciones para definir $V_{\mathbb{R}}(I)$ de manera que se cumpla la afirmación del ejercicio 18 (v).

20.– En el ejercicio 13, se exhibieron dos ideales de $\mathbb{R}[X, Y]$ que determinan la misma variedad de $\mathbb{R}^2$. Mostrar que uno de los ideales está contenido en el otro. ¿ Se pueden hallar dos ideales en $\mathbb{R}[X, Y]$ que determinan la misma variedad en $\mathbb{R}^2$ pero no incluído uno en otro ?