ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Segundo Cuatrimestre 2008– Práctica 5

Variedades de K^n, ideales de variedades e ideales radicales

(**1**) Dibujar las variedades $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(X^2+4Y^2+2X-16Y+1)$, $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(X^2-Y^2)$, $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(2X+Y-1, 3X-Y+2)$, $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(X^2+Y^2-4) \cap \mathbf{V}_{\mathbb{R}}(XY-1)$ y $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(X^2+Y^2-4, XY-1)$.

(**2**) "Dibujar" las variedades $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(X^2+Y^2+Z^2-1)$, $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(X^2+Y^2-1)$, $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(XZ^2-XY)$, $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(X^4-ZX, X^3-YX)$, $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}((X-Z)(X^2-Y), Y(X^2-Y), (Z+1)(X^2-Y))$, $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(XY, XZ)$ y $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(XY, XZ, X+1)$.

(**3**) Probar que $\{\, (x,x), x \in \mathbb{R} \,\}$ es una variedad de $\mathbb{R}^2$ y que $\{\, (x,x), x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$ no lo es.

(**4**) Probar que el semiplano superior $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0 \,\}$ no es una variedad de $\mathbb{R}^2$.

(**5**) Probar que $\mathbb{Z}^n$ no es una variedad de $\mathbb{R}^n$ (ni de $\mathbb{C}^n$).

(**6**) Sean $V \subset K^n$ y $W \subset K^m$ variedades. Probar que

$$V \times W := \{\, (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in K^{n+m} \;\text{ tq }\; (x_1, \dots, x_n) \in V, (y_1, \dots, y_m) \in W \,\}$$

es una variedad de K^{n+m}.

(**7**) Probar que las curvas de $\mathbb{R}^3$ dadas por $\{\, (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R} \,\}$ y $\{\, (t^2, t^3, t^4), t \in \mathbb{R} \,\}$ respectivamente son variedades de $\mathbb{R}^3$. (Estas son parametrizaciones de las curvas.)

(**8**) Sea $X := \{(x,x), x \in \mathbb{R}, x \neq 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcular $\mathbf{I}_{\mathbb{R}}(X)$. Idem para $X := \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$.

(**9**) Probar que $\mathbf{I}_K(\mathbf{V}_K(x-y)) = \langle x-y \rangle$.

(**10**) Sea $I \subset K[\mathbf{X}]$ un ideal. Probar que siempre existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $f \in \sqrt{I}$, se tiene que $f^{N_0} \in I$.

(**11**) Determinar si $X+Y \in \sqrt{\langle X^3, Y^3, XY(X+Y) \rangle}$ y si $X^2+3XZ \in \sqrt{\langle X+Z, X^2Y, X-Z^2 \rangle}$. En caso afirmativo, ¿ a qué potencia hay que elevar los polinomios para meterlos en los ideales ?

(**12**) Probar que $\langle XY, XZ, YZ \rangle$ es un ideal radical.

(**13**) Probar que en $K[X,Y]$, $\sqrt{\langle X^2, Y^3 \rangle} = \langle X, Y \rangle$, e $\mathbf{I}_K(\mathbf{V}_K(X^2, Y^3)) = \langle X, Y \rangle$. Generalizar para $\sqrt{\langle X^n, Y^m \rangle}$ e $\mathbf{I}_K(\mathbf{V}_K(X^n, Y^m))$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

(14) Si f, g son dos polinomios no constantes, ¿ es necesariamente cierto que $\sqrt{\langle f^2, g^3 \rangle} = \langle f, g \rangle$? ¿ Y si más aún f y g no tienen factores múltiples ?

(15) Sea $I = \langle X^2 + Y^2 - 1, Y - 1 \rangle \subset \mathbb{C}[X, Y]$. Hallar $f \in \mathbf{I}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I))$ tal que $f \notin I$. ¿ Es I un ideal radical ?

(16) Comparar $\mathbf{I}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(x^2 + y^2 + 1))$ con $\sqrt{\langle x^2 + y^2 + 1 \rangle} \subset \mathbb{C}[X, Y]$. Idem para $\mathbf{I}_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(x^2 + y^2 + 1))$ con $\sqrt{\langle x^2 + y^2 + 1 \rangle} \subset \mathbb{R}[X, Y]$.

(17) Sea $I = \langle XY, (X - Y)X \rangle \in \mathbb{C}[X, Y]$. Describir $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I)$ y $\sqrt{I}$.

(18) Sea $I = \langle X^2 + Y^2 + Z^2 - 1, X^2 + Z^2 - Y, X - Z \rangle \subset \mathbb{C}[X, Y, Z]$.

- Describir $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I)$.
- ¿ Es I un ideal radical ?