ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Segundo Cuatrimestre 2008– Práctica 3

Ideales, Ordenes monomiales y Algoritmo de División en $K[X_1,\dots,X_n] =: K[\mathbf{X}]$

(**1**) Probar las siguientes igualdades de ideales en $\mathbb{Q}[X,Y]$:
- $\langle X+Y, X-Y\rangle = \langle X,Y\rangle$
- $\langle aX+bY, cX+dY\rangle = \langle X,Y\rangle$ para $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ si y sólo si $ad-bc\neq 0$.
- $\langle X+XY, Y+XY, X^2, Y^2\rangle = \langle X,Y\rangle$
- $\langle 2X^2+3Y^2-11, X^2-Y^2-3\rangle = \langle X^2-4, Y^2-1\rangle$.

(**2**) Algunas diferencias entre ideales y subespacios vectoriales.
- Probar que el ideal $\langle X\rangle\subset K[X]$ (una variable) es un K-subespacio vectorial de $K[X]$ de dimensión infinita.
- Sean $f_1,f_2\in K[\mathbf{X}]$ cualesquiera. Probar que existen infinitos pares de polinomios $g_1,g_2\in K[\mathbf{X}]$ tales que $g_1f_1+g_2f_2=0$.
- Sea $I=\langle f_1,\dots,f_s\rangle\subset K[\mathbf{X}]$ y $f\in I$. Probar que existen infinitas maneras de escribir $f=h_1f_1+\cdots+h_sf_s$ con $h_1,\dots,h_s\in K[\mathbf{X}]$.

(**3**) Una base $\{X^\alpha,\ \alpha\in A\subset {\mathbb{N}_0}^n\}$ de un ideal monomial I se llama *minimal* si para todo $X^\alpha, X^\beta\in A,\ X^\alpha \mid X^\beta \Longrightarrow \alpha=\beta$. Mostrar que todo ideal monomial tiene una base minimal, y que ésta es única.

(**4**) Probar que el orden en $K[X,Y]$ definido por $X^\alpha Y^\beta < X^{\alpha'}Y^{\beta'} \iff \alpha+\pi\beta<\alpha'+\pi\beta'$ es un orden monomial (donde $\pi=3.14...$). Ordenar según este orden todos los monomios de grado ≤ 4.

(**5**) **Ordenes con pesos**
Sean $<$ un orden monomial en $K[\mathbf{X}]$ y $u:=(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Se define en $K[\mathbf{X}]$ el orden $<_u$ siguiente :

$$\mathbf{X}^\alpha <_u \mathbf{X}^\beta \quad\iff\quad u\cdot\alpha<u\cdot\beta \quad \text{ó} \quad u\cdot\alpha=u\cdot\beta \ \text{ y } \ \mathbf{X}^\alpha<\mathbf{X}^\beta$$

(donde $\cdot$ denota el producto escalar común de vectores).
- Mostrar que $<_u$ es un orden monomial (que se llama el orden con peso determinado por u y $<$).
- Determinar el peso u de manera de obtener como $<_u$ el orden lexicográfico graduado a partir del orden lexicográfico puro $<$.

(**6**) **Ordenes con pesos independientes**
Sea $u:=(u_1,\dots,u_n)$ un vector de $\mathbb{R}^n$ tq $u_1,\dots,u_n$ son positivos y linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Se define en $K[\mathbf{X}]$ el orden $<_u$ siguiente :

$$\mathbf{X}^\alpha <_u \mathbf{X}^\beta \quad\iff\quad u\cdot\alpha<u\cdot\beta$$

(donde $\cdot$ denota el producto escalar común de vectores).
- Mostrar que $<_u$ es un orden monomial (que se llama orden con pesos independientes). ¿ Dónde se usa la independencia lineal de los u_i?
- Mostrar que $u=(1,\sqrt{2})$ y $u=(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ dan dos ordenes con pesos independientes en $K[X,Y]$ y $K[X,Y,Z]$ respectivamente.

(7) Sea $I = \langle X^6, X^2Y^3, XY^7 \rangle \subset K[X,Y]$.
- Dibujar en el plano el conjunto de vectores (m,n) que son exponentes de monomios X^mY^n que aparecen en los elementos de I.
- Si se aplica el algoritmo de división de Hironaka, o cualquier algoritmo de división, para $f \in K[X,Y]$, independientemente del orden monomial usado, ¿ qué monomios pueden aparecer en el resto ?

(8) Sean $f = X^7 + X^3Y^2 - Y + 1$ y $F = (XY^2 - X, X - Y^3)$.
- Calcular el resto y los cocientes de la división del polinomio f por el conjunto ordenado F para el orden lexicográfico $X > Y$ y para el orden diagonal ("deglex") con $X > Y$.
- Repetir permutando los elementos del conjunto F. ¿ Qué se observa ?

(9) Sean $f = X^3 - X^2Y - X^2Z + X$, $f_1 = X^2Y - Z$ y $f_2 = XY - 1$.
- Usando el orden diagonal con $X > Y > Z$ calcular :
  - el resto r_1 de f por (f_1, f_2).
  - el resto r_2 de f por (f_2, f_1).

  ¿ En qué etapa aparece la diferencia entre los dos restos ?
- Sea $r := r_1 - r_2$. ¿ Pertenece r al ideal $\langle f_1, f_2 \rangle \subset \mathbb{Q}[X,Y,Z]$? En caso afirmativo, hallar $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}[X,Y,Z]$ tales que $r = a_1f_1 + a_2f_2$.
- Eplicitar (sin hacer cuentas) los cocientes y el resto de la división de Hironaka de r por (f_1, f_2).
- ¿ Resuelve el algoritmo de división de Hironaka el problema de la pertenencia de un polinomio f al ideal $\langle f_1, f_2 \rangle$?

(10) Sean $f_1 = X$, $f_2 = Y - X$ y $f_3 = 1 - YZ$ y $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$.
- Probar que $\{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } f(x,y,z) = 0 \ \forall f \in I \}$ es vacío.
- Probar que para cualquier orden monomial que se considere y para cualquier orden de los polinomios f_1, f_2, f_3, el resto de la división de Hironaka del polinomio 1 por los generadores de I es no nulo.
- Mostrar que sin embargo $1 \in I$ exhibiendo a_1, a_2, a_3 tales que $1 = a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3$.

(11) Sea $I = \langle Y - X^2, Z - X^3 \rangle \subset \mathbb{C}[X,Y,Z]$
- Mostrar que todo $f \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ puede escribirse en la forma :

  $$f = a_1(X,Y,Z)(Y - X^2) + a_2(X,Y,Z)(Z - X^3) + r(X)$$

  donde $r(X) \in \mathbb{C}[X]$ es un polinomio puro en X.
- ¿ Corresponde esto a efectuar la división de Hironaka para alg'ún orden adecuado ?
- Mostrar que en este caso $f \in I$ si y solo si $r = 0$. ¿ Qué hay de diferente aquí que en el caso de los dos ejercicios anteriores ?