

# ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

PRIMER CUATRIMESTRE 2006– PRÁCTICA 3

## Ideales, Ordenes monomiales y Algoritmo de División en $K[X_1, \dots, X_n] =: K[\mathbf{X}]$

(1) Probar las siguientes igualdades de ideales en  $\mathbb{Q}[X, Y]$  :

- $\langle X + Y, X - Y \rangle = \langle X, Y \rangle$
- $\langle aX + bY, cX + dY \rangle = \langle X, Y \rangle$  para  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$  si y sólo si  $ad - bc \neq 0$ .
- $\langle X + XY, Y + XY, X^2, Y^2 \rangle = \langle X, Y \rangle$
- $\langle 2X^2 + 3Y^2 - 11, X^2 - Y^2 - 3 \rangle = \langle X^2 - 4, Y^2 - 1 \rangle$ .

(2) Algunas diferencias entre ideales y subespacios vectoriales.

- Probar que el ideal  $\langle X \rangle \subset K[X]$  (una variable) es un  $K$ -subespacio vectorial de  $K[X]$  de dimensión infinita.
- Sean  $f_1, f_2 \in K[\mathbf{X}]$  cualesquiera. Probar que existen infinitos pares de polinomios  $g_1, g_2 \in K[\mathbf{X}]$  tales que  $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 0$ .
- Sea  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset K[\mathbf{X}]$  y  $f \in I$ . Probar que existen infinitas maneras de escribir  $f = h_1 f_1 + \dots + h_s f_s$  con  $h_1, \dots, h_s \in K[\mathbf{X}]$ .

(3) Una base  $\{X^\alpha, \alpha \in A \subset \mathbb{N}_0^n\}$  de un ideal monomial  $I$  se llama *minimal* si para todo  $X^\alpha, X^\beta \in A$ ,  $X^\alpha | X^\beta \implies \alpha = \beta$ . Mostrar que todo ideal monomial tiene una base minimal, y que ésta es única.

(4) Probar que el orden en  $K[X, Y]$  definido por  $X^\alpha Y^\beta < X^{\alpha'} Y^{\beta'} \iff \alpha + \pi\beta < \alpha' + \pi\beta'$  es un orden monomial (donde  $\pi = 3.14\dots$ ). Ordenar según este orden todos los monomios de grado  $\leq 4$ .

(5) **Ordenes con pesos**

Sean  $<$  un orden monomial en  $K[\mathbf{X}]$  y  $u := (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Se define en  $K[\mathbf{X}]$  el orden  $<_u$  siguiente :

$$\mathbf{X}^\alpha <_u \mathbf{X}^\beta \iff u \cdot \alpha < u \cdot \beta \quad \text{ó} \quad u \cdot \alpha = u \cdot \beta \quad \text{y} \quad \mathbf{X}^\alpha < \mathbf{X}^\beta$$

(donde  $\cdot$  denota el producto escalar común de vectores).

- Mostrar que  $<_u$  es un orden monomial (que se llama el orden con peso determinado por  $u$  y  $<$ ).
- Determinar el peso  $u$  de manera de obtener como  $<_u$  el orden lexicográfico graduado a partir del orden lexicográfico puro  $<$ .

(6) **Ordenes con pesos independientes**

Sea  $u := (u_1, \dots, u_n)$  un vector de  $\mathbb{R}^n$  tq  $u_1, \dots, u_n$  son positivos y linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ . Se define en  $K[\mathbf{X}]$  el orden  $<_u$  siguiente :

$$\mathbf{X}^\alpha <_u \mathbf{X}^\beta \iff u \cdot \alpha < u \cdot \beta$$

(donde  $\cdot$  denota el producto escalar común de vectores).

- Mostrar que  $<_u$  es un orden monomial (que se llama orden con pesos independientes). ¿ Dónde se usa la independencia lineal de los  $u_i$ ?
- Mostrar que  $u = (1, \sqrt{2})$  y  $u = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$  dan dos ordenes con pesos independientes en  $K[X, Y]$  y  $K[X, Y, Z]$  respectivamente.

(7) Sea  $I = \langle X^6, X^2Y^3, XY^7 \rangle \subset K[X, Y]$ .

- Dibujar en el plano el conjunto de vectores  $(m, n)$  que son exponentes de monomios  $X^mY^n$  que aparecen en los elementos de  $I$ .
- Si se aplica el algoritmo de división de Hironaka, o cualquier algoritmo de división, para  $f \in K[X, Y]$ , independientemente del orden monomial usado, ¿ qué monomios pueden aparecer en el resto ?

(8) Sean  $f = X^7 + X^3Y^2 - Y + 1$  y  $F = (XY^2 - X, X - Y^3)$ .

- Calcular el resto y los cocientes de la división del polinomio  $f$  por el conjunto ordenado  $F$  para el orden lexicográfico  $X > Y$  y para el orden diagonal (“deglex”) con  $X > Y$ .
- Repetir permutando los elementos del conjunto  $F$ . ¿ Qué se observa ?

(9) Sean  $f = X^3 - X^2Y - X^2Z + X$ ,  $f_1 = X^2Y - Z$  y  $f_2 = XY - 1$ .

- Usando el orden diagonal con  $X > Y > Z$  calcular :
  - el resto  $r_1$  de  $f$  por  $(f_1, f_2)$ .
  - el resto  $r_2$  de  $f$  por  $(f_2, f_1)$ .
- ¿ En qué etapa aparece la diferencia entre los dos restos ?
- Sea  $r := r_1 - r_2$ . ¿ Pertenece  $r$  al ideal  $\langle f_1, f_2 \rangle \subset \mathbb{Q}[X, Y, Z]$ ? En caso afirmativo, hallar  $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}[X, Y, Z]$  tales que  $r = a_1f_1 + a_2f_2$ .
- Explicitar (sin hacer cuentas) los cocientes y el resto de la división de Hironaka de  $r$  por  $(f_1, f_2)$ .
- ¿ Resuelve el algoritmo de división de Hironaka el problema de la pertenencia de un polinomio  $f$  al ideal  $\langle f_1, f_2 \rangle$ ?

(10) Sean  $f_1 = X$ ,  $f_2 = Y - X$  y  $f_3 = 1 - YZ$  y  $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ .

- Probar que  $\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } f(x, y, z) = 0 \forall f \in I \}$  es vacío.
- Probar que para cualquier orden monomial que se considere y para cualquier orden de los polinomios  $f_1, f_2, f_3$ , el resto de la división de Hironaka del polinomio 1 por los generadores de  $I$  es no nulo.
- Mostrar que sin embargo  $1 \in I$  exhibiendo  $a_1, a_2, a_3$  tales que  $1 = a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3$ .

(11) Sea  $I = \langle Y - X^2, Z - X^3 \rangle \subset \mathbb{C}[X, Y, Z]$

- Mostrar que todo  $f \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$  puede escribirse en la forma :

$$f = a_1(X, Y, Z)(Y - X^2) + a_2(X, Y, Z)(Z - X^3) + r(X)$$

donde  $r(X) \in \mathbb{C}[X]$  es un polinomio puro en  $X$ .

- ¿ Corresponde esto a efectuar la división de Hironaka para alg’ún orden adecuado ?
- Mostrar que en este caso  $f \in I$  si y solo si  $r = 0$ . ¿ Qué hay de diferente aquí que en el caso de los dos ejercicios anteriores ?