ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Práctica 3 $*$ 1er. Cuatrimestre 2004

Variedades de $\mathbf{K}^n$ y Ideales de $\mathbf{K}[X_1,\dots,X_n]$

1.– Dibujar las siguientes variedades de $\mathbb{R}^2$:
(i) $V(X^2+4Y^2+2X-16Y+1)$
(ii) $V(X^2-Y^2)$
(iii) $V(2X+Y-1, 3X-Y+2)$
(iv) $V(X^2+Y^2-4)\cap V(XY-1)$ y $V(X^2+Y^2-4, XY-1)$.

2.– Dibujar las siguientes variedades de $\mathbb{R}^3$:
(i) $V(X^2+Y^2+Z^2-1)$
(ii) $V(X^2+Y^2-1)$
(iii) $V(XZ^2-XY)$
(iv) $V(X^4-ZX, X^3-YX)$
(v) $V((X-Z)(X^2-Y), Y(X^2-Y), (Z+1)(X^2-Y))$
(vi) $V(XY, XZ)$ y $V(XY, XZ, X+1)$

3.– Probar que $\{(x,x), x\in\mathbb{R}\}$ es una variedad de $\mathbb{R}^2$ y que $\{(x,x), x\in\mathbb{R}, x\neq 1\}$ no lo es.

4.– Probar que el semiplano superior $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\geq 0\}$ no es una variedad de $\mathbb{R}^2$.

5.– Dar un ejemplo para mostrar que una unión infinita de variedades puede no ser una variedad.

6.– Probar que $\mathbb{Z}^n$ no es una variedad de $\mathbb{R}^n$ (ni de $\mathbb{C}^n$).

7.– Sean $V\subset\mathbf{K}^n$ y $W\subset\mathbf{K}^m$ variedades. Probar que

$$V\times W := \{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)\in\mathbf{K}^{n+m} \ \text{ tq } \ (x_1,\dots,x_n)\in V, (y_1,\dots,y_m)\in W\}$$

es una variedad de $\mathbf{K}^{n+m}$.

8.– Probar las siguientes igualdades de ideales en $\mathbb{Q}[X,Y]$:
(i) $< X+Y, X-Y > = < X, Y >$
(ii) $< aX+bY, cX+dY > = < X, Y >$ si $ad-bc\neq 0,\ a,b,c,d\in\mathbb{Q}$
(iii) $< X+XY, Y+XY, X^2, Y^2 > = < X, Y >$
(iv) $< 2X^2+3Y^2-11, X^2-Y^2-3 > = < X^2-4, Y^2-1 >$

9.– Probar que las curvas de $\mathbb{R}^3$ dadas por $\{(t,t^2,t^3), t\in\mathbb{R}\}$ y $\{(t^2,t^3,t^4), t\in\mathbb{R}\}$ respectivamente son variedades de $\mathbb{R}^3$. (Estas son parametrizaciones de las curvas.)

10.– Algunas diferencias entre ideales y subespacios vectoriales.
(i) Probar que el ideal $< X > \subset \mathbf{K}[X]$ es un $\mathbf{K}-$subespacio vectorial de $\mathbf{K}[X]$ de dimensión infinita.
(ii) Sean $f_1, f_2\in\mathbf{K}[X_1,\dots,X_n]$ cualesquiera. Probar que existen infinitos pares de polinomios $g_1, g_2\in\mathbf{K}[X_1,\dots,X_n]$ tales que $g_1f_1+g_2f_2=0$.
(iii) Sea $I = < f_1,\dots,f_s > \subset\mathbf{K}[X_1,\dots,X_n]$ y $f\in I$. Probar que existen infinitas maneras de escribir $f = h_1f_1+\dots+h_sf_s$ con $h_1,\dots,h_s\in\mathbf{K}[X_1,\dots,X_n]$.