ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Práctica 2 $*$ 1er. Cuatrimestre 2002

Polinomios en $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$

$\mathbb{K}$ nota un cuerpo y $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ el anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ en n variables.
Un polinomio $f\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ de grado (total) $\operatorname{gr} f\le d$ se nota :

$$f=\sum_{|\alpha|\le d} c_\alpha X_1^{\alpha_1}\dots X_n^{\alpha_n}=\sum_{|\alpha|\le d} c_\alpha \underline{X}^\alpha$$

donde $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n|$, y $\underline{X}^\alpha:=X_1^{\alpha_1}\dots X_n^{\alpha_n}$.
Un polinomio se dice *homogéneo de grado* t si todos sus monomios tienen grado t.

1.– Sean $f,\,g\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$. Probar que

(i) $f+g=0$ ó $\operatorname{gr}(f+g)\le\max\{\operatorname{gr} f\,,\,\operatorname{gr} g\}$

(ii) $f\,g=0\Longrightarrow f=0$ ó $g=0$. (Es decir $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ es un anillo íntegro, y lo mismo pasa si consideramos polinomios con coeficientes en un anillo A íntegro.)

(iii) $\operatorname{gr}(f\,g)=\operatorname{gr} f+\operatorname{gr} g$. (Sug : descomponer f y g como suma de polinomios homogéneos.)

(iv) ¿ Cuáles son las unidades (es decir los elementos inversibles) del anillo $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$?

2.– **Estructura de espacio vectorial**

(i) Probar que $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ tiene una estructura de $\mathbb{K}-$ espacio vectorial y exhibir una base.

(ii) Un polinomio de grado d en 1 variable tiene a lo sumo $d+1$ coeficientes no nulos, o monomios. ¿ Cuántos coeficientes puede tener un polinomio de grado d en 2 variables ?

(iii) ¿ Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio homogéneo de grado d en n variables ?

(iv) ¿ Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio cualquiera de grado d en n variables ?

(v) ¿ Cuál es la dimensión del $\mathbb{K}-$espacio vectorial $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]_{\le d}=\{\,f\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ tal que $f=0$ ó $\operatorname{gr} f\le d\,\}$.

3.– Probar que para todo $d,\,n\in\mathbb{N}$, $\binom{d+n}{n}\le e\,d^n$ y si $d,\,n\ge 3$, $\binom{d+n}{n}\le d^n$.
Buscar la fórmula de Stirling y deducir que $\binom{d+n}{n}$ se comporta asintóticamente como d^n. En consecuencia, no existe ningún polinomio $p(d,n)$ tal que $\binom{d+n}{n}\le p(d,n),\ \forall\,d,n\in\mathbb{N}$.

4.– **Factorización única**

(i) Si A es un dominio integro, se define el cuerpo cociente K de A como el conjunto de los elementos $\frac{a}{b}$, $b\ne 0$, módulo la relación de equivalencia $\frac{a}{b}\equiv\frac{c}{d}\iff ad=bc$. Mostrar que K tiene efectivamente una estructura de cuerpo, que contiene naturalmente a A como anillo, y describir los cuerpos cocientes de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{Z}[X]$ y $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$.

(ii) Revisar la demostración de que $\mathbb{Z}[X]$ es un Dominio de Factorización Unica (DFU), y mostrar (inductivamente) que $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ es también un DFU (Observar que se está demostrando : “A dominio íntegro es un DFU $\Longrightarrow$ $A[X]$ es un DFU”, y por lo tanto $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$ también es un DFU).

(iii) ¿Cuáles son los polinomios irreducibles de $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$?

5.– Mostrar que X^2+Y^2-1 y $XT-YZ$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[X,Y]$ y $\mathbb{Q}[X,Y,Z,T]$ respectivamente. ¿ Lo son si se cambia $\mathbb{Q}$ por $\mathbb{C}$?

6.– Factorizar $-X^3-Y^3-Z^3+X^2(Y+Z)+Y^2(X+Z)+Z^2(X+Y)-2XYZ$ en $\mathbb{C}[X,Y,Z]$.

7.– Polinomios que son nulos

(i) Probar que si un polinomio $f\in\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ se anula sobre todos los puntos de $\mathbb{Z}^n$ (los puntos a coordenadas enteras), entonces f es el polinomio nulo.

(ii) Probar que pasa lo mismo si f se anula en el conjunto :

$$\{\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{Z}^n\ \text{ tq }\ 0\le x_i\le\operatorname{gr} f,\ 1\le i\le n\,\}$$