$\boxed{\text{ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS}}$

Segundo Cuatrimestre 2008– Práctica 2

Polinomios en $K[X_1, \dots, X_n]$ y $\mathbb{Z}[X]$

En lo que sigue notamos $K[\mathbf{X}] := K[X_1, \dots, X_n]$, donde K es un cuerpo.

(**1**) **Estructura de espacio vectorial**
- (a) Probar que $K[\mathbf{X}]$ tiene una estructura de K-espacio vectorial y exhibir una base.
- (b) Un polinomio de grado d en 1 variable tiene a lo sumo $d+1$ coeficientes no nulos, o monomios. ¿ Cuántos coeficientes puede tener un polinomio de grado d en 2 variables ?
- (c) ¿ Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio homogéneo de grado d en n variables ?
- (d) ¿ Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio cualquiera de grado d en n variables ?
- (e) ¿ Cuál es la dimensión del K-espacio vectorial $K[\mathbf{X}]_{\leq d} = \{ f \in K[\mathbf{X}]$ tal que $f = 0$ ó $\operatorname{gr} f \leq d \}$.

(**2**) Probar que para todo $d, n \in \mathbb{N}$, $\binom{d+n}{n} \leq e\, d^n$ y si $d, n \geq 3$, $\binom{d+n}{n} \leq d^n$.
Buscar la fórmula de Stirling y deducir que $\binom{d+n}{n}$ se comporta asintóticamente como d^n. En consecuencia, no existe ningún polinomio $p(d,n)$ tal que $\binom{d+n}{n} \leq p(d,n),\ \forall\, d,n \in \mathbb{N}$.

(**3**) Mostrar que X^2+Y^2-1 y $XT-YZ$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[X,Y]$ y $\mathbb{Q}[X,Y,Z,T]$ respectivamente. ¿ Lo son si se cambia $\mathbb{Q}$ por $\mathbb{C}$?

(**4**) Factorizar $-X^3 - Y^3 - Z^3 + X^2(Y+Z) + Y^2(X+Z) + Z^2(X+Y) - 2XYZ$ en $\mathbb{C}[X,Y,Z]$.

(**5**) **Especialización**
- (a) Probar que para cada $a \in K$, la aplicación de especialización o evaluación
$$K[X_1, \dots, X_n] \to K[X_1, \dots, X_{n-1}], \quad f(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_{n-1}, a)$$
es un morfismo de anillos con unidad. (Un morfismo de anillos con unidad es una aplicacón φ que satisface que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g), \varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$.)
- (b) Idem especializando cualquier número de variables.

(**6**) Polinomios que son nulos
- (a) Probar que si un polinomio $f \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ se anula sobre todos los puntos de $\mathbb{Z}^n$ (los puntos con coordenadas enteras), entonces f es el polinomio nulo.
- (b) Probar que pasa lo mismo si f se anula en el conjunto :
$$\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \ \text{ tq } \ 0 \leq x_i \leq \operatorname{gr} f,\ 1 \leq i \leq n \}$$