

ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

PRIMER CUATRIMESTRE 2006– PRÁCTICA 2

Polinomios en $K[X_1, \dots, X_n]$ y $\mathbb{Z}[X]$

K nota un cuerpo y $K[X_1, \dots, X_n]$ el anillo de polinomios con coeficientes en K en n variables. Un polinomio $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ de grado (total) $\text{gr } f \leq d$ se nota :

$$f = \sum_{|\alpha| \leq d} c_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha| \leq d} c_\alpha \mathbf{X}^\alpha$$

donde $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, y $\mathbf{X}^\alpha := X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$.

Un polinomio se dice *homogéneo de grado t* si todos sus monomios tienen grado t , y *homogéneo* si es homogéneo para algún grado t . Todo polinomio no nulo se puede escribir como suma de sus *componentes homogéneas*.

En lo que sigue notamos $K[\mathbf{X}] := K[X_1, \dots, X_n]$.

(1) Estructura de espacio vectorial

- Probar que $K[\mathbf{X}]$ tiene una estructura de K -espacio vectorial y exhibir una base.
- Un polinomio de grado d en 1 variable tiene a lo sumo $d + 1$ coeficientes no nulos, o monomios. ¿ Cuántos coeficientes puede tener un polinomio de grado d en 2 variables ?
- ¿ Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio homogéneo de grado d en n variables ?
- ¿ Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio cualquiera de grado d en n variables ?
- ¿Cuál es la dimensión del K -espacio vectorial $K[\mathbf{X}]_{\leq d} = \{f \in K[\mathbf{X}] \text{ tal que } \text{gr } f \leq d\}$.

(2) Probar que para todo $d, n \in \mathbb{N}$, $\binom{d+n}{n} \leq e d^n$ y si $d, n \geq 3$, $\binom{d+n}{n} \leq d^n$.

Buscar la fórmula de Stirling y deducir que $\binom{d+n}{n}$ se comporta asintóticamente como d^n . En consecuencia, no existe ningún polinomio $p(d, n)$ tal que $\binom{d+n}{n} \leq p(d, n)$, $\forall d, n \in \mathbb{N}$.

(3) Estructura de anillo conmutativo e íntegro

- Probar que $K[\mathbf{X}]$ es un anillo conmutativo.
- Probar que es íntegro, probando por ejemplo primero que el producto de polinomios homogéneos no nulos es no nulo.
- Deducir que si f, g son no nulos, $\text{gr}(fg) = \text{gr } f + \text{gr } g$.
- Caracterizar las unidades $\mathcal{U}(K[\mathbf{X}])$ de $K[\mathbf{X}]$ (o sea los elementos inversibles).

(4) Probar que $K[\mathbf{X}]$ no es un dominio principal para $n \geq 2$. Idem para $\mathbb{Z}[X]$. Deducir que por lo tanto no son dominios euclideos.

(5) Probar, o recordar, que $\mathbb{Z}[X]$ y $K[\mathbf{X}]$ son dominios de factorización única.

(6) Mostrar que $X^2 + Y^2 - 1$ y $XT - YZ$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[X, Y]$ y $\mathbb{Q}[X, Y, Z, T]$ respectivamente. ¿ Lo son si se cambia \mathbb{Q} por \mathbb{C} ?

(7) Factorizar $-X^3 - Y^3 - Z^3 + X^2(Y + Z) + Y^2(X + Z) + Z^2(X + Y) - 2XYZ$ en $\mathbb{C}[X, Y, Z]$.

(8) **Especialización**

(a) Probar que para cada $a \in K$, la aplicación de especialización o evaluación

$$K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow K[X_1, \dots, X_{n-1}], \quad f(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_{n-1}, a)$$

es un morfismo de anillos con unidad. (Un morfismo de anillos con unidad es una aplicación φ que satisface que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$, $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$.)

(b) Idem especializando cualquier número de variables.

(9) Polinomios que son nulos

(a) Probar que si un polinomio $f \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ se anula sobre todos los puntos de \mathbb{Z}^n (los puntos con coordenadas enteras), entonces f es el polinomio nulo.

(b) Probar que pasa lo mismo si f se anula en el conjunto :

$$\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \text{ tq } 0 \leq x_i \leq \text{gr } f, 1 \leq i \leq n \}$$