

ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Práctica 2 * 1er. Cuatrimestre 2004

Polinomios en $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$

\mathbf{K} nota un cuerpo y $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$ el anillo de polinomios con coeficientes en \mathbf{K} en n variables. Un polinomio $f \in \mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$ de grado (total) $\text{gr } f \leq d$ se nota :

$$f = \sum_{|\alpha| \leq d} c_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha| \leq d} c_\alpha \underline{X}^\alpha$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, y $\underline{X}^\alpha := X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$.

Un polinomio se dice *homogéneo de grado t* si todos sus monomios tienen grado t .

1.- Estructura de espacio vectorial

- (i) Probar que $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$ tiene una estructura de \mathbf{K} -espacio vectorial y exhibir una base.
- (ii) Un polinomio de grado d en 1 variable tiene a lo sumo $d + 1$ coeficientes no nulos, o monomios.
¿ Cuántos coeficientes puede tener un polinomio de grado d en 2 variables ?
- (iii) ¿ Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio homogéneo de grado d en n variables ?
- (iv) ¿ Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio cualquiera de grado d en n variables ?
- (v) ¿Cuál es la dimensión del \mathbf{K} -espacio vectorial $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]_{\leq d} = \{f \in \mathbf{K}[X_1, \dots, X_n] \text{ tal que } f = 0 \text{ ó } \text{gr } f \leq d\}$.

2.- Probar que para todo $d, n \in \mathbb{N}$, $\binom{d+n}{n} \leq e d^n$ y si $d, n \geq 3$, $\binom{d+n}{n} \leq d^n$.

Buscar la fórmula de Stirling y deducir que $\binom{d+n}{n}$ se comporta asintóticamente como d^n . En consecuencia, no existe ningún polinomio $p(d, n)$ tal que $\binom{d+n}{n} \leq p(d, n)$, $\forall d, n \in \mathbb{N}$.

3.- Mostrar que $X^2 + Y^2 - 1$ y $XT - YZ$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[X, Y]$ y $\mathbb{Q}[X, Y, Z, T]$ respectivamente.
¿ Lo son si se cambia \mathbb{Q} por \mathbb{C} ?

4.- Factorizar $-X^3 - Y^3 - Z^3 + X^2(Y + Z) + Y^2(X + Z) + Z^2(X + Y) - 2XYZ$ en $\mathbb{C}[X, Y, Z]$.

5.- Polinomios que son nulos

- (i) Probar que si un polinomio $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ se anula sobre todos los puntos de \mathbb{Z}^n (los puntos a coordenadas enteras), entonces f es el polinomio nulo.
- (ii) Probar que pasa lo mismo si f se anula en el conjunto :

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \text{ tq } 0 \leq x_i \leq \text{gr } f, 1 \leq i \leq n\}$$