

ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Práctica 1 * 1er. Cuatrimestre 2002

Raíces y Factorización en $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ y $\mathbb{Z}[X]$

1.- Sea $f = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, con $a_n \neq 0$, y sea $M := 1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right|$.

(i) Probar que si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz de f , entonces $|\alpha| < M$.

(ii) Probar que si $f \in \mathbb{R}[X]$, entonces

$$f(M) > 0 \iff a_n > 0 \text{ y } f(-M) > 0 \iff (-1)^n a_n > 0.$$

2.- Sea $f \in \mathbb{K}[X]$, con $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ ó \mathbb{Q} . Probar que el polinomio $\frac{f}{\text{mcd}(f; f')} \in \mathbb{K}[X]$ tiene las mismas raíces que f en \mathbb{C} , pero todas simples (se lo suele llamar el *polinomio libre de cuadrados asociado a f*).

Aplicaciones del Teorema de Rolle

3.- Probar que si $f \in \mathbb{R}[X]$ tiene todas sus raíces reales, entonces f' también. ¿Es cierta la recíproca?

4.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n = \sum_{i=0}^n \frac{X^i}{i!}$.

(i) Verificar que f_2 no tiene raíces reales, y que f_1 y f_3 tienen una única raíz real, que es negativa.

(ii) Calcular f'_n . ¿Tiene f_n raíces múltiples?

(iii) Probar que si n es par, f_n no tiene raíces reales, y que si n es impar, f_n tiene exactamente una raíz real (que es negativa).

Aplicaciones del Teorema de Descartes

Si $f = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$, notamos:

- $Z_+(f)$:= cantidad de raíces reales estrictamente positivas de f (contadas con multiplicidad).
- $Z_-(f)$:= cantidad de raíces reales estrictamente negativas de f (contadas con multiplicidad).
- $V(f) = V(a_n, \dots, a_0)$:= número de cambios de signo en la sucesión ordenada (a_n, \dots, a_0) , saltando los ceros.

5.- ¿Cuántas raíces reales tienen los polinomios $X^4 + X^2 - X - 3$ y $X^3 - 7X + 7$?

6.- Sea $f \in \mathbb{R}[X]$. Probar que $V(f) = 0 \implies Z_+(f) = 0$ y $V(f) = 1 \implies Z_+(f) = 1$, y dar un ejemplo de un polinomio de grado 3 tal que $Z_+(f) = 1$ pero $V(f) > 1$.

7.- Sea $f \in \mathbb{R}[X]$ de grado $n \geq 1$.

(i) Probar que $V(f) + V(f(-X)) \leq n$.

(ii) Probar que si f tiene todas sus raíces reales, entonces $Z_+(f) = V(f)$.

8.- (Algebra Lineal)

(i) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica. Dar un criterio "rápido" para calcular el número de autovalores positivos de A (contados con multiplicidad) y la signatura de A .

(ii) Clasificar rápidamente la cuádriga:

$$q(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1^2 + X_2^2 + 2X_3^2 + 4X_1X_4 + 2X_2X_4 + 2X_3X_4.$$

9.- Sea $f = (X - \alpha)(X + 1)^{n-1}$, con $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Probar que $V(f) = 1$.

10.- Sea $f \in \mathbb{R}[X]$ tales que todas sus raíces complejas (también las reales) tienen parte real negativa. Probar que $V(f) = 0$.

- 11.- Sea $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinomio con exactamente k monomios no nulos. Observar que $Z_+(f) \leq k - 1$, y deducir una cota para el número total de raíces reales no nulas de f .
- 12.- Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio con exactamente k monomios no nulos. Dar una cota para el número total de raíces reales no nulas de f .

Aplicaciones del Teorema de Sturm

- 13.- Calcular el número de raíces reales de los polinomios $X^3 + 3X^2 - 1$ y $X^5 + 2X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 7X - 3$ (se puede usar Maple).
- 14.- Volver a probar, aplicando Sturm, que $X^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ tiene dos raíces reales distintas si y sólo si $b^2 - 4c > 0$.
- 15.- Según los valores de $p, q \in \mathbb{R}$, discutir la cantidad de raíces reales de $X^3 + pX + q$.
- 16.- Según el valor del parámetro $c \in \mathbb{R}$, discutir el número de raíces reales de los polinomios $X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + c$ y $X^4 - 3X^2 + c$.
- 17.- Determinar qué hacen las siguientes funciones de Maple :
`sturmseq` , `sturm` , `realroot` , `solve` , `fsolve`.
- 18.- Retomar $X^4 - 3X^2 + c$. Usando distintas funciones de Maple, determinar todas las raíces reales y complejas de este polinomio. Comparar.

Factorización en $\mathbb{Z}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$

- 19.- Sea p un número primo, y $\Phi : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}_p[X]$ definida por :

$$\Phi(a_n X^n + \dots + a_0) = \overline{a_n} X^n + \dots + \overline{a_0}$$

(donde $\overline{a_i}$ nota tomar resto módulo p).

(i) Probar que $\Phi(f) + \Phi(g) \equiv \Phi(f + g) \pmod{p}$

$$\text{y } \Phi(f)\Phi(g) \equiv \Phi(fg) \pmod{p}$$

(ii) Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $\Phi(f) \neq 0$ y $\text{gr } \Phi(f) = \text{gr } f$. Probar que si $\Phi(f)$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p[X]$, entonces f no se factoriza en $\mathbb{Z}[X]$ en la forma $f = gh$ con g, h de grado ≥ 1 .

- 20.- Criterio de Irreducibilidad de Eisenstein.

Sea $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ tal que existe un primo p que verifica que $p \mid a_i$ ($0 \leq i \leq n - 1$) y $p^2 \nmid a_0$. Probar que entonces f es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$ y en $\mathbb{Q}[X]$.

- 21.- Sea p un primo. Probar que $\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} X^{p-1-k}$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$, y deducir que $f = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1$ también lo es (se puede hacer un cambio de variable en X).

El polinomio f se llama el *polinomio ciclotómico de orden p* , y sus raíces son las p -ésimas raíces primitivas de la unidad.

¿ Será cierto lo mismo si p no es primo ?

- 22.- Mostrar que $X^4 - X^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ y factorizar $X^5 + X^4 + X^2 + X + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$.