ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Primer Cuatrimestre 2006– Práctica 1

Raíces y Factorización en $\mathbb{R}[X], \mathbb{Q}[X]$ y $\mathbb{Z}[X]$

(**1**) Sea $f = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, con $a_n \neq 0$, y sea $M := 1 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \cdots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|$.
(a) Probar que si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz de f, entonces $|\alpha| < M$.
(b) Probar que si $f \in \mathbb{R}[X]$, entonces
$$f(M) > 0 \iff a_n > 0 \text{ y } f(-M) > 0 \iff (-1)^n a_n > 0.$$

(**2**) Sea $f \in K[X]$, con $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{Q}$. Probar que el polinomio $\frac{f}{\mathrm{mcd}(f;f')} \in K[X]$ tiene las mismas raíces que f en $\mathbb{C}$, pero todas simples (se lo suele llamar el *polinomio libre de cuadrados asociado a* f).

Aplicaciones del Teorema de Rolle

(**3**) Probar que si $f \in \mathbb{R}[X]$ tiene todas sus raíces reales, entonces f' también. ¿ Es cierta la recíproca ?

(**4**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i\,!}$.
(a) Verificar que f_2 no tiene raíces reales, y que f_1 y f_3 tienen una única raíz real, que es negativa.
(b) Calcular f_n'. ¿ Tiene f_n raíces múltiples ?
(c) Probar que si n es par, f_n no tiene raíces reales, y que si n es impar, f_n tiene exactamente una raíz real (que es negativa).

Aplicaciones de la Regla de los signos de Descartes

Si $f = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$, notamos :

- $Z_+(f)$:= cantidad de raíces reales estrictamente positivas de f (contadas con multiplicidad).
- $Z_-(f)$:= cantidad de raíces reales estrictamente negativas de f (contadas con multiplicidad).
- $V(f) = V(a_n, \ldots, a_0) :=$ número de cambios de signo en la sucesión ordenada $(a_n, \ldots, a_0)$, salteando los ceros.

(**5**) ¿ Cuántas raíces reales tienen los polinomios $X^4 + X^2 - X - 3$ y $X^3 - 7X + 7$?

(**6**) Sea $f \in \mathbb{R}[X]$. Probar que $V(f) = 0 \Longrightarrow Z_+(f) = 0$ y $V(f) = 1 \Longrightarrow Z_+(f) = 1$, y dar un ejemplo de un polinomio de grado 3 tal que $Z_+(f) = 1$ pero $V(f) > 1$.

(**7**) Sea $f \in \mathbb{R}[X]$ de grado $n \geq 1$.
(a) Probar que $V(f) + V(f(-X)) \leq n$.
(b) Probar que si f tiene todas sus raíces reales, entonces $Z_+(f) = V(f)$.

(**8**) (Algebra Lineal)
(a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Dar un criterio “rápido” para calcular el número de autovalores positivos de A (contados con multiplicidad) y la signatura de A.
(b) Clasificar rapidamente la cuádrica :
$$q(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1^2 + X_2^2 + 2X_3^2 + 4X_1X_4 + 2X^2X^4 + 2X^3X^4.$$

(9) Sea $f = (X - \alpha)(X+1)^{n-1}$, con $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Probar que $V(f) = 1$.

(10) Sea $f \in \mathbb{R}[X]$ tales que todas sus raíces complejas (también las reales) tienen parte real negativa. Probar que $V(f) = 0$.

(11) Sea $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinomio con exactamente k monomios no nulos. Observar que $Z_+(f) \leq k-1$, y deducir una cota para el número total de raíces reales no nulas de f.

(12) Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio con exactamente k monomios no nulos. Dar una cota para el número total de raíces reales no nulas de f.

Aplicaciones del Teorema de Sturm

(13) Calcular el número de raíces reales de los polinomios X^3+3X^2-1 y $X^5+2X^4-5X^3+8X^2-7X-3$ (se puede usar Maple).

(14) Volver a probar, aplicando Sturm, que $X^2+bX+c \in \mathbb{R}[X]$ tiene dos raíces reales distintas si y sólo si $b^2-4c > 0$.

(15) Según los valores de p, $q \in \mathbb{R}$, discutir la cantidad de raíces reales de X^3+pX+q.

(16) Según el valor del parámetro $c \in \mathbb{R}$, discutir el número de raíces reales de los polinomios $X^4+4X^3+6X^2+4X+c$ y X^4-3X^2+c.

(17) (Maple) Determinar qué hacen las siguientes funciones de Maple :
sturmseq , sturm , realroot , solve , fsolve.

(18) (Maple) Retomar X^4-3X^2+c. Usando distintas funciones de Maple, determinar todas las raíces reales y complejas de este polinomio. Comparar.

Factorización en $\mathbb{Z}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$

(19) Sea p un número primo, y $\Phi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[X]$ definida por :

$$\Phi(a_nX^n + \cdots + a_0) = \overline{a_n}X^n + \cdots + \overline{a_0}$$

(donde $\overline{a_i}$ nota tomar resto módulo p).

(a) Probar que $\Phi(f) + \Phi(g) \equiv \Phi(f+g) \bmod p$
y $\Phi(f)\,\Phi(g) \equiv \Phi(f\,g) \bmod p$

(b) Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $\Phi(f) \neq 0$ y $\operatorname{gr}\Phi(f) = \operatorname{gr} f$. Probar que si $\Phi(f)$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p[X]$, entonces f no se factoriza en $\mathbb{Z}[X]$ en la forma $f = g\,h$ con g, h de grado ≥ 1.

(20) Criterio de Irreducibilidad de Eisenstein.
Sea $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ tal que existe un primo p que verifica que $p \mid a_i,\ 0 \leq i \leq n-1$, y $p^2 \nmid a_0$. Probar que entonces f es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$ y en $\mathbb{Q}[X]$.

(21) Sea p un primo. Probar que $\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} X^{p-1-k}$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$, y deducir que $f = X^{p-1}+X^{p-2}+\cdots+X+1$ también lo es (se puede hacer un cambio de variable en X).
El polinomio f se llama el *polinomio ciclotómico de orden* p, y sus raíces son las p-ésimas raíces primitivas de la unidad.
¿ Será cierto lo mismo si p no es primo ?

(22) Mostrar que X^4-X^2+1 es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ y factorizar $X^5+X^4+X^2+X+2$ en $\mathbb{Q}[X]$.