MAESTRIA EN ESTADISTICA – ALGEBRA LINEAL

Segundo Parcial - 10/12/07

(**1**) Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $b \in \mathbb{R}^3$ dados por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular $x \in \mathbb{R}^3$ que satisface simultaneamente $\|x\|$ mínimo y $\|Ax - b\|$ mínimo, y para el x hallado calcular $\|x\|$, Ax y $\|Ax - b\|$.

(**2**) Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 - a \\ 0 & a & a - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea diagonalizable. Justificar la respuesta en cada caso.

(**3**) Una empresa que alquila camionetas para mudanzas posee N camionetas distribuidas en Buenos Aires, Córdoba y Rosario. Cada mes la mitad de las que están en Buenos Aires y en Córdoba se trasladan a Rosario. La otra mitad se queda en su ciudad, y las camionetas de Rosario se dividen igualmente entre Córdoba y Buenos Aires. Llamemos x_k al número de camionetas en Buenos Aires, y_k al número de camionetas en Córdoba y z_k al número de camionetas en Rosario al cabo del k-ésimo mes.

- Determinar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que describa el proceso, o sea tal que

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}.$$

- Hallar como se terminan distribuyendo las N camionetas en las distintas ciudades al cabo de una cantidad suficiente (o digamos ilimitada) de meses.

(**4**) Hallar el número de condición de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y determinar b y Δb tales que las soluciones x y Δx de $Ax = b$ y $A\Delta x = \Delta b$ respectivamente satisfacen

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \mathrm{cond}\,(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

(**5**) Una forma distinta de calcular el determinante de una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con -1 en todos lados salvo en la diagonal, donde los coeficientes son todos el mismo número, pongamos por ejemplo todos iguales a n:

- Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz con todos coeficientes iguales a 1. Probar que el vector $(1, ..., 1)$ es un autovector de A. ¿A qué autovalor corresponde?
- Sin necesidad de "calcular" el polinomio característico $\chi_A(\lambda)$ de A, determinarlo (Sug: determinar el rango de A).
- Relacionar $\mathrm{Det}(B)$ (la matriz del enunciado) con $\chi_A(n+1)$, y calcular $\mathrm{Det}(B)$.