MAESTRIA EN ESTADISTICA – ALGEBRA LINEAL

2007– Práctica 6

(**1**) Encontrar los autovalores y autovectores correspondientes de las matrices A siguientes. En cada caso verificar que la suma de los autovalores es la traza de A, es decir, la suma de los elementos de la diagonal de A, y que el producto de los autovalores es el determinante de A. En los casos en que A es diagonalizable, verificar que, si U es la matriz cuyas columnas forman una base de autovectores, entonces $U^{-1}AU = D$ donde D es una matriz diagonal con los autovalores en la diagonal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Rtas dadas en la forma (autovalor; autovector):

$(0; (-2, 1)), (5; (1, 2)); (0; (1, -2, 7)), (4; (3, 2, 1)), (-1; (-1, 1, -2)); (1; (0, 0, 1)), (i; (1, i, 0)), (-i; (i, 1, 0));$

$(0; (1, -1, 1)), (5; (3, 2, 8)); (-1; (-1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)), (5; (1, 1, 1))$

y $(1; (1, 1, 1, 1)), (-1; (-1, 1, -1, 1)), (i, (-1, -i, 1, i)), (-i, (-1, i, 1, -i))$

(**2**) Probar que: $\lambda = 0$ es autovalor de $A \Leftrightarrow A$ no es inversible.

(**3**) Demostrar que los autovalores de una matriz triangular superior (o inferior) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son a_{ii}.

(**4**) Si A tiene autovalor λ, demostrar que:

- λ es autovalor de A^t
- la matriz kA tiene autovalor $k\lambda$
- la matriz A^r tiene autovalor λ^r, $r \in \mathbb{N}$
- si A es inversible, $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}
- $A + kI$ tiene autovalor $\lambda + k$
- $\lambda^2 + \lambda$ es autovalor de $A^2 + A$.

(**5**) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Probar que $A^n \to 0$ (es decir:$(A^n)_{ij} \to 0$, $1 \le i, j \le 3$).

(**6**) Supongamos que en cierta especie hay una epidemia en la que al cabo de cada mes se enfermó la mitad de los que están sanos a principios de mes y murió la cuarta parte de los que estaban enfermos.

- Llamemos x_k al número de muertos al cabo del k- ésimo mes, y_k al número de enfermos al cabo del k-ésimo mes y z_k al número de sanos al cabo del k-ésimo mes. Encontrar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que describa el proceso, o sea tal que
$$A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix}.$$
- Si la distribución original (x_0, y_0, z_0) al principio del primer mes (o termino del mes 0) es $(0, 0, 10000)$, o sea de ningún enfermo y 10000 sanos, calcular el número de enfermos al cabo del k-ésimo mes.
- Probar que cualquiera sea la distribución original (x_0, y_0, z_0), (x_k, y_k, z_k) tiende a un múltiplo de $(1, 0, 0)$ (si puede, encuéntrelo en función de (x_0, y_0, z_0)), es decir mueren todos (lo cual es obvio ya que se enferman o se mueren pero ni se curan ni nacen nuevos individuos en el modelo).

(**7**) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar 2 matrices distintas U y $V \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ inversibles tales que $D = U^{-1}AU$ y $D' = V^{-1}AV$ sean diagonales. ¿Vale $D = D'$?

(**8**) Sea $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que para toda fila A_i, la suma de sus componentes es igual a 1. Probar que 1 es autovalor de A y encontrar un autovector correspondiente.

(**9**) Dar un ejemplo para mostrar que los autovalores pueden alterarse cuando se sustrae de una fila un múltiplo de otra.

(**10**)
- Diagonalizar la matriz $\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
- Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz de probabilidad (es decir la suma de los coeficientes de cada columna da 1) y $\lambda_1 \geq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son sus autovalores, probar que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 \leq 1$.