MAESTRIA EN ESTADISTICA – ALGEBRA LINEAL

2007– Práctica 4

(**1**) Hallar, usando triangulación,

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(**2**) Sea $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ con $\text{Det}(A) = 8$. Calcular $\text{Det}(3A)$ y $\text{Det}(-A)$.

(**3**) Si A y A^{-1} tienen sus coeficientes enteros, ¿por qué ambos determinantes deben dar 1 ó -1 ?

(**4**) Demostrar, sin calcular, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} sen^2 a & 1 & cos^2 a \\ sen^2 b & 1 & cos^2 b \\ sen^2 c & 1 & cos^2 c \end{pmatrix}$$

(**5**) Calcular el rango de las matrices del ejercicio anterior.

(**6**) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A es inversible y en esos casos hallar la inversa.

(**7**) Sea $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Probar que A es una matriz ortogonal (interpretar geométricamente) y calcular $\text{Det}(A)$.

(**8**) ¿Cuánto vale el determinante de una matriz ortogonal? ¿Cuál es el rango?

(**9**) Hallar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonal con $\text{Det}(A) = -1$.

(10) *Regla de Cramer en* 2×2*:*

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $\mathrm{Det}(A) = ad - bc \neq 0$. Probar que la solución del sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

es (x_1, x_2) con

$$x_1 = \frac{\begin{pmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{pmatrix}}{\mathrm{Det}(A)} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{\begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{pmatrix}}{\mathrm{Det}(A)}.$$

(11) Demostrar que las raíces de la ecuación $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} x-a & b \\ b & x-c \end{pmatrix} = 0$ son reales.

(12) Encontrar un ejemplo de 4×4 en el que

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \mathrm{Det}(A).\mathrm{Det}(D) - \mathrm{Det}(B).\mathrm{Det}(C)$$

donde A, B, C, D son matrices de 2×2.

(13) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

Probar, usando cofactores, que A^{-1} también es triangular superior.

(14) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$.

¿Para qué valores de $x_1, \ldots, x_n$ el rango de A es, respectivamente, $0, 1, 2, 3$?

(15)

- Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  ¿Cuánto vale el determinante de A?

- Si $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}^3$ no nulos, ¿cuál es el rango de A?