MAESTRIA EN ESTADISTICA – ALGEBRA LINEAL

2007– Práctica 3

(1)
- Sean $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, -1, 1)$. Hallar $w \neq 0$ tal que $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$.
- Sea $u = (1, -1)$. Hallar v tal que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle u, v\rangle = 0$ y
- Sea $u = (-2, 1)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle u, v\rangle = 0$.
- Sea $u = (0, 0, 2)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle v, u\rangle = 0$.

(2) Decidir si son o no ciertas las siguientes proposiciones en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$:
- Si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$ y $u \neq 0$, entonces $v = w$.
- Si $\langle u, v\rangle = 0$, $\forall v$, entonces $u = 0$.

(3)
- Sean $u = (1, 2)$ y $v = (-1, 1)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\langle u, w\rangle = 1$ y $\langle v, w\rangle = 3$. Hallar w.
- Sean $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ y $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Probar que, $\forall\ w \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $w = \langle w, u\rangle u + \langle w, v\rangle v$.

(4)
- Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1); (0, 1, -1); (1, 1, 1)\}$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.
- Calcular las coordenadas de $v = (1, 1, 1)$ y de $w = (1, 0, 0)$ en $\mathcal{B}'$. (Sug: recuerde $\langle\ ,\ \rangle$.)
- Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base del plano

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$$

(5) Sea la recta $S = \langle(3, 4)\rangle$ en $\mathbb{R}^2$ y p la proyección ortogonal sobre S. Hallar:
- $p(-4, 3)$, $p(3, 4)$ y $p(2, 1)$
- Una fórmula para $p(x_1, x_2)$
- $[p]_{\mathcal{E}}$
- $S^{\perp}$
- La distancia de los puntos $(-4, 3), (3, 4)$ y $(2, 1)$ a la recta S
- Una base ortonormal $\mathcal{B}$ tal que $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6) Sean $S = \{(x_1, x_2, x_3)/\, 2x_1 - x_2 = 0\}$ y p la proyección ortogonal sobre S. Hallar:
- Una base $\mathcal{B}$ ortonormal del subespacio S.
- $M \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ la matriz que tiene por columnas a los vectores de $\mathcal{B}$.
- Verificar que $[p]_{\mathcal{E}} = M.M^t$.

(7) Hallar una base ortonormal y el complemento ortogonal para cada uno de los subespacios que siguen:
- $S_1 = \{\lambda(1, 2, 1);\ \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2/\, x_1 + 2x_2 = 0\}$
- $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^3/\, 3x_1 + x_2 = 0\}$

(8) Sea $\mathcal{B}'$ la base hallada en el ejercicio **4**. Calcular $Q = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, siendo $\mathcal{B}$ otra base ortonormal. Verificar que $QQ^t = Id$.

(9) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Pruebe que $\mathrm{Nu}(A)$ es ortogonal a $\mathrm{Im}(A)$.

(**10**) Encontrar una tercera columna para que la matriz Q sea ortogonal siendo $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \end{pmatrix}$.

¿Cuántas soluciones hay? Interprete geométricamente.

(**11**) Hallar la recta $y = ax+b$ que ajusta por cuadrados mínimos la tabla y calcular el error $\sum(y_k-(ax_k+b))^2$.

$$\begin{pmatrix} x_k & 0 & 1 & -1 & 2 \\ y_k & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(**12**) Mismo ejercicio con la siguiente tabla:

$$\begin{pmatrix} x_k & 6 & 4 & 8 & 5 & 3.5 \\ y_k & 6.5 & 4.5 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Estimar el valor de y correspondiente a $x = 7.5$.

(**13**) Ajustar una parábola por el método de los cuadrados mínimos de acuerdo a la siguiente tabla:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2.1 & 3.3 & 3.9 & 4.4 & 4.6 & 4.8 & 4.6 & 4.2 & 3.4 \end{pmatrix}$$

Rta: $y = 0.9433 + 1.3507x - 0.1189x^2$.