MAESTRIA EN ESTADISTICA – ALGEBRA LINEAL

2007– Práctica 2

(**1**) (a) Probar que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+2y+3z=0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
(b) Probar que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+2y+3z=0;\ -x+y-z=0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
(c) Convencerse de que para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, se tiene que el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax^t = 0\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(**2**) (a) Probar que los siguientes son subespacios de $\mathbb{R}^3$:
- $S_1 = \{\lambda\,(1,0,-1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $S_2 = \{(\lambda+\mu, \lambda-\mu, 3\lambda+2\mu),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$
- $S_3 = \{\lambda(1,1,3)+\mu(1,-1,2),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$

(b) Probar que $S_1 = \{\lambda(-1,0,1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, y que $S_2 = S_3 = \{\lambda(2,0,5)+\mu(1,-1,2),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$.

(**3**) Describir geométricamente los subespacios S y decidir en cada caso si el vector $w \in S$.
(a) $S = \langle(1,2,3)\rangle, \quad w = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5})$
(b) $S = \langle(1,2,3),,(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})\rangle, \quad w = (-5,-10,-15)$

(**4**) Hallar tres vectores de $\mathbb{R}^3$ que sean linealmente dependientes y tales que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.

(**5**) Decidir si las siguientes sucesiones de vectores son bases de $\mathbb{R}^3$
(a) $\{(1,0,1),\ (1,2,0)\}$
(b) $\{(1,0,1),\ (1,2,0),\ (1,0,1)\}$
(c) $\{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\}$
(d) $\{(\pi,0,0),\ (0,\sqrt{2},0),\ (0,0,\sqrt[3]{3})$
(e) $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (1,2,3)\}$

(**6**) Sean en R^2 las siguientes bases:

$$\mathcal{E} = \{(1,0),\ (0,1)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$$

Hallar las coordenadas en la base canónica del vector que en la base $\mathcal{B}$ tiene coordenadas $(1,0)$ (resp. $(0,1)$).

(**7**) Consideremos las mismas bases que en el ejercicio anterior. Hallar las coordenadas con respecto a las bases dadas de los vectores $(1,2)$ y (x_1,x_2), $\forall\ x_1,x_2 \in \mathbb{R}$.

(**8**) Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{(0,1,0),\ (0,1,1),\ (1,0,1)\}.$$

Calcular la matriz de cambio de base $C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$.

(**9**) Hallar bases y dimensión de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:
(a) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1+2x_2-x_3=0\}$
(b) $T = \langle(1,1,1),\ (0,-2,0)\rangle$

(c) $S \cap T$

(d) $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\}$

(e) $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\}.$

(**10**) Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B}_1 = \{(3,5),\,(1,2)\} \quad , \quad \mathcal{B}_2 = \{(1,1),\,(0,1)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_3 = \{(-2,1),\,(7,-4)\}.$$

Hallar $C = C_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}\, C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ y verificar que $C = C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}$.

(**11**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f((x_1,x_2)) = (2x_1 - x_2, -8x_1 + 4x_2)$.

- ¿Cuáles de los siguientes vectores están en $\mathrm{Nu}(f)$?

$$(5,10), \quad (3,2), \quad (1,1), \quad (0,0)$$

- ¿Cuáles de los siguientes vectores están en $\mathrm{Im}(f)$?

$$(1,-4), \quad (-3,12), \quad (5,0), \quad (0,0)$$

- Mostrar 4 vectores que pertenezcan a $\mathrm{Im}(f)$.
- Mostrar 4 vectores que pertenezcan a $\mathrm{Nu}(f)$.

(**12**) Calcular $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ de las siguientes transformaciones lineales

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (x_1, 0)$
(b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1, x_2, 0)$
(c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (x_1, x_2)$
(d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (rx_1, rx_2)$ para $r = 1, -1, 2$ y $\frac{1}{3}$
(e) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(x_1 + x_2))$
(f) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (x_1, -x_2)$

Interprete geométricamente cada una de las transformaciones lineales anteriores.

(**13**) Calcular bases de $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ para las f definidas respectivamente por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Decidir en cada caso si f es mono, epi y/o isomorfismo.

(**14**) Calcular la dimensión del subespacio de soluciones de los sistemas $Ax^t = 0$ para las siguientes matrices A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(**15**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la t.l. definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular $B = A^{-1}$.

Definamos la t.l. $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ donde $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
Probar que f y g son inversas una de la otra.

(**16**) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (-y + z, y, z)$.

- Hallar $\{v_1, v_2\}$ base de $\mathrm{Im}(f)$ y $\{v_3\}$ base de $\mathrm{Nu}(f)$.
- Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Verificar que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y hallar $M = [f]_{\mathcal{B}}$.

(**17**) Sea $\mathcal{B} = \{(1, 2); (2, 3)\}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Hallar bases de $\mathrm{Nu}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.
- Hallar $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\big(f(x)\big)^t = Ax^t, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^2$.