

1. Sea  $u$  una solución regular de  $u_t - \Delta u = 0$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ .
  - (a) Mostrar que  $u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$  también resuelve la ecuación del calor para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  - (b) Mostrar que  $v(x, t) = x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$  también resuelve la ecuación del calor.
2. Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre  $u$  necesarias para su validez.
  - (a) *Combinaciones lineales*: Si  $u_1$  y  $u_2$  son funciones calóricas, entonces  $\alpha u_1 + \beta u_2$  es calórica.
  - (b) *Traslaciones*: Si  $u(x, t)$  es calórica, entonces  $u(x - \xi, t - \tau)$  es calórica.
  - (c) *Diferenciación respecto a parámetros*: Si  $u(x, t, \alpha)$  es calórica para cada  $\alpha$ , entonces  $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(x, t, \alpha)$  es calórica para cada  $\alpha$ .
  - (d) *Integración respecto a parámetros*: Si  $u(x, t, \alpha)$  es calórica para cada  $\alpha$ , entonces  $\int_a^b u(x, t, \alpha) d\alpha$  es calórica.
  - (e) *Diferenciación respecto a  $x$  y  $t$* : Si  $u(x, t)$  es calórica, entonces  $\frac{\partial^{|\alpha|+m} u}{\partial x^\alpha \partial t^m}(x, t)$  es calórica.
  - (f) *Integración respecto a  $x$  y  $t$* : Si  $u(x, t)$  es calórica,  $n = 1$ , entonces  $\int_{x_0}^x u(\xi, t) d\xi$  es calórica si  $u_x(x_0, t) = 0$  y  $\int_a^t u(x, \tau) d\tau$  es calórica si  $u(x, a) = 0$ .
  - (g) *Convoluciones*: Si  $u(x, t)$  es calórica, entonces  $\int u(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$  y  $\int_a^b u(x, t - \tau) \varphi(\tau) d\tau$  son calóricas.
3. (a) Si  $\phi = \phi(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $t > 0$ , es una solución con simetría esférica de la ecuación del calor en  $\mathbb{R}^3$  (i.e.  $\phi(x, t) = w(|x|, t)$  con  $w : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ), entonces  $\phi$  satisface

$$\phi_{rr} + \frac{2}{r}\phi_r = \phi_t \quad t > 0, r > 0. \quad (1)$$

- (b) Mostrar que la ecuación (1) puede reducirse mediante el cambio  $\psi = r\phi$  a la ecuación del calor unidimensional.
4. Para  $i = 1, \dots, n$  consideramos  $u_i = u_i(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ , soluciones de

$$\begin{cases} (u_i)_t &= (u_i)_{xx} \\ u_i(x, 0) &= \varphi_i(x). \end{cases}$$

Probar que si definimos para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ ,

$$u(x, t) = u_1(x_1, t)u_2(x_2, t)\dots u_n(x_n, t)$$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\dots\varphi_n(x_n)$$

entonces  $u$  es solución de la ecuación del calor en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  con  $u(x, 0) = \varphi(x)$ .

5. Supongamos  $n = 1$  y  $u(x, t) \equiv v(x^2/t)$ .
  - (a) Muestre que  $u_t = u_{xx}$  si y sólo si
 
$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0. \quad (2)$$
  - (b) Muestre que la solución general de (2) es

$$v(z) = C_1 \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + C_2.$$

(c) Derivar  $v(x^2/t)$  respecto a  $x$  y seleccionar  $C_1$  adecuadamente para obtener la solución fundamental  $\Phi$ .

6. Sea

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^N, t > 0),$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes.

(a) Verificar que  $u$  satisface la ecuación del calor si y sólo si  $v$  satisface

$$\alpha t^{-(\alpha+1)}v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)}y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)}\Delta v(y) = 0,$$

para  $y = t^{-\beta}x$ .

(b) Verificar que si  $\beta = 1/2$ ,  $v$  satisface

$$\alpha v + \frac{1}{2}y \cdot Dv + \Delta v = 0.$$

(c) Verificar que si  $v$  es radial, i.e.  $v(y) = w(|y|)$  para  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $w$  satisface

$$\alpha w + \frac{1}{2}rw' + w'' + \frac{n-1}{r}w' = 0,$$

donde  $r = |y|$ ,  $' = \frac{d}{dr}$ .

(d) Tomar  $\alpha = n/2$  y hallar la solución fundamental de la ecuación del calor.

7. (a) Sea  $a(t) > 0$  una función continua y sea  $u(x, t)$  una solución regular de  $u_t = a\Delta u$ . Muestre que existe un cambio de variables  $t = \phi(\tau)$  tal que  $U(x, \tau) = u(x, \phi(\tau))$  es solución de la ecuación del calor.

(b) Sea  $b(t) \in \mathbb{R}^n$  continua y sea  $u(x, t)$  solución regular de  $u_t = \Delta u + b \cdot \nabla u$ . Muestre que existe un cambio de variables  $x = \psi(y, t)$  tal que  $U(y, t) = u(\psi(y, t), t)$  es solución de la ecuación del calor.

(c) Sea  $c(t) \in \mathbb{R}$  continua y sea  $u(x, t)$  solución regular de  $u_t + cu = \Delta u$ . Muestre que existe  $\varphi(t)$  derivable, tal que  $U(x, t) = u(x, t)\varphi(t)$  es solución de la ecuación del calor.

### 8. Principio de Duhamel

Sea  $u$  la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = g(x, t) & \text{en } (0, L) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{en } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

Probar que  $u$  puede ser representada en la forma

$$u(x, t) = \int_0^t \Phi(x, t; s) ds,$$

donde  $\Phi$  es la solución del problema

$$\begin{cases} \Phi_t - \Phi_{xx} = 0 & \text{en } (0, L) \times (s, +\infty), \\ \Phi(0, t; s) = \Phi(L, t; s) = 0 & \text{en } t > s, \\ \Phi(x, s; s) = g(x, s) & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

9. Usar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = g(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde  $f$  y  $g(\cdot, t)$  para cada  $t$  fijo, son funciones de  $\mathcal{S}$ .

10. Mostrar que la solución acotada de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

viene dada por la fórmula

$$u(x, t) = \int_0^\infty G(x, \xi, t)f(\xi)d\xi,$$

donde  $G(x, \xi, t) = K(x - \xi, t) - K(x + \xi, t)$  y  $K$  es la solución fundamental de la ecuación del calor. (Pista: Extender  $f$  por imparidad a  $-\infty < x < 0$  y resolver el problema de valores iniciales para la  $f$  extendida.)

11. Mostrar que la solución acotada de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = g(t), \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

viene dada por la fórmula

$$u(x, t) = \int_0^\infty G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi - 2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t - \tau) g(\tau) d\tau,$$

donde  $G(x, \xi, t) = K(x - \xi, t) - K(x + \xi, t)$  y  $K$  es la solución fundamental de la ecuación del calor, si

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq C_1 \exp\{C_2|x|^{1+\alpha}\}, & 0 \leq \alpha < 1, \\ |g(t)| &\leq C_1 t^{-\alpha}, & 0 < t < \varepsilon \end{aligned}$$

donde  $C_1, C_2$  son constantes positivas y  $\varepsilon > 0$ .

12. Sea  $u(x, t)$  solución del problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dada por la convolución de  $\varphi$  en la variable  $x$  con la solución fundamental. Probar que si  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces  $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}) \forall t > 0$  y

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx, \quad \forall t > 0.$$

13. Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Notamos  $U_T = U \times (0, T]$  y  $\Gamma_T = (\overline{U} \times \{0\}) \cup (\partial U \times [0, T])$  la frontera parabólica de  $U_T$ . Decimos que  $v \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$  es una *subsolución* de la ecuación del calor si

$$v_t - \Delta v \leq 0 \text{ en } U_T.$$

(a) Probar que

$$\max_{\overline{U_T}} v = \max_{\Gamma_T} v.$$

(b) Sea  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un función suave y convexa. Probar que si  $u$  es solución de la ecuación del calor y  $v = \phi(u)$ , entonces  $v$  es una subsolución.

(c) Probar que  $v = |\nabla u|^2 + u_t^2$  es una subsolución si  $u$  es una solución de la ecuación del calor.

14. Sea  $U_T = U \times (0, T]$  y sean  $u_n$  soluciones regulares del siguiente problema

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta u_n = 0 & \text{en } U_T \\ u_n = f_n & \text{en } \Gamma_T, \end{cases}$$

donde  $\Gamma_T$  es la frontera parabólica de  $U_T$ . Probar que si  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $\Gamma_T$ , entonces existe  $u$  regular tal que  $u_n \rightarrow u$  uniformemente sobre  $U_T$  y  $u$  es solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } U_T \\ u = f & \text{en } \Gamma_T. \end{cases}$$

15. Sea  $u$  una solución acotada de la ecuación del calor en  $\mathbb{R}^N \times (-\infty, T]$ . Probar que  $u$  es constante. ¿Es cierto el resultado si eliminamos la hipótesis que  $u$  sea acotada?

16. Definimos

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

donde los coeficientes  $a_{ij}, b_i$  son continuos,  $a_{ij} = a_{ji}$  y la matriz  $A = (a_{ij})$  es definida positiva. Dado  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto, conexo y acotado, definimos  $U_T = U \times (0, T]$  y  $\Gamma_T = \overline{U_T} - U_T$  la frontera parabólica de  $U_T$ . Probar que si  $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$  satisface

$$u_t - \mathcal{L}u = 0 \text{ en } U_T,$$

entonces

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

17. Con la notación del ejercicio anterior, sea  $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$  la solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x) & \text{en } U_T, \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_T. \end{cases}$$

Probar que si  $f \leq 0$ , entonces  $u_t \leq 0$ .

(Hint: Definir  $w(x, t) = u(x, t + \varepsilon) - u(x, t)$ , calcular  $w_t - \Delta w$  y aplicar el principio del máximo.)