Ecuaciones Diferenciales – 2° cuatrimestre 2014
Práctica 2 – Ecuaciones de Primer Orden.

1. Resolver la ecuación
$$yu_x + xu_y = 0$$
con $u(0, y) = e^{-y^2}$. ¿En que regiones del plano xy la solución esta univocamente determinada?

2. Mostrar, por consideraciones geométricas, que la solución general de
$$xu_x - yu_y = 0$$
es $u(x, y) = f(xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$.
Encontrar una solución cuyo gráfico contiene a la recta de ecuación $u = y = x$. ¿Es unica?
¿Qué pasa con el problema de valores iniciales cuando estos se dan sobre la curva $y = 1/x$?

3. Probar que no existe solución de la ecuación
$$u_x + u_y = u$$
que satisfaga las condiciones iniciales $u = 1$ en la recta $y = x$.

4. Probar que la solución de la ecuación
$$u_x + u_y = u^2$$
con condición inicial $u(x, -x) = x$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.

5. Sea $u(x, t)$ la solución clásica del problema
$$\begin{cases} u_t + f(x,t)u_x &= \psi(x,t), \\ u|_{t=0} &= u_0(x). \end{cases}$$
Probar que si $x(t)$ es una solucion de $\dot{x} = f(t, x)$ definida para t en un entorno de 0, sobre la trayectoria (x(t),t), u se expresa como
$$u(x(t), t) = u_0(x(0)) + \int_0^t \psi(x(\xi), \xi)d\xi.$$

6. Hallar la solución de la ecuación
$$(x^2 + y^2)u_x + 2xyu_y = (x + y)u$$
que satisface $u(0, y) = y$.

7. Resolver
$$\begin{cases} x \cdot \nabla u &= |x|^2, \\ u|_{x_1=1} &= 3x_n. \end{cases}$$
Estudiar el dominio de definición de la solución.