

## Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2014

### PRÁCTICA 4 – TRANSFORMADA DE FOURIER

**Notación:** Notaremos por  $\mathcal{F}[f]$  a la transformada de Fourier de  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  definida por

$$\mathcal{F}[f](y) = \int f(x)e^{-2\pi ixy} dx.$$

1. Sea  $f \in L^1$  y sean  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Si  $g(x) = f(x)e^{2\pi i\alpha x}$ , entonces  $\mathcal{F}[g](y) = \mathcal{F}[f](y - \alpha)$ .
  - (b) Si  $g(x) = f(x - \alpha)$ , entonces  $\mathcal{F}[g](y) = \mathcal{F}[f](y)e^{-2\pi i\alpha y}$ .
  - (c) Si  $g(x) = f(x/\lambda)$ , entonces  $\mathcal{F}[g](y) = \lambda^n \mathcal{F}[f](\lambda y)$ .
2. Probar que si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\mathcal{F}\mathcal{F}[f(x)] = f(-x)$ .
3. Probar que la transformada de Fourier de una función  $f$  será una función real si y sólo si  $f$  es par.
4. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:  
 $\chi_{[-1,1]}$ ,  $\exp(-a|x|)$ ,  $1/(1+x^2)$ .

5. Sea  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $L^1$ . Se definen

(a) La Transformada-coseno de Fourier como

$$\mathcal{F}_c[f](y) = \int_0^\infty f(x) \cos(xy) dx.$$

(b) La Transformada-seno de Fourier como

$$\mathcal{F}_s[f](y) = \int_0^\infty f(x) \sin(xy) dx.$$

Mostrar que si se extiende  $f$  como una función par a toda la recta, tenemos

$$\mathcal{F}[f](y) = 2\mathcal{F}_c[f](2\pi y),$$

y que si se extiende a  $f$  como una función impar, se tiene

$$\mathcal{F}[f](y) = 2i\mathcal{F}_s[f](2\pi y).$$

6. Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  no singular. ¿Cómo se relacionan la transformada de Fourier de  $f(Ax)$  con la de  $f(x)$ ? ( $f \in L^1$ ). Usar este resultado para mostrar que la transformada de Fourier transforma funciones radiales en funciones radiales.
7. Probar que si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  es de soporte compacto, entonces  $\mathcal{F}[f] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .
8. Sea  $f \in \mathcal{S}$ . Probar que  $f * f = f$  si y sólo si  $f = 0$  a.e.
9.
  - (a) Probar que si  $\phi$ ,  $\phi'$  y  $\phi''$  están en  $L^1(\mathbb{R}) \cap \{g \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0\}$  entonces existe  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tal que  $\mathcal{F}[f] = \phi$ .
  - (b) Sea  $K \subset \mathbb{R}$  compacto y  $U \subset \mathbb{R}$  abierto tal que  $K \subset U$ . Probar que existe  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tal que  $\mathcal{F}[f](y) = 1$  para todo  $y \in K$  y  $\mathcal{F}[f](y) = 0$  para todo  $y \in \mathbb{R} - U$ .
  - (c) Probar que  $\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R})]$  es denso en el conjunto de funciones continuas que tienden a cero en el infinito. (Sug.: Stone-Weierstrass)

10. Utilizar la transformada de Fourier para obtener una solución explícita de la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^2 = \{y > 0\}, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

11. Utilizar la transformada de Fourier para obtener una solución explícita de la siguiente ecuación:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^n,$$

donde  $f \in \mathcal{S}$ .

12. Idem el ejercicio anterior para la ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde  $u$  y  $g$  son funciones a valores complejos y  $g \in L^2$ .