

APROXIMANDO SOLUCIONES QUE EXPLOTAN

PABLO GROISMAN Y JULIO D. ROSSI

RESUMEN. Al aproximar numéricamente ecuaciones en derivadas parciales con singularidades, un buen método debe reproducir el comportamiento asintótico de las soluciones. Un estudio riguroso y detallado de los posibles comportamientos es necesario para entender las ventajas y desventajas de los métodos numéricos en modelos gobernados por ecuaciones de evolución. En este artículo se presentan algunos resultados sobre el comportamiento de aproximaciones numéricas de soluciones de ecuaciones parabólicas que desarrollan singularidades en tiempo finito.

1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones parabólicas semilineales de segundo orden son utilizadas para modelar diversos fenómenos y procesos en mecánica, física, tecnología, biología y muchas otras áreas. Por ejemplo, bajo ciertas condiciones, la ecuación del calor semilineal describe el proceso de conducción en plasma, filtración de gases y líquidos en medios porosos, reacciones químicas y procesos de crecimiento y migración de poblaciones, etc.

Para este tipo de problemas, por lo general se posee una teoría de existencia y unicidad para tiempos cortos, sin embargo puede ocurrir que la solución deje de existir en un tiempo finito. La forma más simple en que aparece este fenómeno es cuando la solución tiende a infinito a medida que la variable temporal t se acerca a un tiempo finito, $T > 0$. La prueba de que en las ecuaciones no lineales puede aparecer este fenómeno debido simplemente a la estructura no lineal del problema la brinda el siguiente ejemplo. Consideremos la ecuación ordinaria

$$(1.1) \quad \begin{cases} u' = f(u), \\ u(0) = u_0 > 0, \end{cases}$$

Financiado por Universidad de Buenos Aires, por ANPCyT PICT No. 5009 y por Fundación Antorchas. J. D. Rossi es investigador del CONICET.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 65M60, 65M20, 35K60, 35B40.

donde f es positiva, creciente y regular. En particular, cuando $f(u) = u^p$ con $p > 1$, esta ecuación tiene como única solución a

$$u(t) = C_p(T - t)^{-1/(p-1)},$$

donde, $T = u_0^{1-p}(p-1)^{-1}$ y $C_p = (p-1)^{-1/(p-1)}$. En este ejemplo tan simple puede verse que la solución $u(t)$ es regular para todo $t < T$ y que $u(t) \rightarrow +\infty$ cuando $t \nearrow T$. Cuando esto ocurre decimos que u explota (blow-up en la literatura inglesa). En general, si $\int^{+\infty} 1/f < +\infty$, entonces $u(t)$ explota en tiempo finito T en el sentido anterior, $\lim_{t \nearrow T} u(t) = +\infty$.

Los problemas que estudiamos, además de depender del tiempo poseen una estructura espacial, es decir que la función incógnita u depende no sólo del tiempo sino también de una variable espacial, $u = u(x, t)$, $x \in \Omega$, un dominio en \mathbb{R}^d . Consideramos procesos de evolución que pueden ser modelados de la forma

$$u_t = \mathcal{F}(u), \quad t \in (0, T), \quad u(0) = u_0,$$

donde \mathcal{F} es un operador y la solución $u = u(t)$ es una curva en cierto espacio funcional ($H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, etc.).

Los primeros resultados rigurosos que prueban la aparición de este fenómeno de explosión en ecuaciones en derivadas parciales son los obtenidos por Kaplan ([37]) y Fujita ([25]).

Varias preguntas surgen naturalmente ante este tipo de problemas, por ejemplo: (1) ¿Hay blow-up? (2) ¿Cuándo? (3) ¿Dónde? (4) ¿Cómo? (5) ¿Son las respuestas a estas preguntas estables ante perturbaciones? (6) ¿Cómo calcularlo numéricamente?. Si se trata de un sistema de ecuaciones, agregamos dos preguntas más, (7) ¿Es posible tener diferentes conjuntos de explosión para diferentes componentes del sistema? (8) ¿Es posible que ciertas componentes permanezcan acotadas mientras otras explotan (explosión no simultánea)?

Éstas no son las únicas preguntas que la comunidad matemática ha considerado de interés. En [26] se detallan los fenómenos relevantes a estudiar ante la aparición de este tipo de singularidades, dando un enfoque integral de este problema.

En este artículo avanzamos en torno a la sexta pregunta. Lo que nos interesa conocer de un método numérico para aproximar a las soluciones de estos problemas es en qué medida las respuestas a las restantes preguntas coinciden en la solución continua y en su aproximación.

Resumimos a continuación algunos de los métodos numéricos más conocidos, analizamos sus propiedades y en qué medida reproducen el comportamiento asintótico de las soluciones. Para problemas en

derivadas parciales un buen método numérico debe reproducir no sólo el comportamiento asintótico temporal de las soluciones sino también la estructura espacial de la solución cerca del tiempo de explosión. Un estudio riguroso y detallado de los posibles comportamientos es necesario para entender las ventajas y desventajas de los métodos numéricos en el estudio y la predicción de comportamientos singulares en modelos gobernados por ecuaciones de evolución.

Las dificultades del análisis se deben, fundamentalmente, a que los teoremas de convergencia usuales no incluyen casos singulares como los que aquí se analizan. Por lo tanto suele utilizarse otro tipo de técnicas, basadas generalmente en principios de comparación, estimaciones funcionales y desarrollos asintóticos cuidadosos de las soluciones numéricas.

Nos concentraremos principalmente en problemas de dos tipos:

1. Problemas con fuente no lineal, i.e., de la forma,

$$(1.2) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u^m + u^p, & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

en un dominio acotado Ω .

2. Problemas con condiciones de Neumann no lineales,

$$(1.3) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u^m, & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u^m}{\partial \eta} = u^p, & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Para $m = 1$ (difusión lineal) se obtienen las ecuaciones de reacción-difusión más estudiadas entre las que poseen el fenómeno de explosión. Este caso será estudiado en detalle, pero también mencionaremos resultados para los casos $m > 1$ (ecuación de medios porosos) y $0 < m < 1$ (ecuación de difusión rápida).

2. PROBLEMAS CON FUENTE NO LINEAL

Consideremos en primer lugar el siguiente problema

$$(2.1) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + u^p, & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Si el dato inicial $u_0(x)$ es regular (como asumiremos a lo largo de todo este artículo) entonces existe una única solución para este problema y es regular. Sin embargo, no importa cuán suaves sean el dato inicial y el dominio Ω , hay datos iniciales para los cuales existe un tiempo finito

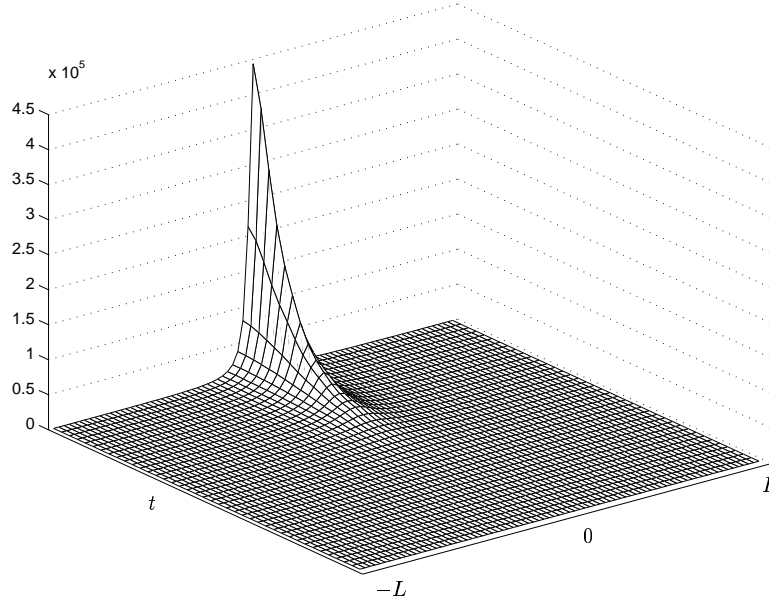


FIGURA 1. Una solución de $u_t = u_{xx} + u^p$ en $(-L, L) \times (0, T)$ explotando en tiempo finito.

T en el que la solución deja de existir. En este tiempo ocurre que la solución tiende a infinito, es decir

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty.$$

Como ya hemos dicho a este fenómeno se lo denomina *explosión en tiempo finito (blow-up)*.

Para este problema se conocen respuestas a las preguntas mencionadas anteriormente

(1) ¿Hay blow-up? Si, si u_0 es suficientemente grande. Más precisamente, se tiene la siguiente caracterización de las soluciones que explotan: consideremos la función

$$\Phi(u)(t) \equiv \int_{\Omega} \frac{|\nabla u(s, t)|^2}{2} ds - \int_{\Omega} \frac{|u(s, t)|^{p+1}}{p+1} ds.$$

En [7, 15], se prueba que una solución explota en tiempo finito si y sólo si existe un tiempo t_0 con $\Phi(u)(t_0) < 0$. Un cálculo directo muestra que dado un dato inicial $u_0 \neq 0$ entonces $\Phi(\lambda u_0) < 0$ si λ es suficientemente grande.

(2) ¿Cuándo? El funcional Φ también sirve para estimar el tiempo de blow-up T , ya que cumple

$$\lim_{t \rightarrow T} \Phi(u)(t) = -\infty,$$

y en [40] se prueba que para tiempos cercanos al tiempo de explosión se verifica

$$(T - t) \leq \frac{C}{(-\Phi(u(t)))^{\frac{p-1}{p}}}.$$

(3) ¿Dónde? Llamamos $B(u)$ al conjunto de puntos $x \in \Omega$ tales que $u(x_n, t_n) \nearrow +\infty$ para alguna sucesión $(x_n, t_n) \rightarrow (x, T)$. Para el caso unidimensional ($\Omega = (0, 1)$) se sabe que el conjunto de blow-up ($B(u)$) está localizado en un número finito de puntos. Es decir, existen x^1, \dots, x^k tales que $u(x^i, t) \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow T$ y $u(x, t)$ permanece acotada hasta tiempo T para todo $x \notin \{x^1, \dots, x^k\}$ (ver [13]). Esto no es cierto para dimensiones mayores, donde el conjunto de blow-up puede ser incluso una hipersuperficie. Pueden obtenerse mejores caracterizaciones del conjunto $B(u)$ si se tiene información sobre el dato inicial (por ejemplo, simetría).

(4) ¿Cómo? El comportamiento asintótico en los puntos donde u explota está dado por

$$u(x^i, t) \sim (T - t)^{-\frac{1}{p-1}}, \quad (\text{tasa de blow-up})$$

donde $f(t) \sim g(t)$ significa que existen constantes positivas C_1, C_2 tales que $C_1 g(t) \leq f(t) \leq C_2 g(t)$ (ver [27, 33, 34]). Más aún, se tiene

$$\lim_{t \nearrow T} (T - t)^{\frac{1}{p-1}} u(x^i, t) = C_p.$$

Proponemos entonces métodos numéricos para este problema y estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones. Como primer paso para introducir los métodos numéricos planteamos un método de líneas. La idea de este tipo de métodos es discretizar la variable espacial (x), manteniendo la variable temporal (t) continua. De esta forma todas las derivadas espaciales desaparecen pero se mantienen las derivadas temporales, obteniéndose un sistema de ecuaciones ordinarias. Para la discretización espacial consideramos un método general con hipótesis adecuadas. Más precisamente, suponemos que para cada $h > 0$ (h es el parámetro de discretización) tenemos un conjunto de nodos $\{x_1, \dots, x_N\} \subset \bar{\Omega}$ ($N = N(h)$), y que la aproximación numérica de u en los nodos x_k viene dada por $U(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))$. Es decir que $u_k(t)$ aproxima a $u(x_k, t)$. Suponemos entonces que $U(t)$ es la

solución de un sistema de ecuaciones ordinarias de la forma

$$(2.2) \quad MU'(t) = -AU(t) + MU^p(t), \quad t \in [0, T_h),$$

con dato inicial $u_k(0) = u_0(x_k)$. En (2.2) y de aquí en adelante todas las operaciones entre vectores se entienden coordenada a coordenada. Las matrices $M, A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ dependen de h y del método numérico en cuestión. Este tipo de sistemas se obtiene cuando se aplican métodos de diferencias finitas o elementos finitos.

Por ejemplo, en una dimensión espacial consideramos $\Omega = (0, 1)$, $h = 1/N$, los nodos $x_i = ih$ ($1 \leq i \leq N$) y al aplicar diferencias finitas centradas o elementos finitos con *mass lumping* (en este caso ambos métodos coinciden) el sistema (2.2) toma la forma

$$u'_i(t) = \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2} + u_i^p(t), \quad 2 \leq i \leq N - 1.$$

Decimos que las soluciones numéricas tienen blow-up si existe un tiempo finito T_h tal que

$$\lim_{t \nearrow T_h} \|U(t)\|_\infty = \lim_{t \nearrow T_h} \max_j u_j(t) = +\infty.$$

En el resto del trabajo denotaremos con T al tiempo de explosión de la solución continua, con h al parámetro de la malla y con T_h a los tiempos de explosión de las aproximaciones numéricas (si es que éstas explotan).

El análisis numérico desarrollado hasta el momento sobre este tipo de problemas todavía es escaso en relación a la teoría continua (ver [9, 26]). Algunos trabajos que tratan sobre aproximaciones numéricas con mallas fijas son [1, 2, 14, 41].

En [10] se desarrolla un algoritmo que refina la malla espacial a medida que avanza el tiempo aprovechando la invarianza de escala que poseen las soluciones de esta ecuación. En [11, 12, 36] se desarrollan los denominados *moving mesh methods* con el objetivo de reproducir el comportamiento asintótico de las soluciones. Estos métodos también hacen uso de la invarianza de escalas de las soluciones. Si bien estos métodos son los más utilizados, sólo sirven para modelos unidimensionales y no se poseen demostraciones rigurosas sobre su convergencia y comportamiento asintótico.

Otros trabajos que merecen ser mencionados son [6, 8, 19, 38, 46]. En [9] se resumen los resultados contenidos en estos artículos.

En todos los métodos numéricos que analizamos se ha probado la convergencia de las soluciones discretas a la solución continua en regiones

en donde u es regular, más precisamente, el típico resultado de convergencia que se obtiene es de la forma: dado $\tau > 0$ existe $C = C(\tau) > 0$ tal que,

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T-\tau])} \leq Ch^\alpha,$$

donde u_h es una interpolación de U .

No es de esperar un mejor resultado de convergencia en el sentido de obtener, por ejemplo, convergencia del método hasta tiempo T , ya que la solución desarrolla una singularidad en ese momento. Para que esto ocurra debería pasar, por lo menos, que T y T_h coincidan, lo cual no es cierto en general, ni siquiera en el caso de una ecuación diferencial ordinaria.

En [31] se consideran aproximaciones numéricas para el problema (2.1) en una dimensión. Se prueba que existen soluciones numéricas con blow-up si y sólo si $p > 1$. Para describir la aparición de blow-up en las aproximaciones numéricas se utiliza una versión discreta del funcional Φ descrito anteriormente:

$$\Phi_h(U) = \frac{1}{2} \langle A^{1/2}U, A^{1/2}U \rangle - \frac{1}{p+1} \langle MU^p, U \rangle.$$

Las soluciones discretas de este problema explotan si y sólo si existe un tiempo t_0 en el que el funcional Φ_h se hace negativo.

Como esta caracterización es similar a la del problema continuo, mediante esta propiedad se puede probar que si la solución del problema continuo explota en tiempo finito, entonces lo mismo le ocurre a las del discreto para h suficientemente pequeño. Además este funcional permite obtener cotas sobre la distancia al tiempo de blow-up similares a las que se tienen para el problema continuo, que sirven para probar convergencia de los tiempos de explosión ($T_h \rightarrow T$ cuando $h \rightarrow 0$). Sin embargo, utilizando otro enfoque, podemos acotar el orden de esta convergencia.

Se puede probar que la tasa de explosión de las soluciones numéricas es la misma que la del problema continuo y, más aún, en [28] se prueba que existe una constante C independiente de h tal que

$$\|U(t)\|_\infty \leq C(T_h - t)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Esta cota sirve, entre otras cosas, para acotar la diferencia de los tiempos de explosión. Supongamos que el método numérico en consideración es consistente de orden α , es decir, que las soluciones de (2.1) verifican (llamando $z_i(t) = u(x_i, t)$, $Z(t) = (z_1(t), \dots, z_N(t))$)

$$MZ'(t) = -AZ(t) + MZ^p(t) + \varepsilon(t, h),$$

con $\|\varepsilon(t, h)\|_\infty \leq Ch^\alpha(T-t)^{-\theta}$. El término $C(T-t)^{-\theta}$ es una cota para las derivadas de u . Bajo esta suposición la función de error $E(t) = Z(t) - U(t)$ verifica

$$ME'(t) = -AE(t) + \frac{Z^p(t) - U^p(t)}{Z(t) - U(t)}E(t) + \varepsilon(t, h).$$

Sea entonces t_0 el primer tiempo en que $\|E(t_0)\|_\infty = 1$ ($t_0 > 0$ para h suficientemente pequeño). En $[0, t_0]$ $E(t)$ verifica

$$ME'(t) \leq -AE(t) + C(T-t)^{-1}E(t) + Ch^\alpha(T-t)^{-\theta}.$$

Como $Ch(T-t)^{-C}$ es una supersolución de esta ecuación, resulta ser una cota para $E(t)$ que dice que esta función se mantiene pequeña hasta tiempos cercanos al tiempo de explosión con tal de tomar h pequeño. De hecho permite obtener $|T - t_0| \leq Ch^\alpha$ y $|T_h - t_0| \leq Ch^\alpha$. Entonces

$$|T - T_h| \leq |T - t_0| + |T_h - t_0| \leq Ch^\alpha.$$

Este tipo de ideas se puede utilizar también para acotar la diferencia entre tiempos de explosión para soluciones del problema (2.1) cuando se perturba el dato inicial, el coeficiente de difusión o la potencia de reacción p , obteniéndose cotas similares. Para el caso del dato inicial esta cota incluso puede ser mejorada. En [30, 32] se perturba el dato inicial u_0 añadiéndole una función g de norma pequeña y entonces los tiempos de explosión $T(u_0), T(u_0 + g)$ satisfacen

$$|T(u_0 + g) - T(u_0)| \leq C\|g\|_{L^\infty} |\ln(\|g\|_{L^\infty})|^\gamma, \quad \gamma > 0.$$

Nos adentramos entonces en el estudio asintótico de las soluciones numéricas: la tasa y el conjunto de blow-up de u_h para h fijo. Obtenemos que la tasa de explosión es la misma que la del problema continuo y que el conjunto de blow-up, si bien puede diferir, está contenido en un entorno del conjunto de blow-up de u si h es suficientemente pequeño. Precisamente obtenemos que si u_h explota en tiempo finito entonces

$$\lim_{t \rightarrow T_h} \|U(t)\|_\infty (T_h - t)^{\frac{1}{p-1}} = C_p.$$

Este comportamiento, además de ser el mismo que tienen las soluciones continuas, es el que tienen las soluciones de la ecuación $u'(t) = u^p(t)$, como vimos anteriormente. Esto nos dice que, tanto en el esquema numérico, como en el problema continuo, cuando la solución está cerca de explotar, el término de difusión ($AU, \Delta u$) es despreciable respecto del término de reacción (u^p).

Si denotamos por $B^*(u_h)$ al conjunto de nodos que tienen este comportamiento (que explotan con la misma tasa que el máximo), entonces para las soluciones con blow-up se tiene que $\emptyset \neq B^*(u_h) \subset B(u_h)$. Para

el problema continuo, el conjunto de blow-up $B(u)$ esta formado sólo por esta clase de puntos, sin embargo en las aproximaciones numéricas aparece un fenómeno de propagación espúreo. El blow-up se propaga a los K nodos adyacentes a $B^*(u_h)$ (con una tasa menor), donde $K = [1/(p - 1)]$ ($[a]$ denota la parte entera de a). Sin embargo, como la cantidad de nodos donde se propaga la explosión sólo depende de p , el conjunto $B(u_h)$ se mete en un entorno de $B^*(u_h)$ cuando h tiende a cero. Si es posible localizar $B^*(u_h)$ cerca de $B(u)$ entonces se pueden obtener estimaciones de la forma

$$B(u_h) \subset B(u) + (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \forall h \leq h_0(\varepsilon).$$

Esto es cierto para el problema unidimensional, sin embargo para el caso multidimensional no se ha podido demostrar la localización de $B^*(u_h)$ en torno de $B(u)$, aunque conjeturamos que es cierta.

2.1. Un esquema totalmente discreto. Las aproximaciones numéricas semidiscretas son una herramienta muy útil y el estudio de sus propiedades asintóticas aporta datos muy importantes para comprender en qué medida es posible aproximar problemas como los que estamos considerando. Sin embargo, no es suficiente. Para poder brindar un análisis acabado del comportamiento de las aproximaciones numéricas, es necesario integrar el sistema de ecuaciones ordinarias que define a las aproximaciones mencionadas anteriormente, cuyas soluciones también son singulares. Por lo tanto las técnicas usuales de aproximación y análisis de error no se extienden naturalmente para este tipo de problemas, y es necesario proponer métodos adecuados y estudiar y dar pruebas rigurosas del comportamiento de lo que denominamos aproximaciones totalmente discretas.

Primero veamos como adaptar el paso temporal en una ecuación ordinaria. Consideremos $u(t)$ la solución del problema,

$$(2.3) \quad \begin{cases} u' = f(u), \\ u(0) = u_0 > 0, \end{cases}$$

donde f es positiva, creciente y regular. Si $\int^{+\infty} 1/f < +\infty$, como mencionamos en la introducción, $u(t)$ explota en tiempo finito, T , dado por,

$$T = \int_{u_0}^{+\infty} \frac{1}{f(s)} ds.$$

En [3] se analiza un método adaptivo para elegir los pasos en un método numérico de tipo Euler o Runge-Kutta, de forma que se reproduzca

el comportamiento asintótico. Luego se utiliza este análisis para desarrollar métodos adaptivos para ecuaciones en derivadas parciales.

A continuación, para simplificar la exposición, reproducimos este análisis para un caso concreto, el método de Euler explícito. Si aproximamos $u(t)$ usando el método de Euler nos queda

$$(2.4) \quad \begin{cases} u^{j+1} = u^j + \tau_j f(u^j), \\ u^0 = u_0. \end{cases}$$

Ahora elegimos los incrementos τ_j de forma adaptiva como sigue

$$(2.5) \quad \tau_j f(u^j) = \lambda,$$

donde λ es un parámetro. La principal idea detrás de esta elección se basa en mirar la ecuación $u'(t) = f(u(t))$ como el sistema

$$(2.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial t}{\partial s} = 1/f(u(\tau)), \\ \frac{\partial u}{\partial s} = 1, \end{cases}$$

donde el nuevo tiempo, s , es una variable auxiliar. Aplicando el método de Euler con paso fijo de tamaño λ al sistema nos queda:

$$\begin{cases} t^{j+1} = t^j + \lambda/f(u^j), \\ u^{j+1} = u^j + \lambda. \end{cases}$$

Es decir, $\tau_j = t^{j+1} - t^j = \lambda/f(u^j)$. Usando (2.4) y (2.5) tenemos

$$u^j = u^{j-1} + \lambda = \dots = u^0 + j\lambda$$

y entonces

$$\tau_j = \frac{\lambda}{f(u^j)} = \frac{\lambda}{f(u_0 + j\lambda)}.$$

De esto podemos concluir que el esquema numérico también explota en el sentido siguiente: $y^j \rightarrow \infty$ mientras $\sum_j \tau_j < +\infty$. Además, estas acotaciones, proporcionan una estimación del tiempo de explosión:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \tau_j &= \tau_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda}{f(u_0 + j\lambda)} \leq \frac{\lambda}{f(u_0)} + \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{f(u_0 + s\lambda)} ds \\ &= \frac{\lambda}{f(u_0)} + \int_{u_0}^{+\infty} \frac{1}{f(s)} ds = \frac{\lambda}{f(u_0)} + T. \end{aligned}$$

Entonces $T_\lambda = \sum_j \tau_j < +\infty$ y

$$T_\lambda - T \leq \frac{\lambda}{f(u_0)}.$$

Además, como u es convexa, es fácil ver que la solución numérica es menor o igual que la continua y entonces

$$T \leq T_\lambda.$$

Concluimos que esta elección de los pasos para el método de Euler nos proporciona un esquema que explota y además aproxima bien los tiempos de explosión continuos en el siguiente sentido:

$$|T - T_\lambda| \leq \frac{\lambda}{f(u_0)} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Integrando el sistema (2.6) con métodos tipo Runge-Kutta se obtienen métodos adaptivos de mayor orden para (2.3). Este mayor orden de convergencia también se puede observar en los tiempos de blow-up numéricos, T_λ .

Ahora retomamos el análisis de (2.1). En [29] se propone un esquema totalmente discreto que surge de discretizar en t el sistema (2.2). Basándose en los esquemas propuestos en [3, 16] se analiza en primer lugar un método de Euler explícito y a continuación se introduce un esquema implícito que permite eliminar las restricciones en el paso temporal.

Utilizamos la notación $U^j = (u_1^j, \dots, u_N^j)$ para denotar el valor de la aproximación totalmente discreta a tiempo t_j , y $\tau_j = t_{j+1} - t_j$ para el paso de tiempo. El método explícito propuesto viene dado por

$$(2.7) \quad \begin{cases} MU^{j+1} = MU^j - \tau_j (AU^j + M(U^j)^p) \\ U(0) = u_0^I. \end{cases}$$

Entonces elegimos el paso de tiempo $\tau_j = t_{j+1} - t_j$ de forma tal que el comportamiento asintótico del esquema totalmente discreto reproduzca al del continuo. Fijamos $\lambda > 0$ pequeño y tomamos

$$\tau_j = \frac{\lambda}{(w^j)^p}, \quad w^j = \langle MU^j, E \rangle,$$

aquí $E = (1, \dots, 1)$. Con esta elección podemos probar que el comportamiento de w^j viene dado por

$$\partial w^{j+1} \sim (w^j)^p.$$

de donde podemos ver que es similar al del problema continuo. Decimos entonces que una solución de (2.7) explota si

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|U^j\|_\infty = \infty, \quad \text{y} \quad T_{h,\lambda} := \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j < \infty.$$

Llamamos a $T_{h,\lambda}$ el tiempo de blow-up.

Para este tipo de esquemas se prueban resultados similares a los obtenidos cuando se considera el método semidiscreto en cuanto al comportamiento asintótico de las soluciones, la convergencia de los tiempos de blow-up y los conjuntos de explosión.

2.2. Blow-up no simultáneo. En [28] se considera el caso de un sistema de ecuaciones acopladas en el término fuente,

$$(2.8) \quad \begin{aligned} u_t &= \Delta u + u^{p_{11}} v^{p_{12}} && \text{en } \Omega \times (0, T), \\ v_t &= \Delta v + u^{p_{21}} v^{p_{22}} && \text{en } \Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

con condiciones de borde de tipo Dirichlet homogéneas, $u = v = 0$ sobre $\partial\Omega \times [0, T)$, y dato inicial $u(x, 0) = u_0(x)$, $v(x, 0) = v_0(x)$ en Ω . Los exponentes p_{ij} son mayores que cero.

Bajo condiciones de regularidad bastante generales existe una única solución (u, v) de (2.8) local en tiempo, ([17]). Al igual que en los problemas anteriores estas soluciones pueden explotar, es decir

$$\limsup_{t \nearrow T} (\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} + \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty}) = +\infty.$$

El conjunto de exponentes para los que este fenómeno puede darse fue caracterizado en [17], donde se encuentra que una de las siguientes condiciones debe cumplirse para que existan soluciones con blow-up, $p_{11} > 1$, $p_{22} > 1$ ó $(p_{11} - 1)(p_{22} - 1) < p_{12}p_{21}$.

A priori no hay razón por la cual las funciones u y v deban tender a infinito simultáneamente en el tiempo T (el tiempo maximal de existencia). De hecho, en [42] se prueba que existen datos iniciales para los cuales u explota y v no si y sólo si $p_{11} > 1$ y $p_{21} < p_{11} - 1$. A este fenómeno se le denomina *explosión no simultánea*.

El principal interés en este problema consiste en analizar si las condiciones para la aparición de soluciones con blow-up y el fenómeno de blow-up no simultáneo son reproducidos por las aproximaciones numéricas usuales. Para esto, se propone el método numérico general mencionado anteriormente, en este caso se obtiene un sistema de ecuaciones ordinarias con la siguiente estructura

$$(2.9) \quad \begin{cases} MU'(t) &= -AU(t) + MU^{p_{11}}V^{p_{12}}(t), \\ MV'(t) &= -AV(t) + MU^{p_{21}}V^{p_{22}}(t). \end{cases}$$

En [28] se prueba que existen soluciones (U, V) de (2.9) que explotan en tiempo finito si y sólo si los exponentes p_{ij} verifican las mismas condiciones que valen para el problema continuo. Además se prueba que si se tiene una solución (U, V) de (2.9) tal que U explota en tiempo finito T_h y V se mantiene acotada hasta ese tiempo, entonces $p_{11} > 1$ y $p_{21} < p_{11} - 1$. Más aún, si $p_{11} > 1$ y $p_{21} < p_{11} - 1$, entonces para todo dato inicial $V_0 \neq 0$ para (2.9) existe un dato inicial U_0 de manera tal que U explota en tiempo finito T_h y V se mantiene acotada.

Es decir, la estructura de la no linealidad necesaria para la aparición de blow-up no simultáneo en las aproximaciones numéricas es idéntica

a la que se prueba en [42] para el sistema continuo. Este hecho, sumado a la convergencia de las aproximaciones numéricas permite probar que si consideramos una solución del problema continuo que posee blow-up no simultáneo, entonces sus aproximaciones numéricas reproducen el fenómeno para elecciones de h suficientemente pequeñas. Más aún, las aproximaciones numéricas también respetan la tasa de explosión y los tiempos de blow-up numéricos T_h convergen a T .

En [5] se considera un sistema de ecuaciones del calor pero en donde el acople viene de la condiciones de borde $\frac{\partial u}{\partial \eta} = u^{p_{11}} v^{p_{12}}$, $\frac{\partial v}{\partial \eta} = u^{p_{21}} v^{p_{22}}$ en $\partial\Omega \times (0, T)$. Para este problema se obtienen resultados similares a los descritos anteriormente.

2.3. Difusión no lineal. Consideremos la siguiente ecuación

$$(2.10) \quad \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + u^p, & (x, t) \in (-L, L) \times [0, T), \\ u(-L, t) = u(L, t) = 1, & t \in [0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 1, & x \in (-L, L). \end{cases}$$

La principal diferencia entre esta ecuación y las estudiadas anteriormente es la aparición de un término de difusión no lineal. Este término de difusión suele ser utilizada para modelar, por ejemplo, filtración de gases en medios porosos.

En este modelo consideramos $m, p > 1$ parámetros fijos. El dato inicial u_0 es suave y compatible con las condiciones de borde de forma tal de obtener soluciones regulares.

Retomamos entonces las preguntas: ¿Hay blow-up?, ¿Cuándo?, ¿Dónde?, ¿Cómo?, que tienen respuestas un poco distintas en este caso (ver [45] para más detalles).

Nuestro interés se centra en el caso $p = m$ y $L > m\pi/(m-1)$ (aunque en [21] se tratan todos los casos). En este caso todas las soluciones explotan (y la tasa de blow-up viene dada por $\|u(\cdot, t)\|_\infty \sim (T-t)^{-\frac{1}{m-1}}$). El conjunto de blow-up es $B(u) = (-\frac{m\pi}{m-1}, \frac{m\pi}{m-1})$. A este fenómeno (el conjunto de blow-up es un subintervalo propio del dominio) se le denomina blow-up regional.

En [21] se aproxima esta ecuación utilizando elementos finitos lineales a trozos con mass lumping en una malla uniforme para la variable espacial obteniendo un sistema de ecuaciones ordinarias de la forma (2.2).

Se caracterizan las condiciones para la aparición de explosión numérica y se muestra que las aproximaciones reproducen los casos de blow-up de manera precisa, es decir, si u es una solución continua que explota,

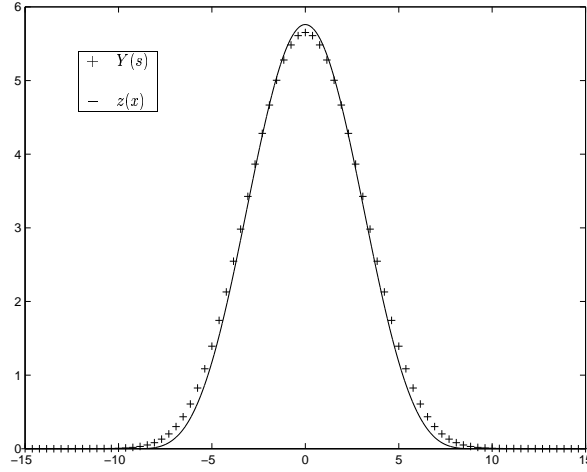


FIGURA 2. Perfiles autosimilares. El perfil $Y(s)$ representa a $W(t) = (T_h - t)^{\frac{1}{p-1}}U(t)$ cerca de la explosión, mientras que $z(x)$ es el límite de $(T - t)^{\frac{1}{p-1}}u(x, t)$.

entonces también explotan sus aproximaciones numéricas para todo h suficientemente pequeño. También se obtienen cotas para $T_h - t$ en términos de $U(t)$. Al igual que antes, esto permite probar convergencia de los tiempos numéricos de explosión al continuo.

Respecto a las tasas, se prueba que todas las soluciones que explotan lo hacen con la misma tasa que la obtenida para las aproximaciones de la ecuación del calor, que coincide con la del problema continuo (2.10).

Utilizando las tasas, se caracteriza el conjunto de explosión numérico, si $U(t)$ es una aproximación que explota a tiempo T_h , entonces se obtiene explosión global, i.e. $B(u_h) = [-L, L]$. Más aún, todos los nodos explotan con la misma tasa ($u_k(t) \sim (T_h - t)^{-1/(p-1)}$ para todo k). Vemos entonces que no es posible obtener explosión regional en un esquema numérico de malla fija. Sin embargo, se puede recuperar la explosión regional mirando cuidadosamente a $U(t)$ en variables autosimilares adecuadas. Utilizando estas nuevas variables se prueba que si bien todos los nodos explotan con la misma tasa (independiente de h). La constante que acompaña la tasa se comporta correctamente. Se tiene que todos los nodos se comportan como

$$u_k(t) \sim w_k(h)(T_h - t)^{-\frac{1}{p-1}},$$

pero las constantes $w_k(h)$ tienden a cero cuando $h \rightarrow 0$ si el nodo correspondiente está fuera de $B(u)$. Es decir, los perfiles autosimilares discretos convergen al perfil continuo, ver Figura 2.

En [22] se considera la ecuación de medios porosos con condiciones de borde no lineales y se obtienen resultados similares.

3. PROBLEMAS CON CONDICIONES DE BORDE NO LINEALES

Nos concentramos ahora en problemas como (1.3). El primer problema que tratamos es el siguiente:

3.1. La ecuación del calor con condiciones de borde no lineales.

$$(3.11) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = u^p & \text{en } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (p > 1)$$

El dominio Ω y el dato inicial $u_0 > 0$ son regulares para garantizar soluciones suaves.

Para este problema nos preguntamos nuevamente: ¿Hay blow-up?, ¿Cuándo?, etc., obteniendo respuestas diferentes a las obtenidas para el problema semilineal:

(1) ¿ Hay blow-up? Si $p > 1$ todas las soluciones de (3.11) explotan en tiempo finito ([47, 44]).

(2) ¿Cuándo? En [44] se encuentra una cota superior para el tiempo de blow-up en términos del dato inicial.

(3) ¿Dónde? El conjunto de blow-up está localizado en el borde del dominio, para todo subdominio $\Omega' \subset\subset \Omega$ existe una constante $C = C(d(\Omega', \partial\Omega))$ tal que $u(x, t) \leq C$ para todo $x \in \Omega'$ y para todo $0 \leq t < T$ ([35, 44]).

(4) ¿Cómo? En [35] se encuentra que la tasa de blow-up es

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \sim (T - t)^{-\frac{1}{2(p-1)}}.$$

Para detalles y más referencias sobre este problema se puede consultar el trabajo [23], donde se resumen los resultados conocidos.

En [3, 16, 18] se consideran aproximaciones numéricas para este problema en una dimensión. Más precisamente se considera

$$(3.12) \quad \begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times [0, T], \\ u_x(1, t) = f(u(1, t)), & t \in [0, T], \\ u_x(0, t) = 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], \end{cases}$$

donde $f(s)$ y $u_0(x)$ son positivos y suaves como para garantizar existencia, unicidad y regularidad de la solución (ver [39]).

En estos trabajos se prueban condiciones para la aparición de blow-up en las aproximaciones numéricas (¡que difieren de las del problema continuo!), convergencia del método y de los tiempos de blow-up. Se consideran esquemas semidiscretos ([16]) y totalmente discretos de tipo Euler y Runge-Kutta ([3]).

Por ejemplo, se sabe que si f es convexa y verifica

$$(3.13) \quad \int^{+\infty} \frac{1}{f(s)f'(s)} ds < +\infty,$$

todas las soluciones de (3.12) explotan ([47]). Más aún, si f es creciente y verifica

$$(3.14) \quad \int^{+\infty} \frac{1}{f(s)} ds < +\infty,$$

el conjunto de blow-up está localizado en el borde, en este caso $B(u) = \{1\}$ (blow-up puntual) [43, 44]. Sin embargo, cuando f verifica (3.13) pero no (3.14), el conjunto de blow-up puede ser más grande. Puede ser todo el intervalo $[0, 1]$ (blow-up global), o incluso un subintervalo $[l, 1]$, $0 < l < 1$ (blow-up regional). Por ejemplo, se puede apreciar blow-up global o regional cuando se considera $f(s) = s \log^p(s)$ con $1/2 < p < 1$ o $p = 1$ respectivamente.

En [18] se prueba que los conjuntos de explosión de las aproximaciones numéricas de (3.12) (usando elementos finitos con mass lumping), o bien se concentran en el borde o bien son todo el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto el fenómeno de explosión regional no existe en este tipo de esquemas. De hecho se prueba que si la función f verifica (3.14) y es creciente, entonces la cantidad de nodos que explotan depende sólo de f y es independiente de h . Entonces el blow-up numérico sólo puede ser global o localizarse en un entorno de $\{x = 1\}$ cuando h tiende a cero.

A continuación presentamos algunos ejemplos para clarificar las similitudes y diferencias entre los problemas continuos y sus aproximaciones numéricas.

(I) $f(s) = s^p$.

Las soluciones numéricas explotan si y sólo si $p > 1$. La tasa de blow-up para los diferentes puntos está dada por

$$u_{N-k}(t) \sim (T_h - t)^{-1/(p-1)+k}$$

para $0 \leq k < 1/(p-1)$ y si $1/(p-1) = k \in \mathbb{N}$, entonces

$$u_{N-k} \sim -\ln(T_h - t).$$

El conjunto de blow-up está compuesto por K nodos, donde $K = \lceil 1/(p-1) \rceil$.

Queremos resaltar que a pesar de que la condición de blow-up, $p > 1$, es la misma que en el problema continuo, la tasa de blow-up no es correcta. El conjunto de blow-up verifica

$$B(u_h) = [1 - Kh, 1] = B(u) + [-Kh, 0].$$

(II) $f(s) = s(\ln s)^p$.

Las soluciones numéricas explotan si y sólo si $p > 1$. La tasa de blow-up es

$$\max_i u_i(t) \sim \exp\left(\frac{1}{(T_h - t)^{1/(p-1)}}\right).$$

El conjunto de explosión es todo el intervalo $[0, 1]$.

En este caso la condición de blow-up $p > 1$ es diferente de la del continuo (3.12), $p > 1/2$. El conjunto de blow-up del problema continuo es $B(u) = \{1\}$ si $p > 1$; un intervalo propio si $p = 1$; y todo el intervalo $[0, 1]$ si $1/2 < p < 1$. En este caso, el comportamiento del problema continuo es muy diferente al del discreto ya que los casos de blow-up son diferentes e incluso cuando ambos problemas explotan los conjuntos de blow-up difieren radicalmente.

(III) $f(s) = e^s$.

En este caso las soluciones numéricas explotan en un sólo punto, $B(u_h) = \{1\}$. La tasa de blow-up es $u_N(t) \sim -\ln(T_h - t)$. Para esta no linealidad, las tasas y conjuntos de blow-up coinciden.

En [4] se extienden los resultados obtenidos en [16] para el caso multidimensional y además se obtiene la tasa de explosión y se localiza el conjunto de blow-up numérico en un entorno del borde del dominio.

Vemos entonces que al considerar esquemas de malla fija para este tipo de problemas aparecen diferencias significativas entre las aproximaciones y las soluciones continuas: los casos de blow-up no coinciden así como tampoco la tasa y los conjuntos de explosión.

3.2. Métodos numéricos que adaptan la variable espacial. En [20] se introducen dos nuevos métodos numéricos que reproducen correctamente la tasa y el conjunto de explosión para el problema (3.12) considerando $f(u) = u^p$ (a este problema lo denominamos $(3.12)_p$).

El primer método desarrollado agrega puntos a la malla a medida que el tiempo avanza. Está basado en una semidiscretización espacial y agrega los puntos cerca del borde $x = 1$ cuando la solución numérica

se hace grande, produciendo una malla no uniforme que se concentra cerca de la singularidad.

El segundo método, que mueve los nodos en lugar de agregarlos, también usa una semidiscretización espacial, pero mueve los últimos K nodos que se acumulan en el borde $x = 1$ a medida que la solución se hace grande. Este procedimiento está inspirado en los *moving mesh methods*, que mueven la malla de manera de mantener la masa entre nodo y nodo equidistribuida. En este caso, se saca ventaja del conocimiento a priori de la localización espacial de la singularidad ($x = 1$), y entonces en lugar de mover toda la malla sólo se mueven los últimos nodos, manteniendo el resto de la malla fija.

Una ventaja del método que mueve puntos es que mantiene el tamaño del sistema de ecuaciones ordinarias constante en el tiempo, mientras que el método que agrega lo agranda indefinidamente a medida que el tiempo se acerca a la singularidad.

Ambos métodos están basados en la invarianza de escala de la ecuación del calor en la semirrecta con condición de borde no lineal en el extremo $x = 0$, $-u_x(0, t) = u^p(0, t)$. Es decir, si $u(x, t)$ es solución, entonces $u_\lambda(x, t) = \lambda^{\frac{1}{2(p-1)}} u(\lambda^{\frac{1}{2}} x, \lambda t)$ también lo es. En [24] se prueba que existe un perfil autosimilar que explota, de la forma

$$u_S(x, t) = (T - t)^{-\frac{1}{2(p-1)}} \varphi(\xi), \quad \xi = x(T - t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Para una expresión explícita del perfil φ ver [24]. Esta solución $u_S(x, t)$ da el comportamiento cerca del tiempo de blow-up T de todas las soluciones de (3.12)_p en el siguiente sentido:

$$(3.15) \quad u(x, t) \sim (T - t)^{-\frac{1}{2(p-1)}} \varphi(\xi),$$

para $x = 1 - \xi(T - t)^{1/2}$, $|\xi| \leq C$. Es decir, el comportamiento de las soluciones cerca del punto $(1, T)$ está dado por la solución autosimilar en la semirrecta. Los métodos adaptivos que presentamos usan este hecho para modificar la malla de manera tal que este comportamiento sea reproducido por las aproximaciones.

Para ambos métodos se prueba convergencia en el mismo sentido que para los problemas anteriores y la misma condición (necesaria y suficiente) para la aparición de blow-up ($p > 1$) en las aproximaciones. También se prueba que para estos métodos la tasa de blow-up es

$$\lim_{t \nearrow T_h} (T_h - t)^{\frac{1}{2(p-1)}} \|u_h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \varphi(0).$$

Es decir que se recupera la tasa de blow-up que habíamos perdido con los métodos de malla fija, ver Figura 3.

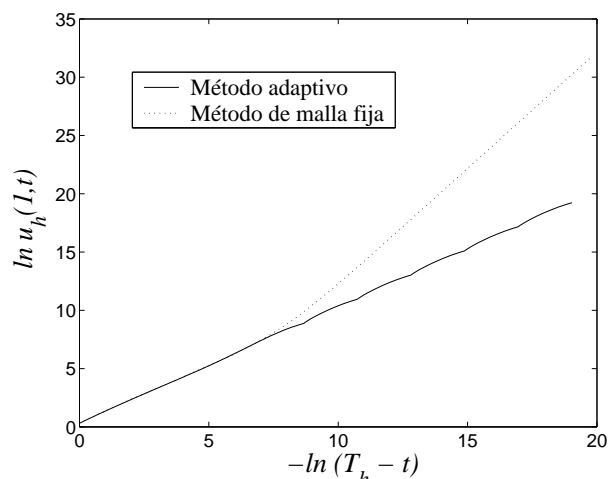


FIGURA 3. $p = 3/2$. Tasas de explosión para la solución numérica con malla fija y para la solución haciendo adaptividad.

Para estos métodos es posible acotar la diferencia entre T y T_h . Existen $\gamma > 0$ y $C > 0$ tales que

$$|T_h - T| \leq Ch^\gamma.$$

Así como también se recupera en forma exacta el conjunto de explosión,

$$B(u_h) = \{1\}.$$

Agradecimientos. Parte de este trabajo fue realizado en varias visitas de los autores a la Universidad Autónoma de Madrid y a la Universitat de Valencia. Agradecemos a estas instituciones por la hospitalidad y el buen ambiente de trabajo.

Es un placer agradecer a los españoles que siempre nos ayudaron, en especial a J. L. Vázquez, R. Ferreira, F. Quirós, A. de Pablo, J. M. Mazón, F. Andreu, J. Toledo, I. Peral, J. Garcia-Azorero, E. Zuazua. Y a los argentinos que siempre nos esperaron a la vuelta, R. Durán, J. Fernández Bonder, N. Wolanski, S. Martínez, G. Acosta.

REFERENCIAS

- [1] Luis M. Abia, J. C. López-Marcos, and Julia Martínez, *Blow-up for semidiscretizations of reaction-diffusion equations*, Appl. Numer. Math. **20** (1996), no. 1-2, 145–156, Workshop on the method of lines for time-dependent problems (Lexington, KY, 1995). MR **97a**:65074
- [2] ———, *On the blow-up time convergence of semidiscretizations of reaction-diffusion equations*, Appl. Numer. Math. **26** (1998), no. 4, 399–414. MR **99b**:65108

- [3] G. Acosta, R. G. Durán, and J. D. Rossi, *An adaptive time step procedure for a parabolic problem with blow-up*, Computing **68** (2002), no. 4, 343–373. MR 1 921 255
- [4] G. Acosta, J. Fernández Bonder, P. Groisman, and J. D. Rossi, *Numerical approximation of a parabolic problem with a nonlinear boundary condition in several space dimensions*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **2** (2002), no. 2, 279–294. MR 2003a:35117
- [5] Gabriel Acosta, Julián Fernández Bonder, Pablo Groisman, and Julio Daniel Rossi, *Simultaneous vs. non-simultaneous blow-up in numerical approximations of a parabolic system with non-linear boundary conditions*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **36** (2002), no. 1, 55–68. MR 1 916 292
- [6] Gabriel Acosta, Julián Fernández Bonder, and Julio D. Rossi, *Stable manifold approximation for the heat equation with nonlinear boundary condition*, J. Dynam. Differential Equations **12** (2000), no. 3, 557–578. MR 2001m:65122
- [7] J. M. Ball, *Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **28** (1977), no. 112, 473–486. MR 57 #13150
- [8] C. Bandle and H. Brunner, *Numerical analysis of semilinear parabolic problems with blow-up solutions*, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fis. Natur. Madrid **88** (1994), no. 2-3, 203–222. MR 97e:65089
- [9] Catherine Bandle and Hermann Brunner, *Blowup in diffusion equations: a survey*, J. Comput. Appl. Math. **97** (1998), no. 1-2, 3–22. MR 99g:35061
- [10] Marsha Berger and Robert V. Kohn, *A rescaling algorithm for the numerical calculation of blowing-up solutions*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), no. 6, 841–863. MR 89g:65154
- [11] Chris J. Budd, Shaohua Chen, and Robert D. Russell, *New self-similar solutions of the nonlinear Schrödinger equation with moving mesh computations*, J. Comput. Phys. **152** (1999), no. 2, 756–789. MR 2000e:78018
- [12] Chris J. Budd, Weizhang Huang, and Robert D. Russell, *Moving mesh methods for problems with blow-up*, SIAM J. Sci. Comput. **17** (1996), no. 2, 305–327. MR 96j:65094
- [13] Xu-Yan Chen and Hiroshi Matano, *Convergence, asymptotic periodicity, and finite-point blow-up in one-dimensional semilinear heat equations*, J. Differential Equations **78** (1989), no. 1, 160–190. MR 90e:35018
- [14] Yun Gang Chen, *Asymptotic behaviours of blowing-up solutions for finite difference analogue of $u_t = u_{xx} + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **33** (1986), no. 3, 541–574. MR 88a:65113
- [15] Carmen Cortázar, Manuel del Pino, and Manuel Elgueta, *The problem of uniqueness of the limit in a semilinear heat equation*, Comm. Partial Differential Equations **24** (1999), no. 11-12, 2147–2172. MR 2000k:35125
- [16] R. G. Duran, J. I. Etcheverry, and J. D. Rossi, *Numerical approximation of a parabolic problem with a nonlinear boundary condition*, Discrete Contin. Dynam. Systems **4** (1998), no. 3, 497–506. MR 99a:65122
- [17] Miguel Escobedo and Howard A. Levine, *Critical blowup and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **129** (1995), no. 1, 47–100. MR 96d:35063

- [18] Julián Fernández Bonder, Pablo Groisman, and Julio D. Rossi, *On numerical blow-up sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 7, 2049–2055 (electronic). MR **2003b**:35023
- [19] Julián Fernández Bonder and Julio D. Rossi, *Blow-up vs. spurious steady solutions*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 1, 139–144. MR **2001c**:35105
- [20] Raúl Ferreira, Pablo Groisman, and Julio D. Rossi, *Adaptive numerical schemes for a parabolic problem with blow-up*, IMA J. Numer. Anal., To appear.
- [21] ———, *Numerical blow-up for the porous medium equation with a source*, Preprint.
- [22] ———, *Numerical blow-up for a nonlinear problem with a nonlinear boundary condition*, Math. Models Methods Appl. Sci. **12** (2002), no. 4, 461–483. MR 1899 837
- [23] Marek Fila and Ján Filo, *Blow-up on the boundary: a survey*, Singularities and differential equations (Warsaw, 1993), Banach Center Publ., vol. 33, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1996, pp. 67–78. MR **98c**:35076
- [24] Marek Fila and Pavol Quittner, *The blow-up rate for the heat equation with a nonlinear boundary condition*, Math. Methods Appl. Sci. **14** (1991), no. 3, 197–205. MR **92a**:35023
- [25] Hiroshi Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **13** (1966), 109–124 (1966). MR 35 #5761
- [26] Victor A. Galaktionov and Juan L. Vázquez, *The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **8** (2002), no. 2, 399–433, Current developments in partial differential equations (Temuco, 1999). MR **2003c**:35067
- [27] Yoshikazu Giga and Robert V. Kohn, *Nondegeneracy of blowup for semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), no. 6, 845–884. MR **90k**:35034
- [28] Pablo Groisman, Fernando Quirós, and Julio D. Rossi, *Non-simultaneous blow-up in a numerical approximation of a parabolic system*, Comput. Appl. Math., To appear.
- [29] Pablo Groisman, *Adapting the time-step to recover the asymptotic behavior in a blow-up problem*, Preprint.
- [30] Pablo Groisman and Julio D. Rossi, *Dependence of the blow-up time with respect to parameters and numerical approximations for a parabolic problem*, Preprint.
- [31] ———, *Asymptotic behaviour for a numerical approximation of a parabolic problem with blowing up solutions*, J. Comput. Appl. Math. **135** (2001), no. 1, 135–155. MR **2002g**:35101
- [32] Pablo Groisman, Julio D. Rossi, and Hatem Zaag, *On the dependence of the blow-up time with respect to the initial data in a semilinear parabolic problem*, Comm. Partial Differential Equations, To appear.
- [33] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, *Flat blow-up in one-dimensional semilinear heat equations*, Differential Integral Equations **5** (1992), no. 5, 973–997. MR **93d**:35065
- [34] ———, *Generic behaviour of one-dimensional blow up patterns*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **19** (1992), no. 3, 381–450. MR **94b**:35048

- [35] Bei Hu and Hong-Ming Yin, *The profile near blowup time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition*, Trans. Amer. Math. Soc. **346** (1994), no. 1, 117–135. MR **95c**:35040
- [36] Weizhang Huang, Yuhe Ren, and Robert D. Russell, *Moving mesh partial differential equations (MMPDES) based on the equidistribution principle*, SIAM J. Numer. Anal. **31** (1994), no. 3, 709–730. MR **94m**:65149
- [37] Stanley Kaplan, *On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963), 305–330. MR **28** #3258
- [38] Marie-Noëlle Le Roux, *Semidiscretization in time of nonlinear parabolic equations with blowup of the solution*, SIAM J. Numer. Anal. **31** (1994), no. 1, 170–195. MR **95a**:65148
- [39] Julián López-Gómez, Viviana Márquez, and Noemí Wolanski, *Blow up results and localization of blow up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition*, J. Differential Equations **92** (1991), no. 2, 384–401. MR **92j**:35098
- [40] Frank Merle, *Solution of a nonlinear heat equation with arbitrarily given blow-up points*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), no. 3, 263–300. MR **92k**:35160
- [41] Tomoyasu Nakagawa, *Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u_2$* , Appl. Math. Optim. **2** (1975/76), no. 4, 337–350. MR **54** #11797
- [42] Fernando Quirós and Julio D. Rossi, *Non-simultaneous blow-up in a semilinear parabolic system*, Z. Angew. Math. Phys. **52** (2001), no. 2, 342–346. MR **2002c**:35145
- [43] D. F. Rial and J. D. Rossi, *Blow-up results and localization of blow-up points in an N -dimensional smooth domain*, Duke Math. J. **88** (1997), no. 2, 391–405. MR **98i**:35079
- [44] ———, *Localization of blow-up points for a parabolic system with a nonlinear boundary condition*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **48** (1999), no. 1, 135–152. MR **2000j**:35123
- [45] Alexander A. Samarskii, Victor A. Galaktionov, Sergei P. Kurdyumov, and Alexander P. Mikhailov, *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, de Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 19, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995, Translated from the 1987 Russian original by Michael Grinfeld and revised by the authors. MR **96b**:35003
- [46] Takeo K. Ushijima, *On the approximation of blow-up time for solutions of nonlinear parabolic equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36** (2000), no. 5, 613–640. MR **2001j**:35148
- [47] Wolfgang Walter, *On existence and nonexistence in the large of solutions of parabolic differential equations with a nonlinear boundary condition*, SIAM J. Math. Anal. **6** (1975), 85–90. MR **51** #1122

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FCEYN, UBA,
(1428) BUENOS AIRES, ARGENTINA.

E-mail address: `pgroisma@dm.uba.ar`

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE,
CASILLA 306, CORREO 22, SANTIAGO, CHILE.

E-mail address: `jrossi@mat.puc.cl`