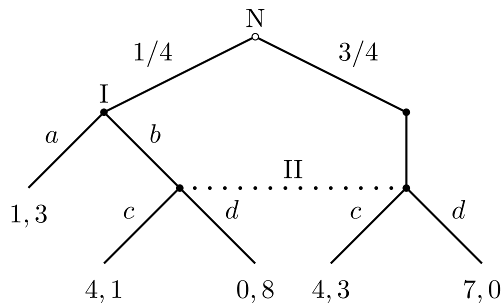
Todos Contra Todos

Práctica 3

---

1. Pasar el siguiente juego a la forma normal:



2. Hallar los niveles de seguridad, las estrategias maximin, y equilibrios de Nash puros en los siguientes juegos:

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (5,0) \\ (0,5) & (4,4) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (3,10) & (1,5) \\ (2,0) & (4,20) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (1,4) & (4,1) \\ (2,2) & (3,3) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (0,0) & (0,-1) \\ (1,0) & (-1,3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (-3,-4) & (2,-1) & (0,6) & (1,1) \\ (2,0) & (2,2) & (-3,0) & (1,-2) \\ (2,-3) & (-5,1) & (-1,-1) & (1,-3) \\ (-4,3) & (2,-5) & (1,2) & (-3,1) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (0,0) & (1,2) & (2,0) \\ (0,1) & (2,0) & (0,1) \end{pmatrix}$$

3. Xérez y Yérez comienzan la última parte de un programa de TV con \$400 y \$500 resp. Ambos deben decidir si pasar o apostar, sin saber la elección del otro. Si uno pasa, conserva la plata que tiene. Si Xérez apuesta, gana \$200 más, ó pierde los \$400 con probabilidad 1/2. Si Yérez apuesta, gana o pierde \$200 con probabilidad 1/2. El participante con más plata al final gana otros \$400.

   Dibuje el árbol de Kuhn, plantee el juego en forma estratégica, y encuentre los niveles de seguridad.

4. Dibuje el árbol y resuelva por inducción hacia atrás. Plantee el juego en forma estratégica:

   Pere Lluis Borgia: Un día de estos voy a cortarle las narices[1] a Orsini.

   Rodrigo Borgia: Mejor córtale la cabeza. Si le cortas las narices buscará vengarse.

5. **El Gallina, (J. Dean, Rebelde sin Causa):** dos jugadores corren uno hacia el otro, y chocarán si no dobla alguno. Si ambos doblan a la vez, ganan 1 cada uno. Si uno dobla, pierde 1 y el otro gana 2. Si no doblan, pierden $a > 2$.

   a) Plantear la matriz de pago.

[1] Dijo 'cojones', pero conviene para que las estrategias queden N-C en lugar de C-C

b) Hallar los niveles de seguridad, las estrategias maximin, y el pago promedio si las utilizan.

c) Hallar los equilibrios de Nash.

d) Suponga que aún eligiendo doblar, hay una probabilidad p de que el jugador siga. Analizar este juego.

6. **Halcones y Palomas:** hallar los equilibrios de Nash en el siguiente juego:

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (0,3) \\ (3,0) & (-4,-4) \end{pmatrix}$$

7. **Cazando cornudos (llamado así por J-J Rousseau):** hallar los equilibrios de Nash en el siguiente juego:

$$\begin{pmatrix} (2,2) & (1,0) \\ (0,1) & (4,4) \end{pmatrix}$$

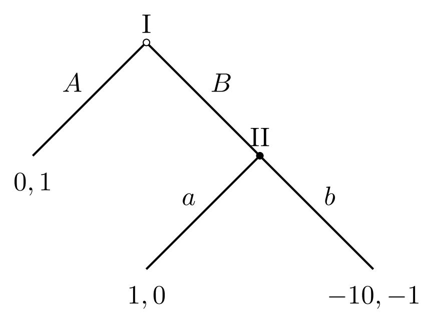
8. Analice simultáneamente, con parámetros arbitrarios, los juegos Halcones y Palomas, Cazando Cornudos, el Gallina, y el Dilema del Prisionero. ¿Qué observa?

9. Un equilibrio de Nash con estrategias puras es un *equilibrio perfecto para subjuegos* si en cada vértice del árbol, el vector restringido al subjuego que comienza en ese vértice es un equilibrio de Nash puro. Si el juego es de información perfecta, un *equilibrio perfecto para subjuegos* se encuentra por inducción hacia atrás.

a) Resolver el siguiente juego por inducción hacia atrás.

b) Pasarlo a forma estratégica.

c) Hallar otro equilibrio de Nash puros y verificar que no es un equilibrio perfecto para subjuegos.



10. Demuestre que en un juego simétrico, $A = B^t$, existe un equilibrio de Nash simétrico.

11. Encuentre todos los equilibrios de Nash en los siguientes juegos. De los simétricos, determine cuáles son evolucionariamente estables.

$$\begin{pmatrix} (4,4) & (2,5) \\ (5,2) & (3,3) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (4,4) & (3,2) \\ (2,3) & (5,5) \end{pmatrix}$$

12. Dos leones ven tres antílopes y se lanzan a cazar uno. Si ambos cazan el mismo, lo comparten. Si los antílopes tienen un valor l, m y s, escriba la matriz del juego. Suponga que $l > m > s$, $l < 2m$, y

$$\frac{l}{2}\left(\frac{2l-m}{l+m}\right) + m\left(\frac{2m-l}{l+m}\right) < s.$$

Hallar los equilibrios puros y el equilibrio mixto simétrico.

13. **(*)** Xérez tira una moneda y la probabilidad de que salga cara es p. Para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$, si Xérez tira k caras consecutivas puede parar y desafiar a Yérez a que tire el mismo número de caras. Yérez gana si y sólo si logra k caras consecutivas. Si a Xérez le sale ceca antes de desafiar a Yérez, frenan y empiezan otra vez pero con los roles de los jugadores intercambiados. Resuelva para todo p, y analice el límite cuando p tiende a 1.

14. Un vendedor de pescado sabe si es fresco o no. El cliente sabe que es fresco con probabilidad 2/3. El cliente pregunta si es fresco, y el vendedor responde 'si' o 'no', y el cliente elige comprar o no. El pago del vendedor es 6 por decir la verdad, y 6 por ser creíble. Si el pescado es fresco, el pago del cliente es 3 por comprarlo y -1 por irse sin comprar. Si no, 0 por irse sin comprar y -8 por comprarlo. Hallar los equilibrios de Nash y las estrategias óptimas.

15. **(*) Cournot y Stackelberg**

a) Supongamos que en el modelo de Cournot las firmas tienen distintos costos de producción, sean c_1 y c_s los costos unitarios de cada una, amobs valores menores que $a/2$. Hallar el equilibro de Cournot.

b) Extender el modelo de Cournot a tres firmas, que producen q_i y tienen el mismo costo unitario de producción c. El precio de venta es $P(Q) = (a - Q)^+$, donde $Q = q_1 + q_2 + q_3$. ¿Cuál es el equilibrio?

c) En el duopolio de Cournot, suponga que el precio es

$$P(Q) = \begin{cases} \frac{1}{4}Q^2 - 5Q + 26 & 0 \leq Q \leq 10 \\ 1 & Q \geq 10 \end{cases}$$

Tienen el mismo costo unitario de producción 1, y la producción $q_i \in [0, 10]$.

i) Hallar la producción si fuese un monopolio y calcule la ganancia.

ii Demuestre que si $q_2 = 5/2$, entonces $u_1(q_1, 5/2)$ se maximiza en $5/2$. Demuestre que esto implica que $q_1 = q_2 = 5/2$ es un equilibrio para el duopolio.

d) Extender el modelo de Stackelberg a tres firmas que tienen el mismo costo unitario de producción c. La firma I anuncia su producción q_1. Luego, II anuncia q_2, y III anuncia q_3. El precio de venta es $P(Q) = (a - Q)^+$, donde $Q = q_1 + q_2 + q_3$. ¿Cuál es el equilibrio?