Análisis 1
Primer Cuatrimestre — 2006
Práctica 6

1. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$
   b) $f(x,y,z) = ye^x + z$
   c) $f(x,y) = x^2 \sin^2(y)$
   d) $f(x,y) = \sin x$
   e) $f(x,y,z) = z(cos(xy) + ln(x^2 + y^2 + 1))$
   f) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$
   g) $f(x,y) = \int_x^y e^{\sin t} dt$
   h) $f(x,y) = \int_x^{x^2+y^2} e^t dt$
   i) $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$

2. Calcule

   a) $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$ para $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$
   b) $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)$ para $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln(y)$
   c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$, para $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. Dadas las funciones

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = |x| + |y|$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Demuestre que en el origen

   a) f_1 es discontinua aunque existen las derivadas parciales.
   b) f_2 no admite derivadas parciales pero es continua.
   c) f_3 es diferenciable pero sus derivadas parciales son discontinuas.

4. Estudie la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen:

a) $f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} x \sin\left(4 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y} \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$

5. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Muestre que f no es diferenciable en $(0,0)$. Sin embargo, para cualquier curva diferenciable $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que pase por el origen una sola vez, se cumple que $f(\Phi(t))$ es derivable para todo t.

6. Encuentre la ecuación del plano que pasa por $(2,1,0), (3,2,-1), (2,-1,1)$.

7. *a*) Encuentre dos vectores no paralelos ortogonales a $(-1,1,2)$.

   b) Escriba la ecuación del plano que pasa por el punto $(0,1,2)$ y es ortogonal al vector $(1,1,1)$.

8. *a*) Escriba la ecuación del plano que pasa por el punto (a,b,c) y es ortogonal al vector (v_1,v_2,v_3).

   b) Encuentre la ecuación de la recta normal al plano de ecuación $6x - 2y + 4z = 0$ que pasa por el punto $(3,1,1)$.

9. *a*) Encuentre un vector unitario perpendicular a los dos vectores $(1,1,1)$ y $(3,1,0)$.

   b) Encuentre un vector normal al plano que pasa por los puntos $(1,0,1)$, $(3,4,0)$ y $(1,-1,3)$.

10. *a*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2)$$

   1) Verifique que f es una transformación lineal y calcule su matriz asociada.
   2) Calcule la matriz de la diferencial $Df(x)$.
   3) ¿Qué relación hay entre estas dos matrices?

   b) Muestre que lo ocurrido en el item anterior vale para cualquier transformación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

11. Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ las transformaciones lineales dadas por

$$F(x_1, x_2) = (2x_1, x_1 + x_2, 7x_1 - x_2)$$
$$G(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 - 4x_2, 2x_1 - x_2 + x_3, 5x_2)$$

   a) Calcule las matrices asociadas a F y a G.

   b) Calcule $G \circ F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ y su matriz asociada, ¿qué relación hay entre ésta y las halladas en a)? Justifique la respuesta.

12. Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = 2x - 3y$

   a) Calcule la ecuación del plano $Graf(T)$.

   b) Encuentre un sistema de generadores de dicho plano.

13. *a*) Encuentre una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico sea el plano

$$\pi = \{(x, y, z) \in: \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

   b) De la matriz en la base canónica asociada a la f hallada en a).

14. Si se corta la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano de ecuación $y = 0$ se obtiene una circunferencia. De la parametrización de la recta tangente a dicha circunferencia en el punto $(1, 0, 0)$ y en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

15. Estudie la diferenciabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados y escriba la ecuación del plano tangente cuando éste exista.

   a) $f(x, y) = xy + 1 - \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$ en $(1, 5)$ y en $(2, 2)$.

   b) $f(x, y) = x^{1/4}y^{1/4}$ en $(0, 0)$ y en $(16, 1)$.

   c) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ en (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$.

   d) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en $(0, 0)$ y en $(1, 0)$.

   e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en $(0, 0)$ y en $(-1, 1)$.

16. Calcule $DF(x)$ para las siguientes funciones:

   a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, y)$

   b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$

   c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$

   d) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x) = ||x||^2$

17. Calcule el gradiente de f para

a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}+z^2$

b) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$

c) $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

18. Calcule los ángulos formados por el gradiente de la función $f(x,y) = x^{\sqrt{3}} + y$ en el punto $(1,1)$ y los ejes de coordenadas.

19. Grafique las siguientes curvas en el plano o el espacio seguń corresponda

    a) $\sigma(t) = (1,1,t)$

    b) $\sigma(t) = (1,1,t^2)$

    c) $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$

    d) $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t))$

    e) $\sigma(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$

20. Determinar los vectores velocidad y aceleración y la ecuación de las rectas tangentes a las siguientes curvas en t_0

    a) $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t_0 = 0$

    b) $\sigma(t) = (\cos^2(t), 3t - t^3, t), \quad t_0 = 0$

    c) $\sigma(t) = (\operatorname{sen}(3t), \cos(3t), 2t), \quad t_0 = 1$

21. Encuentre curvas σ que representen los siguientes conjuntos o trayectorias.

    a) $\{(x,y)/y = e^x\}$

    b) $\{(x,y)/4x^2 + y^2 = 1\}$

    c) $\{(x,y,z)/x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1,\ z = x^2 + y^2,\ z \neq 0\}$

22. Sean $f(u,v,w) = u^2 + v^3 + wu$ y $g(x,y) = x \sin y$. Dadas

    $$u(t) = t^2 + 1, v(t) = \sin t, w(t) = t - 1 \text{ y } x(t) = \sin t, y(t) = t$$

    caclule

    $$\frac{d}{dt} f\left(u(t), v(t), w(t)\right) \text{ y } \frac{d}{dt} g\left(x(t), y(t)\right)$$

    a) usando la regla de la cadena

    b) sustituyendo

23. Sean $f(u,v) = e^{uv}\sin(u^2+v^2), g(u,v,w) = \ln(u^2+v^2+w^2+1)$. Dadas

    $$u(x,y) = x + y, v(x,y) = xy, w(x,y) = x - y + 1$$

    calcule las derivadas parciales de las funciones

    $$f\left(u(x,y), v(x,y)\right) \text{ y } g\left(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\right)$$

a) usando la regla de la cadena

b) sustituyendo

24. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \int_0^{2y} x^2 z + z^3 dz$

b) $f(x,y) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin(xyz) dz$

c) $f(x,y,z) = \int_5^{x+2y} \sin(x^2 + yz + t) dt$

25. a) ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}_{>0}$ es

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^p \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

diferenciable en $\mathbb{R}^2$?¿Para qué valores de p es f de clase C^1?

b) La función f se puede escribir como $g(x^2+y^2)$ con $g(t) = t^p \text{sen} \frac{1}{t}$ si $t > 0$ y $g(0) = 0$. ¿Qué conclusiones se obtienen si se estudia la diferencibilidad de g?

26. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $F(x,y) = G\left(f(x)g(y), f(x)h(y)\right)$

b) $F(x,y) = G(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$

c) $F(x,y) = G(x, G(x,y))$

d) $F(x,y) = f(x)^{g(y)} \quad$ (si $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$)

e) $F(x,y) = G\left(\int_x^{f(y)} h(t)dt, g(y)\right)$

27. Usando la expresión

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$$

para una función f adecuada, aproxime $\left(0{,}99e^{0{,}2}\right)^8$.

28. Calcule la derivada direccional de f en x_0 en la dirección v siendo:

a) $f(x,y) = \sin x \cos y \qquad x_0 = (1,1) \qquad v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $f(x,y) = x^4 + \ln(xy) \qquad x_0 = (e,1) \qquad v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

c) $f(x,y,z) = e^z(xy + z^2) \qquad x_0 = (0,1,0) \qquad v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d) $f(x,y,z) = y + yz + zxy \qquad x_0 = (1,1,1) \qquad v = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad x_0 = (1,1,1) \qquad v = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

f) $f(x,y,z) = x^{yz} \qquad x_0 = (e,e,0) \qquad v = \left(\frac{12}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13}\right)$

Si f es diferenciable en x_0 verificar que la derivada calculada coincide con $\nabla f(x_0) \cdot v$.

29. Dada la superficie $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$. Muestre que el vector $v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es normal a la superficie S en el punto $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e interprete este hecho geométricamente.

30. Sea $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$

   a) Usando la definición de derivada direccional, muestre que

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

   y que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

   b) Muestre que f es continua en $(0, 0)$.

   c) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

31. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que la función definida por $h(x) = f(x)g(x)$ es diferenciable en x_0 y

   $$\nabla h(x_0) = f(x_0)\nabla g(x_0) + g(x_0)\nabla f(x_0)$$

   ¿Qué relación existe entre las derivadas direccionales de h en x_0 en la dirección $v(||v|| = 1)$ y las derivadas direccionales de f y g en x_0 en la misma dirección?

32. Muestre que la derivada direccional de f en el punto (x_0, y_0) en la dirección $-v$ (recordar que $||v|| = 1$) es igual a la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de v pero con el signo opuesto, o sea

   $$-\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial(-v)}(x_0)$$

33. *a*) Pruebe que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y tal que para algún $v, ||v|| = 1$ se cumple que $Df(x) \cdot v = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces en cada recta que lleve la dirección de v, f será constante.

   b) Construya ejemplos de lo demostrado anteriormente para $n = 2$ y $v = (1, 0), (0, 1)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

34. Calcule las derivadas direccionales de f en el origen en cualquier dirección $v, ||v|| = 1$, siendo

   $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

35. Calcule ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados

   a) $x^{10}y - \cos(z)x + 7 = 0 \qquad x_0 = (7, 0, 0)$

   b) $xy - z\ln(y) + e^{xy} = 1 \qquad x_0 = (0, 1, 1)$

c) $xy\sin(y) + ze^{xy} - z^2 = 0 \qquad x_0 = (4, 0, 1)$

d) $\cos(x)\cos(y)e^z = 0 \qquad x_0 = (\pi/2, 1, 0)$

36. Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0) y $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y, z) = f(x, y) - z$, vea qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de f en (x_0, y_0) y el plano tangente a una superficie de nivel de h en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

37. Encuentre los planos tangentes a la superficie

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\right\}$$

que sean paralelos al plano $\Pi : x + 4y + 6z = 8$.

38. Encuentre la dirección en que la función $z = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(1, 1)$.¿Cuál es la magnitud $||\nabla z||$ en esta dirección? Interprete geométricamente esta magnitud.

39. Si $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ denota la altura de una montaña en la posición (x, y).¿En qué dirección desde $(1, 0)$ debería uno comenzar a caminar para escalar más rápido?

40. a) Muestre que si $\nabla f(x_0) \neq 0$ entonces $-\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f decrece más rápidamente.

b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función $f(x, y) = 10 + 6\cos(x)\cos(y) + 4\cos(3y)$. En el punto $(\pi/3, \pi/3)$ encuentre las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento.

41. El capitán Ralph se encontró en el lado soleado de Mercurio y notó que su traje espacial se fundía. La temperatura en su sistema rectangular de coordenada en su vecindad viene dada por

$$T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-zy} + e^{-3z}$$

Si él está ubicado en $(1, 1, 1)$. ¿En qué dirección deberá comenzar a moverse con el fin de enfriarse lo más rápido posible?

42. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Pruebe que $|DF(x, y)| \neq 0 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ pero que F no es inyectiva.

43. Determine si las siguientes aplicaciones son localmente inversibles de clase C^1 en P y calcular el diferencial de F^{-1} en el punto $F(P)$,

a) $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ en $P = (x, y) \neq (0, 0)$

b) $F(x, y) = (\sin x, \cos(xy))$ en $P = (\pi, \pi/2)$

44. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x^3y + 3x^2y^2 - 7x - 4y, xy + y)$

a) Demostrar que existe un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 1) \in U$, un entorno $V \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(-7, 2) \in V$ y una inversa para F, $F^{-1} : V \to U$, C^1 tal que $F^{-1}(-7, 2) = (1, 1)$.

b) Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 tal que $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 2$, $\frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = 5$ y $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calcular $\frac{\partial (goF^{-1})}{\partial v}(-7,2)$.

45. Sea $f(x,y,z) = x^3 - 2y^2 + z^2$. Demuestre que $f(x,y,z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y,z)$ en el punto $(1,1,1)$. Encuentre $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1)$.

46. Encuentre la solución $y = f(x,z)$ de $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ en un entorno de los siguientes puntos del plano xz y escribir explícitamente esos entornos

    a) $(5,10)$
    b) $(0,64)$

47. Determine las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones

    a) $f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1 \quad P = (2,0)$
    b) $g(x,y) = x^5 + y^y + xy = 3 \quad P = (1,1)$
    c) $h(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0 \quad P = (0,0,2)$

48. El paraboloide $3x^2 + 2y^2 - 2z = 1$ y la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$ se cortan en el punto $(1,1,2)$:

    a) Hallar el plano tangente en dicho punto, probar que ambos planos se cortan ortgonalmente y encontrar la recta de intersección de los dos planos tangentes.
    b) Usando el teorema de la función implícita, probar que en dicho punto, las dos superficies se cortan ortogonalmente y que la recta tangente a la curva de intersección de las dos superficies en dicho punto es la intersección de los dos planos tangentes.

49. Probar que existe una curva que es intersección de las superficies $z = 4x^2 - 3y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ en el punto $P = (2,-2,4)$. Hallar la recta tangente de dicha curva en el punto P.

Dirichlet.pdf

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
1805–1859, Francia-Alemania