
ANÁLISIS 1
Primer Cuatrimestre — 2006
Práctica 4

1. Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales convergen las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$

2. Escribir los primeros cuatro términos del desarrollo en serie de potencias de x de las siguientes funciones:

a) $\tan x$

c) $\ln(1+e^x)$

b) $e^{\cos x}$

d) $(1+x)^x$

3. Calcular la serie de Maclaurin de las siguientes funciones: e^x , e^{x^2} , e^{-x^2} , a^x y $\sin x$.
4. Aprovechando las fórmulas del desarrollo en serie de potencias de las funciones e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ y $(1+x)^\alpha$, desarrollar en series de potencias las siguientes funciones y determinar los radios de convergencia de esos desarrollos:

a) $\frac{1}{1-x}$;

g) $\frac{1}{4-x^4}$;

b) $\sqrt{1+x}$;

h) $\frac{e^x-1}{x}$;

c) $\frac{1}{10+x}$;

i) $\frac{1}{(1+x)^2}$;

d) $\frac{1}{1+x^2}$;

j) $\arctan x$;

e) $\cos^2 x$;

k) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$.

f) $(1+x)e^{-x}$;

5. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ si $|x| < 1$.
6. a) Calcular el desarrollo en serie de $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, indicando el radio de convergencia.
- b) Comprobar que, usando el desarrollo obtenido, se puede escribir al $\ln a$ como una serie convergente de números racionales, siempre que sea $a \in \mathbb{N}$. Escriba una fórmula $\ln 5$.

7. Calcular:

- a) $\cos 10^\circ$ con error menor que 10^{-4} ;
- b) $\sin 18^\circ$ con error menor que 10^{-3} ;
- c) $\arctan 1/5$ con error menor que 10^{-4} ;
- d) $\ln 5$ con error menor que 10^{-3} ;
- e) \sqrt{e} con error menor que 10^{-4} .

8. En cada caso, desarrollar en serie (indicando el radio de convergencia) las funciones f y $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ y aproximar,

- a) $\int_0^1 f(x) dx$ con error menor que 10^{-4} , para $f(x) = e^{-x^2}$;
- b) $\int_0^1 f(x) dx$ con error menor que 10^{-3} , para $f(x) = \frac{\arctg x}{x}$;
- c) $\int_0^1 f(x) dx$ con error menor que 10^{-4} , para $f(x) = \cos \sqrt{x}$.

9. Proponiendo una solución dada por una serie de potencias, integrar las siguientes ecuaciones diferenciales y determinar el dominio de validez de las soluciones obtenidas.

- a) $y' + xy = 0, y(0) = 0$;
- b) $y'' + xy' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$;
- c) $y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$. ¿Cuál es la función obtenida en este caso?

10. Encuentre los primeros cuatro términos no nulos del desarrollo en serie de potencias de las soluciones de las siguientes ecuaciones

- a) $y'' = x + y^2, y(0) = 0, y'(0) = 1$;
- b) $y' = x^2y + y^3, y(0) = 1$;
- c) $y'' = xy^2, y(0) = 1, y'(0) = 1$.



Brook Taylor
1685–1731, Inglaterra