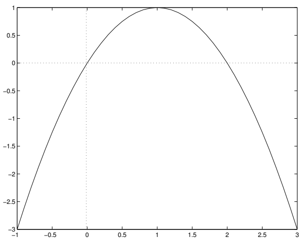
Análisis 1
Primer Cuatrimestre — 2006
Práctica 2

1. Si f tiene gráfico:



trazar el gráfico de las funciones $g_1, g_2, \ldots, g_7$, si es

a) $g_1(x) = f(x-3)$;
b) $g_2(x) = f(2x)$;
c) $g_3(x) = f(x) - 3$;
d) $g_4(x) = 2f(x)$;
e) $g_5(x) = -f(x)$;
f) $g_6(x) = f(-x)$;
g) $g_7(x) = |f(x)|$.

2. Esbozar el gráfico de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = \sin x$,
b) $f_2(x) = 3\sin x$,
c) $f_3(x) = \sin 3x$.
d) $f_4(x) = \sin(x+\pi)$,
e) $f_5(x) = \sin(x+2\pi)$.
f) $f_6(x) = \sin(x+3\pi)$.

3. Graficar las funciones

a) $f_1(x) = e^x$;
b) $f_2(x) = e^{-x}$;
c) $f_3(x) = -e^x$;
d) $f_4(x) = -e^{-x}$.

4. Construir las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{si } -1 \le x \le 0; \\ 1-2x, & \text{si } 0 \le x \le 1; \end{cases}$$

b) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } 0 \le x \le 1; \\ x, & \text{si } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

5. Usando la propiedad del gráfico de funciones inversas, graficar la función dada por $f(x) = \ln x$.

6. *a*) Si $\phi(x) = \frac{x-1}{3x+5}$, escribir las expresiones $\phi(\frac{1}{x})$ y $\frac{1}{\phi(x)}$.

   b) Si $\Psi(x) = \sqrt{x^2+4}$, escribir las expresiones $\Psi(2x)$ y $\Psi(0)$.

   c) Si $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^3$, hallar $f(g(2))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$.

7. Hallar el dominio natural de las siguientes funciones:

   a) $f_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

   b) $f_2(x) = \sqrt{2+3x-x^2}$

   c) $f_3(x) = \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$

   d) $f_4(x) = \dfrac{\ln(1+4x)}{x}$

   e) $f_5(x) = \dfrac{\sin(\sqrt[3]{x-6}-\sqrt{x})}{x^3+8}$

8. Demostrar, usando sólo la definición, que:

   a) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1} = 0;$

   b) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}\ (a \geq 0);$

   c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = 1;$

   d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \dfrac{2}{3};$

   e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x} = +\infty;$

   f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-2}{2x^2-3} = \dfrac{1}{2};$

   g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-4}{x+6} = +\infty.$

9. Para cada una de las siguientes funciones:

   $f_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x);$

   $f_2(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ -x, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$

   $f_3(x) = \begin{cases} \cos(\pi x/2), & \text{si } |x| \leq 1; \\ |x-1|, & \text{si } |x| > 1; \end{cases}$

   $f_4(x) = [x]\sin \pi x;$

   $f_5(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x > 0; \\ x^2+1, & \text{si } x \leq 0; \end{cases}$

   $f_6(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x < 0; \\ -x^2+\frac{5}{2}x, & \text{si } x > 1; \end{cases}$

   $f_7(x) = x^2 - [x^2];$

   $f_8(x) = x\arctan(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1});$

   $f_9(x) = \begin{cases} \frac{\sin(e^2x)}{x}, & \text{si } x < 0; \\ (1+2x)^{1/x}, & \text{si } 0 < x < 1; \\ \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & \text{si } x > 1; \end{cases}$

   a) Calcular su dominio natural.

   b) Estudiar la continuidad en cada punto de su dominio. En los puntos de discontinuidad, indicar de qué tipo se trata.

   c) En los puntos que no pertenezcan al dominio, definirla (si es posible) de modo que resulte continua.

10. Calcular

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{[x^2]-[x]^2}{x^2-9}$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin x$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^3+3)-\ln(x^2+2)$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x+\cos x}{e^x+\ln x}$.

11. *a*) Sean n y x tales que $n \leq x < n+1$. Mostrar que es

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}.$$

b) Usando esto, probar que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

12. Cacular los límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/\tan x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$.

13. Sea $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ polinomios de grado n y m respectivamente. Suponiendo que $a_n, b_m > 0$, investigue el límite

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

cuando $n > m$, $n = m$ y $n < m$.

Analizar también los correspondientes límites cuando $x \to -\infty$.

14. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-3x^3+2x-1}{2x^3+5}$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+2}{5x^3-3x^2+x-9}$;

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x^5+x^3-4}{-8x^4+6x}$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^m}{x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}$.

15. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua, entonces $|f|$ también es continua. ¿Vale la recíproca?

16. *a*) Mostrar que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que si $x > M$,

$$10^{-(10^{10})}x^2 - 10^{10^{10}} > 10^{10^{10}}x + 10^{10^{10}}.$$

b) Encontrar el mínimo M que tiene esa propiedad.

17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}$.

    a) Calcular $f(\sqrt{2})$.

    b) Calcular $\operatorname{Im}(f)$.

18. *a*) Hallar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x)^2 - e^x = 0$.

    b) Demostrar que la ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una raíz positiva y menor o igual que 1.

    c) Demostrar que una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

    $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

    es sobreyectiva.

    d) Sea $f(x) = 3x^7 - 4x^6 - 5x^5 + 3x^4 - \sin x$. Calcular $\operatorname{Im}(f)$.

    e) Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces debe ser constante.

    f) Probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

19. Sea $f : x \in (0, +\infty) \mapsto x \sin x \in \mathbb{R}$.

    a) Probar que existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}_{>0}$ tales que

    $$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = -\infty.$$

    b) Probar que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$.

20. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que cualquiera sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

    $$f(x) = \frac{x+1}{|x|+2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right).$$

    Mostrar que:

    a) f es continua.

    b) f no puede extenderse a todo $\mathbb{R}$ de manera que resulte allí discontinua.

    c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ y $|f(x)| < 1$.

    d) $\operatorname{Im}(f) = (-1, 1)$.

21. Sea f continua y estrictamente creciente en la semirecta $[a, +\infty)$ y tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = M$. Probar que $\operatorname{Im}(f) = [f(a), M)$.

    Mostrar con un ejemplo que si sólo se pide que f sea creciente, entonces puede ser $\operatorname{Im}(f) \neq [f(a), M)$.

22. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente y continua. Supongamos que además es

    $$\lim_{x\to a^+} f(x) = c \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = d.$$

    Mostrar que:

a) $\operatorname{Im}(f) = (c, d)$.

b) Existe $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ y es continua.

c) $\lim_{x \to c^+} f^{-1}(x) = a$ y $\lim_{x \to d^-} f^{-1}(x) = b$.

d) Encontrar contraejemplos para las dos últimas afirmaciones si f no es creciente o f no es continua.

23. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función continua y sean $T = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$ y $B = \inf_{x \in (a,b)} f(x)$. Demostrar que $(B, T) \subseteq \operatorname{Im}(f)$.

24. Sea D un subconjunto denso en (a, b) y sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f \equiv g$ en D. Mostrar que $f \equiv g$ en (a, b).

25. *a*) Probar que existe $x \in (1, 2)$ tal que $x^3 - 3x + 1 = 0$.

    b) Probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = x$.

    c) Encontrar un número r tal que el polinomio $x^9 - 100x^4 + 3x^3 + 12$ tenga al menos una raíz en el intervalo $(-r, r)$.

26. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas que no se anulan. Supongamos que $|f(x)| = |g(x)|$ si $x \in [a, b]$ y que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$. Mostrar que $f \equiv g$ en $[a, b]$.

27. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Im}(f) = [a, b] \cup [c, d]$ con $a < b < c < d$. ¿Es f continua?

28. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(ax) = af(x)$ si $x, a \in \mathbb{R}$. Mostrar que f es continua. Más aún, describir a todas las funciones con esa propiedad.

29. Sea $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^n}{1 + x^n}$

    a) Calcular el dominio de definición de f.

    b) ¿Para qué valores de x resulta f continua?

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß
1815–1897, Alemania