Análisis 1
Primer Cuatrimestre — 2006
Práctica 1

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

   a) $|x+3| < 1$;
   b) $|x-3| \geq 10$;
   c) $|x| > |x+3|$;
   d) $|3x-1| < |x-1|$;
   e) $\left|\dfrac{x-2}{3x+1}\right| \leq 1$.

2. Representar los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$:

   a) $\{x : |x-1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\}$;
   b) $\{x : |x-3| < |2-x|\}$;
   c) $\{x : 0 < x^2 \leq x^3\}$.

3. *a*) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente:
      1) $\mathbb{R}_{>0}$;
      2) $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$.

   b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente
      1) $\mathbb{Z}$;
      2) $\{x^{-1} : x < 0\}$;
      3) $\mathrm{Im}(f)$ donde $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

4. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo, y, en caso de poseerlos, calcularlos:

   a) $\{n \in \mathbb{N} : 20 < n \leq 35\}$;
   b) $\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;
   c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;
   d) $\{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$.

5. Estudiar los extremos de los siguientes conjuntos y representarlos en la recta real:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+3| + |x-9| > 2\}$;
   b) $B = \{x \in \mathbb{R} : ||x+2| - |x-1|| < 1\}$;
   c) $C = \{x \in \mathbb{R} : \left|x^3 - 1\right| + \left|2 - x^3\right| = 1\}$.

6. *a*) Probar que el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ no tiene máximo ni supremo en $\mathbb{Q}$.

   b) Probar que el conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\}$ no tiene mínimo ni ínfimo en $\mathbb{Q}$.

   Sugerencia: en (a) mostrar explícitamente que, dado $a \in A$, existe un elemento mayor que a en A y en (b) proceder análogamente.

7. Calcular

   a) $\sup\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$;

   b) $\sup\{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N}\}$;

   c) $\inf\{(1+\frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}\}$;

   d) $\inf\{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}$.

8. Sea $a \geq 0$. Determinar para qué valores de b se verifican cada una de las siguientes condiciones:

   a) $|a+b| = |a| + |b|$;

   b) $|a+b| < |a| + |b|$;

   c) $|a-b| = |a| + |b|$;

   d) $|a-b| < |a| + |b|$;

   e) $\big||a| - |b|\big| = |a-b|$;

   f) $\big||a| - |b|\big| < |a-b|$.

9. Sean $0 \leq x \leq y$. Probar que $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$.

10. Mostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ y determinar para cada $\varepsilon > 0$ un valor $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ si $n > n_0$. Completar la siguiente tabla:

ε	$0,1$	$0,001$	$0,00001$	10^{-6}
n_0				

11. Mostrar usando la directamente la definición que:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^2+3n-2)-3}{n} = 0$;

   b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2-n+4} = 1$;

   c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{2n+5} = \frac{3}{2}$;

   d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-\sin n}{n^2+\cos n} = 1$.

12. Sean $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ polinomios de grado n y m respectivamente. Suponiendo que $a_n, b_m > 0$, investigar el límite

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{f(k)}{g(k)}$$

   cuando $n > m$, $n = m$ ó $n < m$.

13. Calcular:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k \sin n!}{n+1}$, si $0 \leq k < 1$;

   b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right)$;

   c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

Sugerencia: Usar que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

14. Estudiar la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuando $n \to +\infty$ si:

    a) $x_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \cdots (1 - \frac{1}{2^n})$;
    b) $x_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{n+1}{2n-1}$.

15. La sucesión de *Fibonacci* es la sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unívocamente determinada por las condiciones

    $$F_1 = F_2 = 1;$$
    $$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad \text{si } n \geq 0.$$

    Mostrar que $\lim_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.

16. Definamos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poniendo $a_1 = \alpha \neq 0$, y

    $$a_{n+1} = \frac{2}{a_n}$$

    cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué valores de α es a_n convergente?

17. Mostrar que si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, también lo hace $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. ¿Qué relación hay entre los límites de ambas sucesiones? ¿Vale la implicación recíproca?

18. Sin usar ningún criterio de convergencia, calcule, cuando $r \in \mathbb{R}^+$,

    a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{r}$;
    b) $\lim_{n\to\infty} r^n$.

19. *a*) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con $a_n \in \mathbb{R}^+$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, y supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Probar que:
        1) si $l < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;
        2) si $l > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$;
        3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

    b) Calcular, usando la parte anterior, el límite de las sucesiones con términos dados por:
        1) $a_n = \sqrt[n]{n}$;
        2) $a_n = \sqrt[n]{n!}$;
        3) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$.

    c) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con $a_n \in \mathbb{R}^+$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Mostrar mediante un ejemplo que puede existir $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ y no existir $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
    Sugerencia: considerar $a_n = 2 + (-1)^n$.

20. Probar que, si $|x| < 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con término general dado por

    $$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

    tiende a cero cuando $n \to \infty$.

21. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

a) $\dfrac{(n+3)!-n!}{(n+4)!}$;

b) $\dfrac{n^4-n+2^n n}{(n^3-1)2^n}$;

c) $\dfrac{8^n-4^n}{3^n}$;

d) $\dfrac{\sqrt[n]{1+2^n+\cdots+n^n}}{n}$;

e) $\sqrt[n]{n^2+n}$;

f) $\dfrac{\cos(n\pi/2)}{n^2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}$;

g) $\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$;

h) $\dfrac{n}{e^n}$;

i) $\dfrac{\ln(n)}{n}$;

j) $\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)^n$.

22. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

a) $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$;

b) $n^{\frac{\sin(n)}{n}}$;

c) $\left(n^4+n\right)^{1/n^5}$;

d) $\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n^2+4}{n+1}}$;

e) $\left(\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}-5}\right)^{\sin(n)}$.

23. Escribir los primeros tres términos de las series dadas por los siguientes términos generales:

a) $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$;

b) $u_n=\dfrac{n^3}{n+1}$;

c) $u_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$;

d) $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

24. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{10n}}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{3+n^2}$;

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+3}$;

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{1}{n})$.

25. Demostrar que si $n\in\mathbb{N}$, es

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}.$$

26. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n),$$

mostrar que la sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

27. Hallar la suma de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n-2}}$.

28. Se deja caer una pelota desde una altura de 5 metros. Cada vez que rebota en el piso, alcanza una altura de 3/4 partes de la distancia desde la que cayó. Calcule la distancia total que habrá recorrido cuando quede en reposo.

29. Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 4n + 2}{n!}.$$

Sugerencia: descomponer el término general en la forma

$$\frac{3n^2 - 4n + 2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}.$$

30. Cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de las series correspondientes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.

31. *a*) ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ son dos series divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_k b_k$ es divergente?

b) Si $a_n > 0$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ no converge.

32. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\ln n}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-2n-1}{n!}$.

33. *a*) Probar que la serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

converge condicionalmente.

b) Sea $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Reordenemos los términos de la serie de modo que después de un término positivo vayan dos términos negativos:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots$$

Determinar la expresión del término general de esta serie y demostrar que la serie obtenida converge a $s' = \frac{1}{2}s$.

Augustin Louis Cauchy
1789–1857, Francia