Modelos de segregación

Juan Pablo Pinasco

Universidad de Buenos Aires - CONICET

http://mate.dm.uba.ar/~jpinasco

jpinasco@gmail.com

Sistemas sociales complejos - 2016

1.- Thomas Schelling y su modelo.

2.- Cuando Schelling conoció a Michael Jackson.

3.- Patrones de segregación.

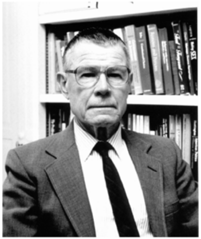
Parte I

Thomas Schelling y su modelo

Thomas Schelling

– California 1921 - ...
– Premio Nobel de Economía, 2005

1945 – 1968
– Coordinación tácita
– Carrera armentística
1968 – ...
– Minority beach
– Dying seminar
– Tipping points
...



Thomas C. Schelling

Segregación (1969-1971)

R agentes rojos y A azules, V lugares vacíos en una red con $R + A + V$ nodos.

Cada agente tiene una (misma) tolerancia T_c. Si

$$T_c < \frac{\#\{vecinos\ de\ color\ opuesto\}}{\#\{vecinos\}}$$

se muda a un lugar vacío aceptable.

Segregación (1969-1971)

Hay muchas variantes:

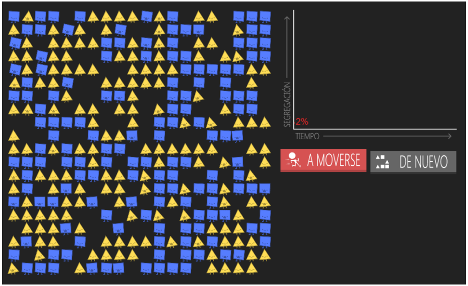
- Tolerancias T_r, T_a diferentes para cada grupo, o agente.
- Diferentes reglas para moverse (al más cercano, al más cercano aceptable, a uno aceptable con probabilidad $1-\varepsilon$ y a uno no aceptable con probabilidad ε,...)
- Diferentes topologías y condiciones de borde.
- Modelos sin lugares vacíos: se intercambian dos insatisfechos de distintos colores.
- ...

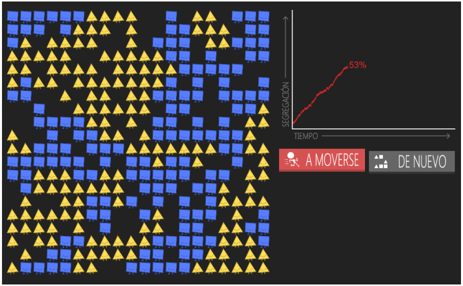
Más interesante cuando la variante introduce nuevos elementos, relacionados con situaciones concretas.

V. Hart - N. Case

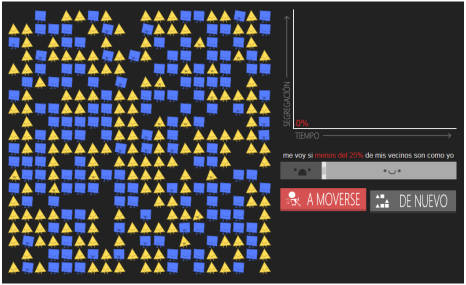
http://ncase.me/polygons-es/

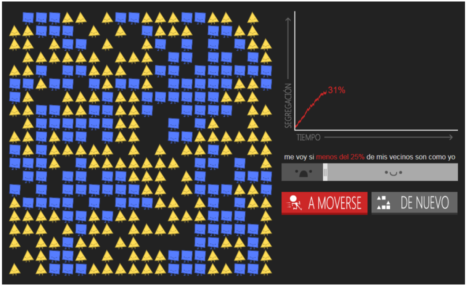
$T_c = 2/3$


SEGREGACIÓN
2%
TIEMPO
A MOVERSE
DE NUEVO

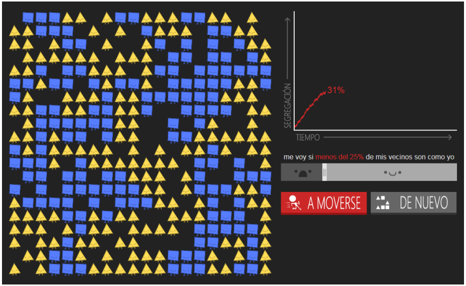

SEGREGACIÓN
53%
TIEMPO
A MOVERSE
DE NUEVO

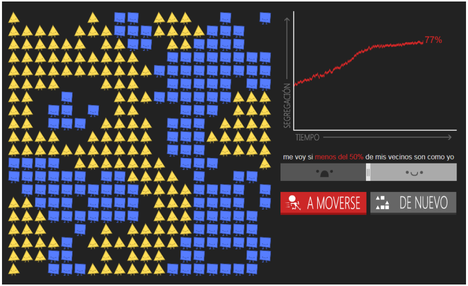
$T_c = 3/4$


SEGREGACIÓN
0%
TIEMPO
me voy si menos del 25% de mis vecinos son como yo
A MOVERSE
DE NUEVO

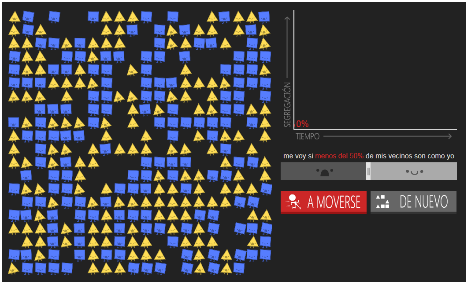

SEGREGACIÓN
31%
TIEMPO
me voy si menos del 25% de mis vecinos son como yo
A MOVERSE
DE NUEVO

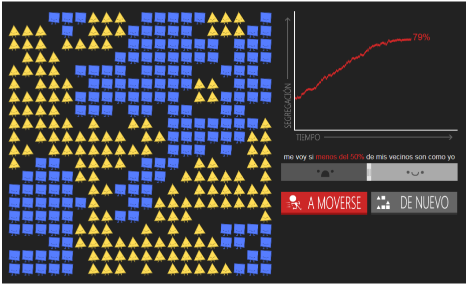
$T_c = 1/4 \to 1/2$


31%
SEGREGACIÓN
TIEMPO
me voy si menos del 25% de mis vecinos son como yo
A MOVERSE
DE NUEVO


77%
SEGREGACIÓN
TIEMPO
me voy si menos del 50% de mis vecinos son como yo
A MOVERSE
DE NUEVO

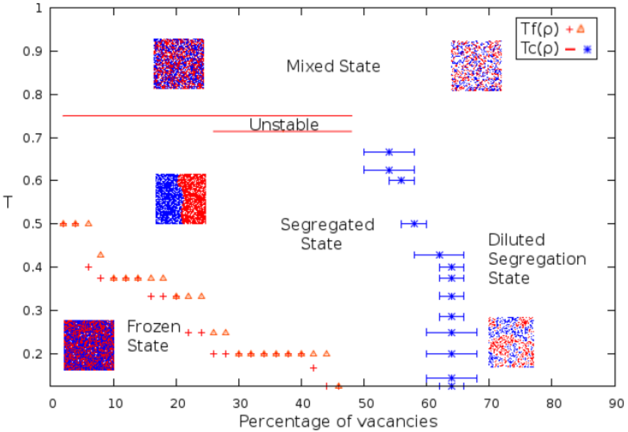
$T_c = 1/2$


SEGREGACIÓN
0%
TIEMPO
me voy si menos del 50% de mis vecinos son como yo
A MOVERSE
DE NUEVO


SEGREGACIÓN
79%
TIEMPO
me voy si menos del 50% de mis vecinos son como yo
A MOVERSE
DE NUEVO

Schelling

(Gauvin-Vannimenus-Nadal EJP B 2009)



Tipping

JH Miller y SE Page, Complex Adaptive Systems, Princeton Univ. Press 2007

$N = 100$, $k = 4$, $1/3$ B, N, Vacíos. Promedio sobre 500 realizaciones
Recorren en orden la línea de agentes, y si alguien no está feliz, lo mueven a un lugar vacío al azar (no importa si está feliz ahí).

Tipping

JH Miller y SE Page, Complex Adaptive Systems, Princeton Univ. Press 2007

$N = 100$, $k = 4$, $1/3$ B, N, Vacíos. Promedio sobre 500 realizaciones
Recorren en orden la línea de agentes, y si alguien no está feliz, lo mueven a un lugar vacío al azar (no importa si está feliz ahí).

Tipping

	40/40	31/49	30/50
Riquelmes a t=0	19.2	19.8	26.0
Agentes que se mueven en t=1	21.9	23.2	30.1
Agentes que se mueven $1 \leq t \leq 100$	42.5	58.8	110.8
Número de bloques al final	5.8	5.8	5.0

Detalles

- Ojo con efecto finito: el entorno define pocos umbrales significativos.
- Umbrales asimétricos causan que una población se mueva más que la otra (por ej., en el 1er paso, en promedio 23 de los 26 eran de los menos tolerantes; se mantiene en los pasos siguientes), y esto demora la convergencia.
- Tipping: cuando un agente se mueve, genera nuevos Riquelmes donde se fue y donde llegó. Se lo mide comparando los que querían moverse contra los que realmente se movieron.

Detalles

- Ojo con efecto finito: el entorno define pocos umbrales significativos.
- Umbrales asimétricos causan que una población se mueva más que la otra (por ej., en el 1er paso, en promedio 23 de los 26 eran de los menos tolerantes; se mantiene en los pasos siguientes), y esto demora la convergencia.
- Tipping: cuando un agente se mueve, genera nuevos Riquelmes donde se fue y donde llegó. Se lo mide comparando los que querían moverse contra los que realmente se movieron.

Detalles

- Ojo con efecto finito: el entorno define pocos umbrales significativos.
- Umbrales asimétricos causan que una población se mueva más que la otra (por ej., en el 1er paso, en promedio 23 de los 26 eran de los menos tolerantes; se mantiene en los pasos siguientes), y esto demora la convergencia.
- Tipping: cuando un agente se mueve, genera nuevos Riquelmes donde se fue y donde llegó. Se lo mide comparando los que querían moverse contra los que realmente se movieron.

Parte II

Schelling-Michael Jackson

Competición entre lenguajes

Nettle 1998-2013

Cada persona es un nodo en una grilla, sólo habla uno de los idiomas, interactúa al azar con un vecino y le copia el idioma que habla.

- Primer modelo con autómatas.
- Justificación teórica para su uso.
- Otras conclusiones: el papel de la cooperación, correlación entre lluvias y número de lenguajes, barreras naturales...

Competición entre lenguajes

Nettle 1998-2013

Cada persona es un nodo en una grilla, sólo habla uno de los idiomas, interactúa al azar con un vecino y le copia el idioma que habla.

- Primer modelo con autómatas.
- Justificación teórica para su uso.
- Otras conclusiones: el papel de la cooperación, correlación entre lluvias y número de lenguajes, barreras naturales...

Competición entre lenguajes

Nettle 1998-2013

Cada persona es un nodo en una grilla, sólo habla uno de los idiomas, interactúa al azar con un vecino y le copia el idioma que habla.

- Primer modelo con autómatas.
- Justificación teórica para su uso.
- Otras conclusiones: el papel de la cooperación, correlación entre lluvias y número de lenguajes, barreras naturales...

Competición entre lenguajes

Nettle 1998-2013

Cada persona es un nodo en una grilla, sólo habla uno de los idiomas, interactúa al azar con un vecino y le copia el idioma que habla.

- Primer modelo con autómatas.
- Justificación teórica para su uso.
- Otras conclusiones: el papel de la cooperación, correlación entre lluvias y número de lenguajes, barreras naturales...

Físicos-Matemáticos

Stauffer, Moss de Oliveira, Schultze... Técnicas de mecánica estadística.

Abrams-Strogatz, Patriarca et al., JPP-L. Romanelli, Kandler-Steele... Modelos continuos con ecuaciones diferenciales tipo Lotka-Volterra (predador-presa).

Los modelos predicen la extinción de uno de los idiomas (excepto Patriarca et al. y JPP-Romanelli).

Schelling-Michael Jackson

[I. Caridi, F. Nemiña, JPP, P. Schiaffino, 2013]

- Porcentaje de espacios vacíos.
- Igual proporción de B - N.
- Tolerancia T_c.
- Tendencia a conservar el idioma p.

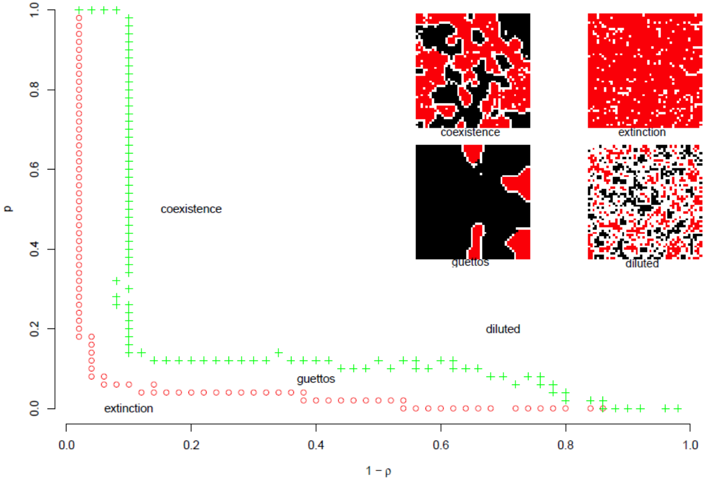
Si no está feliz, tira una moneda y con probabilidad p se muda, con $1 - p$ cambia de ~~color~~ lenguaje.

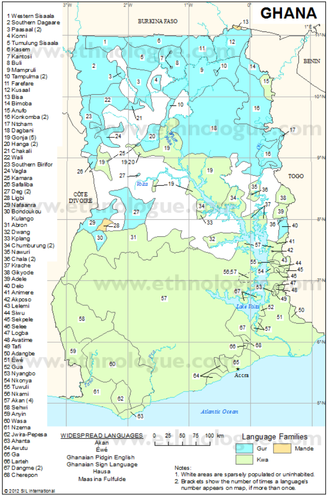
Schelling-Michael Jackson

[I. Caridi, F. Nemiña, JPP, P. Schiaffino, 2013]

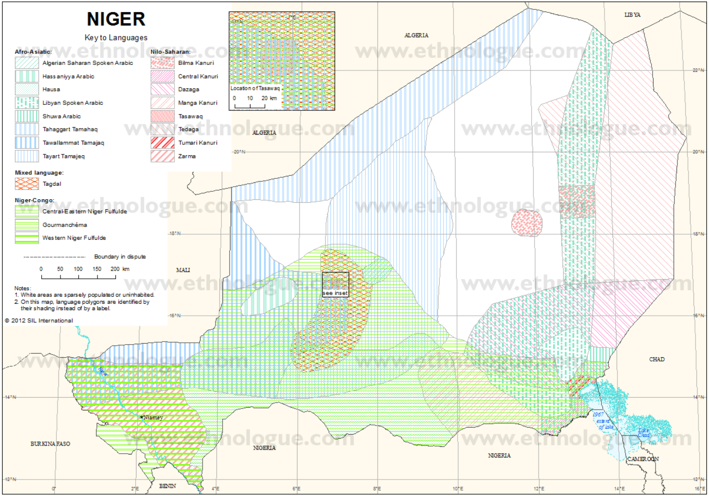
- Porcentaje de espacios vacíos.
- Igual proporción de B - N.
- Tolerancia T_c.
- Tendencia a conservar el idioma p.

Si no está feliz, tira una moneda y con probabilidad p se muda, con $1 - p$ cambia de ~~color~~ lenguaje.


coexistence
extinction
guettos
diluted
coexistence
diluted
guettos
extinction
p
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1 − ρ



GHANA
BURKINA FASO
BENIN
TOGO
CÔTE DIVOIRE
Accra
Atlantic Ocean
Lake Volta
1 Western Sisaala
2 Southern Dagaare
3 Paasaal (2)
4 Konni
5 Tumulung Sisaala
6 Kasem
7 Kantosi
8 Buli
9 Mampruli
10 Tampulma (2)
11 Farefare
12 Kusaal
13 Bisa
14 Bimoba
15 Anufo
16 Konkomba (2)
17 Ntcham
18 Dagbani
19 Gonja (5)
20 Hanga (2)
21 Chakali
22 Wali
23 Southern Birifor
24 Vagla
25 Kamara
26 Safaliba
27 Deg (2)
28 Ligbi
29 Nafaanra
30 Bondoukou Kulango
31 Abron
32 Dwang
33 Kplang
34 Chumburung (2)
35 Nawuri
36 Chala (2)
37 Krache
38 Gikyode
39 Adele
40 Delo
41 Animere
42 Akposo
43 Lelemi
44 Siwu
45 Sekpele
46 Selee
47 Logba
48 Avatime
49 Tafi
50 Adangbe
51 Éwé
52 Gua
53 Nyangbo
54 Nkonya
55 Tuwuli
56 Nkami
57 Akan (4)
58 Sehwi
59 Anyin
60 Wasa
61 Nzema
62 Jwira-Pepesa
63 Ahanta
64 Awutu
65 Ga
66 Larteh
67 Dangme (2)
68 Cherepon
WIDESPREAD LANGUAGES
Akan
Éwé
Ghanaian Pidgin English
Ghanaian Sign Language
Hausa
Maasina Fulfulde
0 25 50 75 100 km
Language Families
Gur
Mande
Kwa
Notes:
1. White areas are sparsely populated or uninhabited.
2. Brackets show the number of times a language's number appears on map, if more than once.
© 2012 SIL International


NIGER
Key to Languages
Afro-Asiatic:
Algerian Saharan Spoken Arabic
Hassaniyya Arabic
Hausa
Libyan Spoken Arabic
Shuwa Arabic
Tahaggart Tamahaq
Tawallammat Tamajaq
Tayart Tamajeq
Nilo-Saharan:
Bilma Kanuri
Central Kanuri
Dazaga
Manga Kanuri
Tasawaq
Tedaga
Tumari Kanuri
Zarma
Mixed language:
Tagdal
Niger-Congo:
Central-Eastern Niger Fulfulde
Gourmanchéma
Western Niger Fulfulde
Boundary in dispute
0 50 100 150 200 km
Notes:
1. White areas are sparsely populated or uninhabited.
2. On this map, language polygons are identified by their shading instead of by a label.
© 2012 SIL International
Location of Tasawaq
0 10 20 km
see inset
ALGERIA
LIBYA
MALI
CHAD
BURKINA FASO
NIGERIA
BENIN
CAMEROON
Niamey
Lake Chad
www.ethnologue.com

Parte III

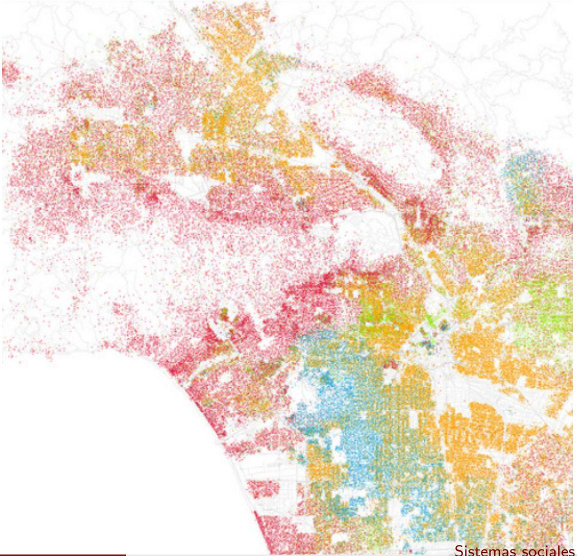
Patrones de segregación

Sociólogos / antropólogos / economistas

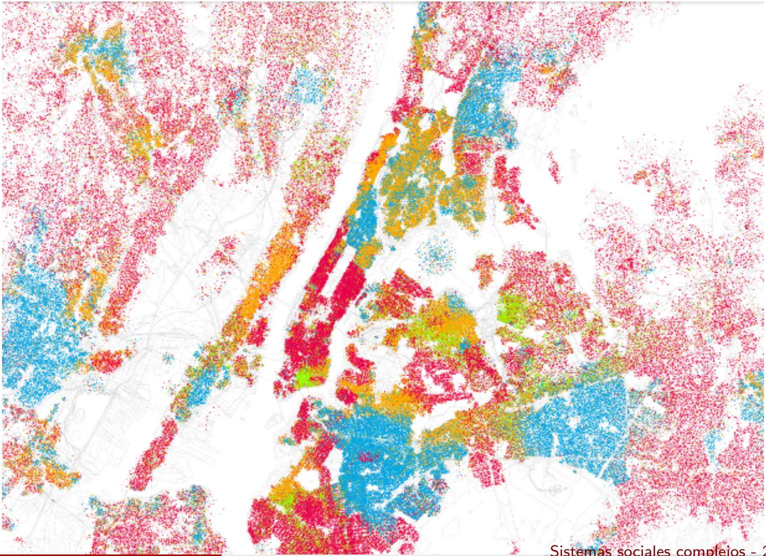
Hay distintos parámetros:

- Porcentaje de agentes sin vecinos del otro color.
- Cantidad y tamaño de los clusters.
- Renormalización (barrio mixto vs. escuelas/trabajos segregados).

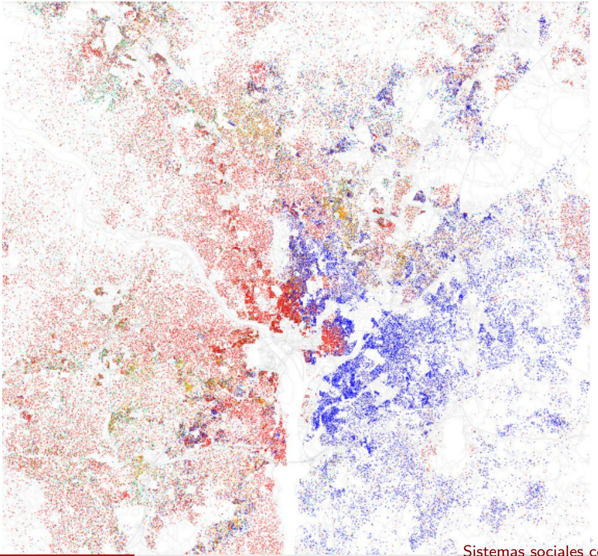
Los Angeles



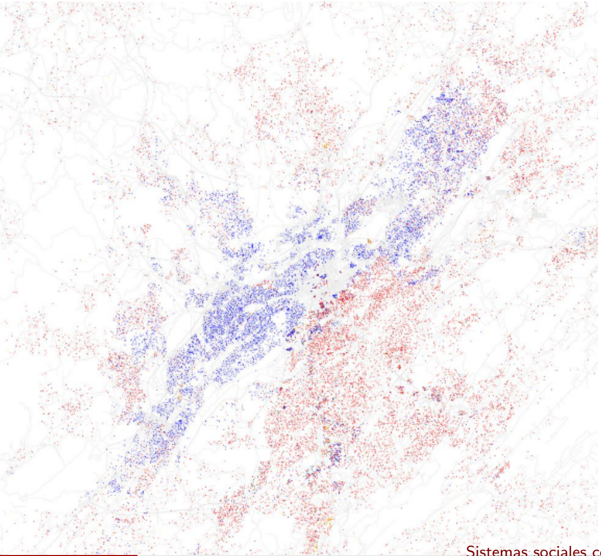
New York



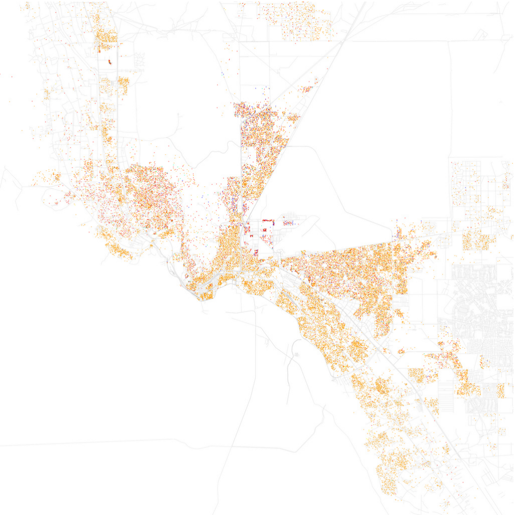
Washington



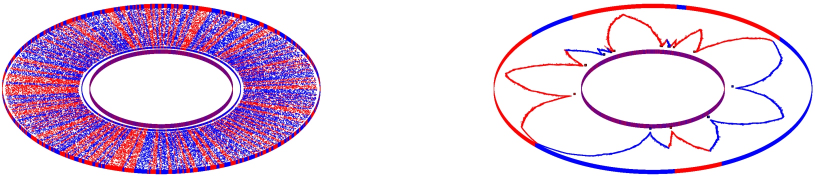
Birmingham, AL



El Paso, TX



Simulaciones



Izq.: Christina Brandt, Nicole Immorlica, Gautam Kamath, Robert Kleinberg (2012), $T_c = 0{,}5$.

Der.: George Barmpalias, Richard Elwes, Andy Lewis-Pye (2014), $T_c = 0{,}38$.

Valor de la tierra no homogéneo

- $1 \leq i \leq N$ lugares equiespaciados en $[0, 1]$.
- x es una configuración de N agentes etiquetados ± 1.
- Un peso $w : [0, 1] \to \mathbb{R}$ periódico.

Dinámica:

i mira un vecino a izquiera y derecha, y su felicidad está dada por

$$U(x,i) = \frac{1}{2}\Big(w(i+1)x(i+1)x(i) + w(i-1)x(i-1)\Big),$$

(se puede extender a más vecinos).

La infelicidad promedio es

$$\mathcal{H}(x) = -\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\Big(w(i+1)x(i+1)x(i) + w(i-1)x(i-1)x(i)\Big).$$

- Fijamos un umbral U_0, y decimos que i no está feliz ($i = Riquelme$) si $U(x,i) < U_0$.
- Buscamos dos agentes infelices de distinto signo y los intercambiamos.
- El sistema evoluciona mientras haya agentes infelices de distinto signo, y cuando se estaciona, tenemos un mínimo local del Hamiltoniano $\mathcal{H}(x)$.

Es difícil llegar a mínimos absolutos, los agentes no buscan maximizar su felicidad U.

- Fijamos un umbral U_0, y decimos que i no está feliz ($i = Riquelme$) si $U(x, i) < U_0$.
- Buscamos dos agentes infelices de distinto signo y los intercambiamos.
- El sistema evoluciona mientras haya agentes infelices de distinto signo, y cuando se estaciona, tenemos un mínimo local del Hamiltoniano $\mathcal{H}(x)$.

Es difícil llegar a mínimos absolutos, los agentes no buscan maximizar su felicidad U.

- Fijamos un umbral U_0, y decimos que i no está feliz ($i = Riquelme$) si $U(x,i) < U_0$.
- Buscamos dos agentes infelices de distinto signo y los intercambiamos.
- El sistema evoluciona mientras haya agentes infelices de distinto signo, y cuando se estaciona, tenemos un mínimo local del Hamiltoniano $\mathcal{H}(x)$.

Es difícil llegar a mínimos absolutos, los agentes no buscan maximizar su felicidad U.

- Fijamos un umbral U_0, y decimos que i no está feliz ($i = Riquelme$) si $U(x,i) < U_0$.
- Buscamos dos agentes infelices de distinto signo y los intercambiamos.
- El sistema evoluciona mientras haya agentes infelices de distinto signo, y cuando se estaciona, tenemos un mínimo local del Hamiltoniano $\mathcal{H}(x)$.

Es difícil llegar a mínimos absolutos, los agentes no buscan maximizar su felicidad U.

Teoría: tenemos el Laplaciano unidimensional discreto,

$$-\Delta x(i) = 2x(i) - (x(i+1) + x(i-1)),$$

y sea $\overline{w}$ el valor medio del peso w,

$$\overline{w} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w(i).$$

Teorema

Sea x una configuración de agentes. Entonces

$$\frac{1}{2}\frac{\langle -w\Delta x, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \overline{w} + \mathcal{H}(x).$$

Teoría: tenemos el Laplaciano unidimensional discreto,

$$-\Delta x(i) = 2x(i) - (x(i+1) + x(i-1)),$$

y sea $\overline{w}$ el valor medio del peso w,

$$\overline{w} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w(i).$$

Teorema

Sea x una configuración de agentes. Entonces

$$\frac{1}{2}\frac{\langle -w\Delta x, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \overline{w} + \mathcal{H}(x).$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\frac{\langle -w\Delta x, x\rangle}{\langle x, x\rangle} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(2w(i)x^2(i) - \Big(w(i)x(i+1)x(i) + w(i)x(i-1)x(i)\Big)\Big) \\
&= 2\overline{w} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(w(i)x(i+1)x(i) + w(i)x(i-1)x(i)\Big) \\
&= 2\overline{w} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} w(j-1)x(j)x(j-1) \\
&\qquad - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} w(j+1)x(j)x(j+1) \\
&= 2\overline{w} + 2\mathcal{H}(x),
\end{aligned}
$$

(usamos que $x^2(i) = 1$ - cambiamos $i = j-1$, $i = j+1$ en las sumas - reordenamos). □

Sea $\chi(K)$ el conjunto de configuraciones admisibles con K agentes -1 y $N-K$ agentes $+1$. Tenemos:

Teorema

Sean $\mathcal{H}$, $-\Delta$, $w>0$ y $\chi(K)$ como antes. Entonces

$$arg \min_{x\in\chi(K)} \frac{\langle -w\Delta x, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = arg \min_{x\in\chi(K)} \mathcal{H}(x).$$

Además,

Teorema

Sea $\hat{x} \in \chi(K)$ un minimizante (absoluto) del Hamiltoniano $\mathcal{H}$, con $w > 0$ que tiene un único máximo. Entonces el minimizante tiene sólo dos clusters, K agentes etiquetados -1 en los sitios $\{i_0 + 1, i_0 + 2, \ldots, i_0 + K\}$, donde i_0 minimiza la suma de los valores del peso alrededor de los cambios de signo en i_0, $i_0 + K$:

$$i_0 = arg \min_{1 \leq i \leq N} \Big(w(i) + w(i+1) + w(i+K) + w(i+K+1) \Big).$$

Para N grande, w suave, con $L = K/N$ la fracción de agentes de uno de los signos, es suficiente hallar el mínimo de

$$f(t) = w(t) + w(t + L)$$

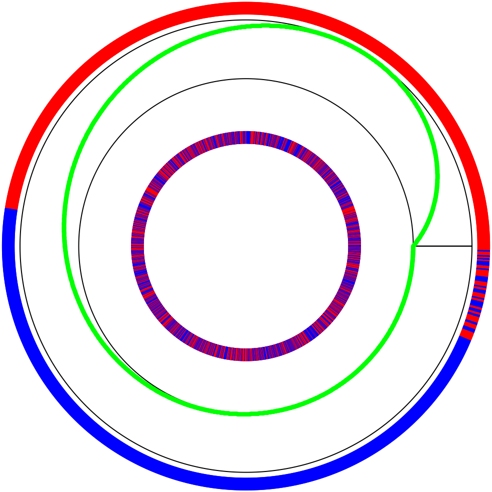
para determinar dónde están ubicados. Asumimos w periódica, y entendemos $t + L$ módulo 1.

Ejemplo: Si $L = 1/2$ y $w(t) = t^5(1-t)+1$, derivando y anulando vemos que esta función tiene un único máximo en $t = \frac{5}{6}$ y un mínimo en $t = 0$.

La función $f(t) = t^5(1-t) + (t+\frac{1}{2})^5(\frac{1}{2}-t)+2$ tiene su mínimo en el intervalo $(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}-\frac{1}{12})$ y la población se divide en dos intervalos cercanos a $(0, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 1)$.

Ejemplo: Si $L = 1/2$ y $w(t) = t^5(1-t)+1$, derivando y anulando vemos que esta función tiene un único máximo en $t = \frac{5}{6}$ y un mínimo en $t = 0$.

La función $f(t) = t^5(1-t) + (t+\frac{1}{2})^5(\frac{1}{2}-t)+2$ tiene su mínimo en el intervalo $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)$ y la población se divide en dos intervalos cercanos a $(0, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 1)$.



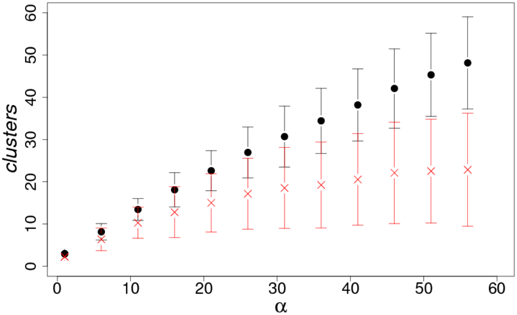
Un argumento similar nos permite encontrar minimos locales del Hamiltoniano. Por ejemplo, si los K agentes etiquetados -1 forman dos clusters, $\{i_0+1,\dots,i_0+J\}$ y $\{i_0+J+s_0,\dots,i_0+s_0+K\}$, buscamos

$$\min_{1\le i\le N-K}\ \min_{2\le j\le K-2}\ \min_{i+J+1<s<N-K+j} F(i,j,s),$$

donde

$$\begin{aligned}F(i,j,s) =& w(i)+w(i+1)+w(i+j)+w(i+j+1)+w(i+j+s)\\ &+w(i+j+s+1)+w(i+s+K)+w(i+s+K+1).\end{aligned}$$

Esto explica informalmente el crecimiento del número de clusters cuando el peso oscila. La suma de distintos valores de w en puntos cercanos a sus mínimos será menor.



$$w(i) = sen\left(\frac{2\pi\alpha(i - N/2)}{N-2}\right) + 1$$

FIN!