Notas de Análisis I / Análisis Matemático I

Análisis II (C) / Matemática I

Juan Pablo Pinasco

8 de febrero de 2014

Índice general

Capítulo 1

Continuidad y diferenciación

Importante: en lo que sigue, escribiremos para acortar la notación

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \qquad f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

1.1. Primera parte (Continuidad)

Teorema 1.1.1. *Sea $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^2$ convergente. Entonces es acotada.*

En clase, 1ra - 2da semana.

Teorema 1.1.2. *Sea $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^2$ acotada. Entonces tiene una subsucesión convergente*

En clase, 1ra - 2da semana.

Teorema 1.1.3. *Sea $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^2$ convergente a x, y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua en x. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Demostración. Recordemos que:

1. si f es continua en x, dado un $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ si } |x-y| < \delta.$$

2. Y si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge a x, dado $\hat{\varepsilon} > 0$, existe n_0 tal que

$$|x - x_n| < \hat{\varepsilon} \text{ si } n \geq n_0.$$

Queremos demostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que

$$|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon \text{ si } n \geq n_0.$$

Tomemos el δ del punto 1 igual al $\hat{\varepsilon}$ del punto 2. Como la sucesión converge, si $n \geq n_0$ tenemos que ,

$$|x - x_n| < \delta.$$

Ahora, por la continuidad de f, como $|x - x_n| < \delta$, tenemos

$$|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Teoremita demostrado! $\square$

Teorema 1.1.4. *Sea $f : K \to \mathbb{R}$, con $K \subset \mathbb{R}^2$ cerrado y acotado (= compacto). Entonces, f alcanza su máximo y su mínimo.*

Demostración. La demostración tiene tres etapas:

1. Ver que f es acotada en K.
2. Ver que existe $x_s \in K$ tal que
$$f(x_s) = \max_{x\in K} f(x) = \sup_{x\in K} f(x).$$
3. Ver que existe $x_i \in K$ tal que
$$f(x_i) = \min_{x\in K} f(x) = \inf_{x\in K} f(x).$$

Veamos que f es acotada superiormente: Supongamos que NO es acotada, entonces para cada natural n existe algún x_n tal que $f(x_n) > n$. [De lo contrario, si no encontráramos un x_n para algún n, esa sería la cota superior.]

Como la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset K$, un conjunto cerrado y acotado, por el Teorema 1.1.2 existe una subsucesión convergente a algún $x \in K$,
$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$
Pero como f es continua, por el Teorema 1.1.3 tenemos que
$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x).$$
Ahora, como $f(x_{n_k}) > n_k$
$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) > \lim_{k\to\infty} n_k = \infty,$$
lo cual es absurdo, $f(x) \in \mathbb{R}$.

Veamos que existe x_s: Sabemos que el conjunto $\{f(x) : x \in K\}$ está acotado. Sea S el supremo de este conjunto, y definamos
$$g(x) = \frac{1}{S - f(x)}.$$

Si f NO alcanza el valor S en ningún $x \in K$, quiere decir que g está bien definida (no dividimos por 0), y es continua. Pero entonces, el mismo razonamiento del paso anterior nos dice que g es acotada en K, existe algún $M > 0$ tal que
$$g(x) = \frac{1}{S - f(x)} \leq M.$$

Hagamos cuentas:
$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{S-f(x)} & \leq & M \\
1 & \leq & M\cdot(S - f(x)) \\
1 & \leq & MS - Mf(x) \\
Mf(x) & \leq & MS - 1 \\
f(x) & \leq & S - \frac{1}{M}.
\end{array}$$

Llamemos $\varepsilon = 1/M$. Como S es el supremo de $\{f(x) : x \in K\}$, tiene que existir algún elemento de este conjunto mayor a $S - \varepsilon$, pero la cuenta anterior muestra que son todos estrictamente menores.

Luego, g no puede ser continua. Como $S - f(x)$ es continua, y dividir es continua si el divisor no es nulo, debe ser $S = f(x_s)$ para algún $x_s \in K$, el supremo se alcanza y por lo tanto es un máximo.

Vean que existe x_i: ejercicio para ver si entendieron lo anterior. □

Teorema 1.1.5. *Aplicación: Sea f de clase C^2, Hf definido positivo. Entonces, existe $c > 0$ tal que, si $h^2 + k^2 = 1$,*

$$Q(h,k) = (h,k)^t \cdot Hf(x_0,y_0) \cdot (h,k) \geq c.$$

Demostración. Como Hf es definido positivo, tenemos $Q(h,k) > 0$ para todo (h,k) distinto de $(0,0)$. Ahora, como $K = \{(h,k) : h^2 + k^2 = 1\}$ es cerrado y acotado, Q alcanza su mínimo en algún (h_0,k_0).

Sea $Q(h_0,k_0) = c \neq 0$ (ya que Q es cero sólo en $(0,0)$, que no está en el conjunto K, y listo:

$$Q(h,k) \geq Q(h_0,k_0) = c > 0,$$

el teorema está demostrado. □

Observación 1.1.6 (Extremos y Taylor enR^2)**.** Cuando escribimos el polinomio de Taylor en un punto crítico (esto es, $\nabla u(x,y) = 0$), nos queda

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + (h,k)^t Hf(x,y)(h,k) + R_2(h,k),$$

con lo cual, reescribiendo y dividiendo por $\|(h,k)\|^2$, tenemos

$$\frac{f(x+h,y+k) - f(x,y)}{\|(h,k)\|^2} = \frac{(h,k)^t Hf(x,y)(h,k)}{\|(h,k)\|^2} + \frac{R_2(h,k)}{\|(h,k)\|^2},$$

que podemos reescribir normalizando al vector (h,k) como

$$\frac{f(x+h,y+k) - f(x,y)}{\|(h,k)\|^2} = \frac{(h,k)^t}{\|(h,k)\|^2} Hf(x,y) \frac{(h,k)}{\|(h,k)\|^2} + \frac{R_2(h,k)}{\|(h,k)\|^2}.$$

Si el Hessiano es definido positivo, por el Teorema 1.1.5 existe $c > 0$ tal que

$$\frac{f(x+h,y+k) - f(x,y)}{\|(h,k)\|^2} \geq c + \frac{R_2(h,k)}{\|(h,k)\|^2},$$

y sabemos que el resto de Taylor sobre la norma al cuadrado tiende a cero cuando $(h,k) \to (0,0)$. Luego, el cociente

$$\frac{f(x+h,y+k) - f(x,y)}{\|(h,k)\|^2}$$

se mantiene estrictamente positivo, y eso implica que $f(x+h,y+k) > f(x,y)$, ya que el denominador es positivo.

Hemos demostrado el siguiente Teorema:

Teorema 1.1.7. *Si f es C^3, y el Hessiano es definido positivo en un punto crítico, entonces es un mínimo estricto.*

De manera parecida se demuestra que si el Hessiano es definido negativo en un punto crítico, entonces es un máximo estricto.

1.2. Segunda Parte (diferenciación)

Teorema 1.2.1. *Si f es diferenciable en (x,y), entonces f es continua.*

Demostración. Queremos ver que $|f(x+h,y+k)-f(x,y)|$ tiende a cero cuando (h,k) tiende a $(0,0)$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
0 \leq & |f(x+h,y+k)-f(x,y)| \\
= & |f(x+h,y+k)-f(x,y)-f_x(x,y)h+f_x(x,y)h-f_y(x,y)k+f_y(x,y)k| \\
\leq & |f(x+h,y+k)-f(x,y)-f_x(x,y)h-f_y(x,y)k|+|f_x(x,y)h|+|f_y(x,y)k| \\
\leq & |f(x+h,y+k)-f(x,y)-f_x(x,y)h-f_y(x,y)k|+|f_x(x_0,y_0)|\|(h,k)\|+|f_y(x,y)|\|(h,k)\| \\
= & \frac{\|(h,k)\|}{\|(h,k)\|}|f(x+h,y+k)-f(x,y)-f_x(x,y)h-f_y(x,y)k|+|f_x(x_0,y_0)|\|(h,k)\|+|f_y(x,y)|\|(h,k)\| \\
\leq & \|(h,k)\|\left(\frac{|f(x+h,y+k)-f(x,y)-f_x(x,y)h-f_y(x,y)k|}{\|(h,k)\|}+|f_x(x_0,y_0)|+|f_y(x,y)|\right)
\end{aligned}$$

y esto tiende a cero por ser de la forma cero por acotado, así que por sandwich $|f(x+h,y+k)-f(x,y)|$ tiende a cero

¿Qué hicimos en el medio?

- Primero sumamos 0, escrito como $\pm f_x(x,y)h$, $\pm f_y(x,y)k$.
- Después separamos el módulo usando la desigualdad triangular.
- En la siguiente acotamos $|f_x(x,y)h| \leq |f_x(x,y)|\cdot|h|$, y luego $|h| \leq \sqrt{h^2+k^2} = \|(h,k)\|$, obteniendo

  $$|f_x(x,y)h| \leq |f_x(x,y)|\cdot\|(h,k)\|.$$

  De la misma forma, $|f_y(x,y)k| \leq |f_y(x,y)|\cdot\|(h,k)\|$.
- Ahora multiplicamos y dividimos el primer término por la norma de (h,k).
- Por último, sacamos una norma de (h,k) de factor común.

Observemos ahora que dentro del paréntesis el cociente tiende a cero (porque es diferenciable) y nos quedaron sumando las derivas parciales en el punto, que existen y por lo tanto son números, así que toda la expresión está acotada. ☐

Teorema 1.2.2. *Si f satisface*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} = 0,$$

para A, $b \in \mathbb{R}$ (f es diferenciable) entonces

$$A = f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \qquad B = f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Demostración. Queremos ver que, cuando $x \to x_0$, con $y = y_0$ tenemos

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = A,$$

que es equivalente a pedir

$$\lim_{(x,y_0)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)}{x-x_0} = 0.$$

Se tiene que cumplir entonces que el módulo también converja a cero,

$$\lim_{(x,y_0)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)|}{|x-x_0|} = 0,$$

y como $y_0-y_0=0$, el límite que queremos es

$$\lim_{(x,y_0)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)-B(y_0-y_0)|}{\|(x-x_0,y_0-y_0)\|} = 0,$$

Esto efectivamente es cero porque al ser diferenciable vale

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} = 0,$$

sin importar cómo nos acercamos al punto, y acá tomando límite por la recta $y=y_0$. □

Teorema 1.2.3. *Si f_x, f_y existen y son continuas en $B((x_0,y_0),r)$ con $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ y algún $r>0$, entonces f es diferenciable en P.*

Demostración. Queremos ver que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} = 0.$$

Usando el teorema del valor medio un par de veces el resultado sale, para eso sumamos y restamos $f(x_0,y)$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|},$$

y existen $\bar{x}$ entre x y x_0, $\bar{y}$ entre y e y_0 tal que queda

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f_x(\bar{x},y)(x-x_0)+f_y(x_0,\bar{y})(y-y_0)-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|}.$$

Agrupando, queremos calcular

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{[f_x(\bar{x},y)-f_x(x_0,y_0)](x-x_0)+[f_y(x_0,\bar{y})-f_y(x_0,y_0)](y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|},$$

Por último, acotamos $|x-x_0|<\|(x-x_0,y-y_0)\|$, $|y-y_0|<\|(x-x_0,y-y_0)\|$ y podemos simplificar:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{[f_x(\bar{x},y)-f_x(x_0,y_0)\|(x-x_0,y-y_0)\|+[f_y(x_0,\bar{y})-f_y(x_0,y_0)]\|(x-x_0,y-y_0)\|}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f_x(\bar{x},y)-f_x(x_0,y_0)+[f_y(x_0,\bar{y})-f_y(x_0,y_0)],$$

y esto vale cero porque al ser continuas f_x y $_y$, cuando $x\to x_0$ también $\bar{x}\to x_0$; y cuando $y\to y_0$ también $\bar{y}\to y_0$. □

1.3. Algunas otras cosas

Teorema 1.3.1. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in U$, y v un vector con $\|v\| = 1$. Entonces, existe la derivada direccional, y además*

$$\frac{\partial f}{\partial v} = Df(x_0) \cdot v = \langle \nabla f, v \rangle.$$

Teorema 1.3.2. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in U$. El gradiente de f indica la dirección de máximo crecimiento.*

Demostración. Abreviando, partimos de

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f, v \rangle \leq \|\nabla f\| \|v\| cos(\nabla f, v) = \|\nabla f\| cos(\nabla f, v),$$

tenemos que esto es máximo cuando el coseno es 1, es decir, ∇f es paralelo a v. □

Teorema 1.3.3. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in U$, y x_0 un extremo de f. Entonces $Df(x_0) = 0$.*

Demostración. Como U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - y\| < \delta$ entonces $y \in U$. Sea h de norma 1, y definimos $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ como $g(t) = f(x_0 + th)$. Esta función es derivable, y tiene un extremo en 0, con lo cual $g' = 0$. Pero

$$0 = g'(0) = Df|_{x_0}(h) = \langle \nabla f(x_0), h \rangle$$

Luego, para cada h, tenemos

$$0 = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right), h \right\rangle$$

y eligiendo $h = e_i$, el $i-$ésimo vector canónico, tenemos que cada derivada parcial es nula en x_0. □

Teorema 1.3.4. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, y U conexo (para todo par x, $y \in U$ el segmento que los conecta está incluído en U). Dados x, $y \in U$, existe t_0 tal que $z = x + t_0(y - x)$ satisface*

$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f(z), (y - x) \rangle.$$

Demostración. Es corta: sea $u = y - x$, y definamos $g(t) = f(x + tu)$, que es diferenciable en (a, b), y tenemos

$$f(y) - f(x) = g(1) - g(0) = g'(t_0), \qquad t_0 \in (0, 1).$$

Además,

$$g'(t_0) = \langle \nabla f(x + t_0 u), u \rangle = \langle \nabla f(z), (y - x) \rangle,$$

y la demostración queda terminada. □

1.4. Lagrange, inversa, e implícita

Los dos teorema siguientes no incluyen -por ahora- la demostración:

Teorema 1.4.1 (Teorema de la función implícita)**.** *Sea $F(x, y) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1 en un entorno de $(a, b) \in \mathbb{R}^{n+m}$. Supongamos que $F(a, b) = 0$, y $det(D_y f) \neq 0$. Entonces existen entornos U de a, y V de b tales que para todo $x \in U$ existe un único $y = \varphi(x) \in V$ tal que $F(x, y) = F(x, \varphi(x)) = 0$.*

El caso particular que más nos interesa es cuando $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Tenemos que f es función de $(x_1, \cdots, x_n, y)$, y podemos reemplazar $y = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$. Ahora,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial y}.$$

Por la regla de la cadena,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} 0 = \frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1, \cdots, x_n, \varphi(x_1, \cdots, x_n)) = F_{x_i} + F_y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

con lo cual despejamos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_y}.$$

Podemos dividir por F_y por la condición $det(D_y f) \neq 0$ (aquí la diferencial es un unico valor, F_y).

Teorema 1.4.2 (Teorema de la Aplicación inversa)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en un entorno del punto a. Si $det(Df(a)) \neq 0$, entonces existe un entorno abierto V del punto a, y un entorno W de $f(a)$ tal que la restricción $f|_V$ es un homeomorfismo de V sobre W. Además, $f^{-1} : W \to V$ es de clase C^1.*

El siguiente teorema es mucho más divertido de demostrar. Queda para otro momento la historia de Al-Haytham (940-1040), sus trabajos en óptica y caminos de rayos de luz, que llevaron a Fermat a demostrar su teoremita: la derivada se anula en un máximo. Veremos una versión que cubre las necesidades básicas, y se generaliza fácil a más variables:

Teorema 1.4.3 (Multiplicadores de Lagrange)**.** *Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1. Si F tiene un extremo en (x_0, y_0) restringida a la curva de nivel $G(x, y) = 0$, y $\nabla G(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\nabla F(x_0, y_0) = \lambda \nabla G(x_0, y_0).$$

Demostración. Como $(G_x(x_0, y_0), G_y(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$, podemos suponer que una de las derivadas parciales no es cero, digamos $G_y \neq 0$.

Ahora, la demostración más sencilla comienza diciéndonos explícitamente quién es el λ:

$$\lambda = \frac{F_y(x_0, y_0)}{G_y(x_0, y_0)}.$$

Veamos que esto funciona: como $G_y(x_0, y_0) \neq 0$, podemos aplicar el TF Implícita y tenemos $y = \varphi(x)$ en un entorno del punto (x_0, y_0), tal que $G(x, \varphi(x)) = 0$.

Como $F(x, \varphi(x))$ tiene un extremo en x_0, su derivada respecto a x_0 se anula (Fermat!), y por regla de la cadena, más el TF Implícita para la derivada de φ,

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{d}{dx} F(x, \varphi(x)) \\ =& F_x + F_y \cdot \frac{d\varphi}{dx} \\ =& F_x - F_y \cdot \frac{G_x}{G_y} \\ =& F_x - \frac{F_y}{G_y} \cdot G_x \\ =& F_x - \lambda G_x, \end{aligned}$$

es decir, $F_x = \lambda G_x$. Y como ya teníamos que $\lambda = F_y/G_y$, despejando tenemos $F_y = \lambda G_y$. □

Para utilizar el Teorema procedemos al revés, definimos el lagrangiano

$$L(x,y\lambda) = F(x,y) - \lambda G(x,y))$$

y buscamos soluciones (x,y) del sistema

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

Las dos primeras nos dicen

$$F_x - \lambda G_x = 0 \quad F_y - \lambda G_y = 0,$$

que es la condición $\nabla F = \lambda \nabla G$, mientras que la tercera nos dice

$$G(x,y) = 0,$$

esto es, que el punto encontrado está en la restricción. Si nuestro problema tiene un máximo o un mínimo, el teorema nos dice que es uno de los que encontremos con este método (pero no nos dice que todo lo que aparezca de esta forma sea un máximo o un mínimo!)

Observación 1.4.4. Es casi un ejercicio ahora que el gradiente es ortogonal a las curvas (y superficies de nivel).

Capítulo 2

Integral de Riemann

2.1. Definiciones y resultados previos

Veamos rápidamente las definiciones básicas que nos permiten introducir la integral de Riemann para funciones de una variable.

Definición 2.1.1. Una *partición* π del intervalo $[a,b]$ es el conjunto

$$\pi = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\},$$

tales que $x_{i-1} < x_i$.

Dadas dos particiones π_1, π_2 del intervalo $[a,b]$, decimos que π_1 es más fina que π_2 si $\pi_2 \subset \pi_1$.

Definición 2.1.2. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, y una partición π definimos:

- $m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in (x_{i-1}, x_i)\}$.
- $M_i = \sup\{f(x) : x \in (x_{i-1}, x_i)\}$.
- $\Delta_i = (x_i - x_{i-1})$, longitud del intervalo (x_{i-1}, x_i).
- Suma inferior: $\underline{S}_\pi = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i$.
- Suma superior: $\bar{S}_\pi = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i$.
- Integral inferior $\underline{S} = \sup_\pi \underline{S}_\pi$.
- Integral superior $\bar{S} = \text{ínf}_\pi \bar{S}_\pi$.

Teorema 2.1.3. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición π. Entonces,*

$$\bar{S}_\pi \geq \underline{S}_\pi.$$

Demostración. Observemos que

$$\bar{S}_\pi - \underline{S}_\pi = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta_i \geq 0,$$

ya que en cada intervalo (x_{i-1}, x_i) tenemos $M_i \geq m_i$ (el supremo es mayor que el ínfimo). $\square$

Teorema 2.1.4. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y dos particiones π_1, π_2 tal que π_1 es más fina que π_2. Entonces:*

1. $\bar{S}_{\pi_1} \leq \bar{S}_{\pi_2}$.
2. $\underline{S}_{\pi_1} \geq \underline{S}_{\pi_2}$.

Demostración. Supongamos primero que

$$\pi_1 = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_i, \ldots x_n = b\}, \quad \pi_2 = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots x_n = b\}.$$

Entonces,

$$\bar{S}_{\pi_1} - \bar{S}_{\pi_2} = \left(\sup_{x\in(x_{i-1},y)} f(x)\right)(y - x_{i-1}) + \left(\sup_{x\in(y,x_i)} f(x)\right)(x_i - y) - \left(\sup_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x)\right)(x_i - x_{i-1}),$$

ya que los demás términos coinciden y se cancelan (verifique!).

Ahora,

$$\sup_{x\in(x_{i-1},y)} f(x) \leq \sup_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x), \qquad \sup_{x\in(y,x_i)} \{f(x)\} \leq \sup_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x),$$

(intuitivamente, hay más lugar para que la función crezca), y reemplazando en la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned}\bar{S}_{\pi_1} - \bar{S}_{\pi_2} &\leq \left(\sup_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x)\right)(y - x_{i-1}) + \left(\sup_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x)\right)(x_i - y) - \left(\sup_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x)\right)(x_i - x_{i-1})\\ &= \left(\sup_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x)\right)(y - x_{i-1} + x_i - y - x_i + x_{i-1})\\ &=0,\end{aligned}$$

con lo cual demostramos la primera afirmación.

Para la segunda, procedemos igual observando que

$$\inf_{x\in(x_{i-1},y)} f(x) \geq \inf_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x), \qquad \inf_{x\in(y,x_i)} \{f(x)\} \leq \inf_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x),$$

(intuitivamente, hay más lugar para que la función decrezca).

Ahora, dadas dos particiones cualesquiera con $\pi_2 \subset \pi_1$, tal que π_1 tiene m puntos más que π_2, vamos refinando π_2 agregando uno de estos puntos cada vez hasta obtener π_1, y en cada paso usamos que la suma superior no crece, y que la inferior no decrece, y el teorema queda demostrado. $\square$

Definición 2.1.5. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Decimos que f es integrable en $[a,b]$ si

$$\underline{S} = \sup_{\pi} \underline{S}_\pi = \inf_{\pi} \bar{S}_\pi = \bar{S}.$$

Una consecuencia directa de las definiciones es el siguiente teorema:

Teorema 2.1.6. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Entonces:*

1. *Si f no es integrable Riemann, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda partición π se tiene*

$$\varepsilon < \bar{S}_\pi - \underline{S}_\pi.$$

2. *Si f es integrable, para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición π tal que*

$$\bar{S}_\pi - \underline{S}_\pi < \varepsilon.$$

Demostración. Veamos 1.- Si f no es integrable, tenemos que $\underline{S} \neq \bar{S}$, es decir, existe $a > 0$ tal que

$$a = \bar{S} - \underline{S} = \inf_{\pi} \bar{S}_{\pi} - \sup_{\pi} \underline{S}_{\pi}.$$

Dada $\hat{\pi}$ una partición, tenemos

$$\bar{S}_{\hat{\pi}} \geq \inf_{\pi} \bar{S}_{\pi},$$

$$\underline{S}_{\hat{\pi}} \leq \sup_{\pi} \underline{S}_{\pi},$$

y entonces, al restar,

$$\bar{S}_{\hat{\pi}} - \underline{S}_{\hat{\pi}} \geq \inf_{\pi} \bar{S}_{\pi} - \sup_{\pi} \underline{S}_{\pi} = a > 0.$$

Podemos tomar entonces $\varepsilon = a$, y listo.

Para demostrar 2.-, fijado ε tenemos (por la definición de supremo) que existen dos particiones π_1 y π_2 tales que

$$\bar{S}_{\pi_1} < \inf_{\pi} \bar{S}_{\pi} + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\underline{S}_{\pi_2} > \sup_{\pi} \underline{S}_{\pi} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como la partición $\hat{\pi} = \pi_1 \cup \pi_2$ refina a ambas, y por el Teorema 2.1.4, también tenemos

$$\bar{S}_{\hat{\pi}} < \inf_{\pi} \bar{S}_{\pi} + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\underline{S}_{\hat{\pi}} > \sup_{\pi} \underline{S}_{\pi} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces,

$$\bar{S}_{\hat{\pi}} - \underline{S}_{\hat{\pi}} < \inf_{\pi} \bar{S}_{\pi} + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\sup_{\pi} \underline{S}_{\pi} - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \bar{S}_{\pi} - \underline{S}_{\pi} + \varepsilon = \varepsilon,$$

ya la integral superior y la inferior coinciden porque f es integrable. □

2.2. Tres teoremas poco interesantes

Los siguientes resultados son muy útiles pero poco interesantes.

Teorema 2.2.1. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables, $c \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema 2.2.2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, $c \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 2.2.3. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, $c \in [a,b]$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demostración. Aburridas. Salen manipulando las sumas de Riemann. □

2.3. Cuatro teoremas más interesantes

Los siguientes resultados, además de ser muy útiles son interesantes:

Teorema 2.3.1 (Valor medio para integrales)**.** *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Entonces, existe $c\in(a,b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Demostración. Sean $x_s, x_i \in [a,b]$ los puntos donde f alcanza su máximo y su mínimo valor (f es continua en $[a,b]$). Supongamos que $x_i < x_s$, si es al revés se demuestra igual (si son iguales, f es constante y sale con fritas).

Tomemos la partición $\pi = \{a,b\}$, entonces

$$\underline{S}_\pi = f(x_i)(b-a) < \int_a^b f(x)dx < f(x_s)(b-a) = \bar{S}_\pi.$$

Definamos la función auxiliar $g:[x_i,x_s]\to\mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x)(b-a) - \int_a^b f(x)dx.$$

Claramente, $g(x_i) < 0$, y $g(x_s) > 0$, con lo cual podemos aplicar Bolzano (f es continua, la multiplicamos por una contante, y le restamos otra constante, así que g es continua) y queda que existe $c\in[x_i,x_s]\subset[a,b]$ tal que

$$0 = g(c) = f(c)(b-a) - \int_a^b f(x)dx,$$

y el teorema queda demostrado. □

Teorema 2.3.2 (Regla de Barrow)**.** *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, y sea $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $F'=f$ en $[a,b]$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demostración. Tomemos una partición $\pi = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ del intervalo, y escribamos

$$\begin{aligned}
F(b)-F(a) &= F(b) - \Big(F(x_{n-1}) - F(x_{n-1})\Big) - \cdots - \Big(F(x_1) - F(x_1)\Big) - F(a) &(3.1)\\
&= \Big(F(b) - F(x_{n-1})\Big) + \Big(F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\Big) + \cdots + \Big(F(x_1) - F(a)\Big) &(3.2)\\
&= f(c_n)(b-x_{n-1}) + f(c_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2}) + \cdots + f(c_1)(x_1-a) &(3.3)\\
&= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta_k. &(3.4)
\end{aligned}$$

¿Qué hicimos? Lo siguiente:

- En (3.1) sumamos y restamos F evaluada en los puntos intermedios.
- En (3.2) reagrupamos los términos.
- En (3.3) usamos el Teorema de valor medio (de Lagrange) y que $F'=f$.
- En (3.4) lo reescribimos para que parezca una suma de Riemann.

Observemos que para $1 \leq k \leq n$ tenemos

$$m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \leq f(c_k) \leq \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = M_k,$$

con lo cual

$$\underline{S}_\pi = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta_k \leq F(b) - F(a) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta_k = \bar{S}_\pi.$$

Tomando infimos y supremos sobre las particiones π, como sabemos que f es integrable,

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_\pi \underline{S}_\pi \leq F(b) - F(a),$$

$$\int_a^b f(x)dx = \inf_\pi \bar{S}_\pi \geq F(b) - F(a),$$

con lo cual $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. $\square$

Teorema 2.3.3 (Continuidad). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a,b]$.*

Demostración. Como f es acotada en $[a,b]$, existe M tal que $|f(t)| \leq M$. Ahora, si $x > y$,

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt\right| = \left|\int_y^x f(t)dt\right| \leq \int_y^x |f(t)|dt \leq M|x-y|,$$

con lo cual si $\delta = \varepsilon/M$, tenemos $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$ cuando $|x-y| < \delta$.

El caso $y > x$ es igual:

$$|F(x) - F(y)| = |F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq M|y-x|.$$

Listo. $\square$

Teorema 2.3.4 (Fundamental del cálculo). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable, y*

$$F'(x) = f(x).$$

Demostración. Calculemos el cociente incremental, y apliquemos el Teorema de valor medio 2.3.1 para $h > 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \cdot \left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \cdot f(c_h) \cdot h \\
&= \lim_{h\to 0^+} f(c_h)
\end{aligned}$$

donde $x < c_h < x+h$. Ahora, por sandwich,

$$x = \lim_{h\to 0^+} x \leq \lim_{h\to 0^+} c_h \leq \lim_{h\to 0^+} x + h = x,$$

y como f es continua,

$$\lim_{h\to 0^+} f(c_h) = f(x).$$

El caso $h < 0$ es idéntico. $\square$

2.4. Continua implica integrable

En el Teorema de Fubini 3.1.1 usamos que una función continua es integrable. El resultado es cierto en dominios cerrados y acotados de R^N, pero por comodidad sólo lo demostraremos en $\mathbb{R}$.

Teorema 2.4.1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces, f es integrable Riemann.*

Demostración. Para la demostración necesitamos usar los siguientes resultados:

- Si f no es integrable Riemann, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda partición π se tiene
$$\varepsilon < \bar{S}_\pi - \underline{S}_\pi.$$
- Si f es continua, alcanza su mínimo y su máximo valor en un intervalo cerrado y acotado.
- Toda sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ acotada tiene una subsucesión convergente.
- Si f es continua, y una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge a x, entonces
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Vamos a suponer que f no es integrable, y por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda partición π se cumple
$$\varepsilon < \bar{S}_\pi - \underline{S}_\pi.$$
Para este valor de ε, construiremos una sucesión de intervalos $[x_n, y_n]$, tales que
$$\varepsilon < \sup_{x\in[x_n,y_n]} f(x) - \inf_{x\in[x_n,y_n]} f(x).$$
Esta es la parte difícil. Veamos cómo construirlos.

1.- Como $\varepsilon < \bar{S}_\pi - \underline{S}_\pi$ para cualquier partición, tomando la partición $\pi_0 = \{a,b\}$ (*no* partir el intervalo es una partición...), tenemos
$$\varepsilon < \sup_{x\in[a,b]} f(x)(b-a) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)(b-a).$$
Tomamos c el punto medio de $[x_0,y_0] = [a,b]$, y la nueva partición $\pi_1 = \{a,c,b\}$. Ahora,
$$\begin{aligned}\varepsilon &< \Big(\sup_{x\in[a,c]} f(x)(c-a) + \sup_{x\in[c,b]} f(x)(b-c)\Big)\\ &\qquad - \Big(\inf_{x\in[a,c]} f(x)(c-a) + \inf_{x\in[c,b]} f(x)(b-c)\Big)\\ &= \Big(\sup_{x\in[a,c]} f(x)(c-a) - \inf_{x\in[a,c]} f(x)(c-a)\Big)\\ &\qquad + \Big(\sup_{x\in[c,b]} f(x)(b-c) - \inf_{x\in[c,b]} f(x)(b-c)\Big)\end{aligned}$$
Ahora, uno de los dos paréntesis debe ser mayor a $\varepsilon/2$, porque si los dos fuesen menores o iguales a $\varepsilon/2$, la suma sería menor o igual a ε (y sabemos que es mayor). Entonces, se cumple una de las dos
$$\frac{\varepsilon}{2} < \Big(\sup_{x\in[a,c]} f(x) - \inf_{x\in[a,c]} f(x)\Big)\frac{(b-a)}{2},$$

$$\frac{\varepsilon}{2} < \Big(\sup_{x\in[c,b]} f(x) - \inf_{x\in[c,b]} f(x) \Big) \frac{(b-a)}{2}.$$

Llamemos $[x_1, y_1]$ al intervalo que cumpla, sea $[a,c]$ ó $[c,b]$. Observemos que en cualquiera de los dos casos, $y_1 - x_1 = \frac{(b-a)}{2}$. Por lo tanto, en este intervalo se cumple

$$\frac{\varepsilon}{2} < \Big(\sup_{x\in[x_1,y_1]} f(x) - \inf_{x\in[x_1,y_1]} f(x) \Big)(y_1 - x_1)$$

es decir,

$$\frac{\varepsilon}{2} < \Big(\sup_{x\in[x_1,y_1]} f(x) - \inf_{x\in[x_1,y_1]} f(x) \Big) \frac{(b-a)}{2}.$$

2.- Para construir el intervalo $[x_n, y_n]$, dividimos $[a,b]$ en n partes iguales, con la partición $\pi_n = \{a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b\}$, y tenemos

$$\varepsilon < \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in[c_{k-1},c_k]} f(x)(c_k - c_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in[c_{k-1},c_k]} f(x)(c_k - c_{k-1}).$$

Reordenando la suma como antes,

$$\varepsilon < \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{x\in[c_{k-1},c_k]} f(x) - \inf_{x\in[c_{k-1},c_k]} f(x) \Big)(c_k - c_{k-1}),$$

alguno de los n sumandos debe ser mayor a ε/n (si todos fueran menores o iguales a ε/n, la suma total sería menor o igual a ε).

Entonces, tenemos un intervalo $[c_{j-1}, c_j]$ que llamaremos $[x_n, y_n]$, tal que

$$\frac{\varepsilon}{n} < \Big(\sup_{x\in[c_{j-1},c_j]} f(x) - \inf_{x\in[c_{j-1},c_j]} f(x) \Big) \frac{(b-a)}{n}.$$

3.- En cada intervalo $[x_n, y_n]$, la desigualdad anterior implica

$$\frac{\varepsilon}{b-a} < \sup_{x\in[x_n,y_n]} f(x) - \inf_{x\in[x_n,y_n]} f(x) = f(x_{s_n}) - f(x_{i_n}),$$

donde x_{s_n}, $x_{i_n} \in [x_n, y_n]$ son los puntos donde f alcanza su máximo y su mínimo valor en $[x_n, y_n]$ (como es continua, el supremo es un máximo, el ínfimo es un mínimo)

$$f(x_{s_n}) = \sup_{x\in[x_n,y_n]} f(x), \qquad f(x_{i_n}) = \inf_{x\in[x_n,y_n]} f(x)$$

4.- Como $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset [x_n, y_n]$, es acotada, y por lo tanto tiene una subsucesión convergente, $\{x_{n_j}\}_{j\geq 1}$,

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x,$$

y el otro borde también converge al mismo x, pues

$$y_{n_j} = x_{n_j} + \frac{b-a}{n_j}.$$

Además,

$$x_{n_j} \leq x_{s_{n_j}} \leq y_{n_j}, \qquad x_{n_j} \leq x_{i_{n_j}} \leq y_{n_j},$$

y por sandwich,
$$\lim_{j\to\infty} x_{s_{n_j}} = \lim_{j\to\infty} x_{i_{n_j}} = x$$

5.- Como f es continua,
$$\lim_{j\to\infty} f(x_{s_{n_j}}) = f(x) = \lim_{j\to\infty} f(x_{i_{n_j}}),$$
equivalentemente (álgebra de límites):
$$\lim_{j\to\infty} \Big(f(x_{s_{n_j}}) - f(x_{i_{n_j}}) \Big) = 0,$$
lo cual es absurdo pues valía para todo j que $f(x_{s_{n_j}}) - f(x_{i_{n_j}}) > \varepsilon$.

El absurdo provino de suponer que f no era integrable. $\square$

Supongamos que uno entiende qué quiere decir que f sea uniformemente continua. En ese caso, hay una demostración tradicional, alternativa, que veremos a continuación.

Definición 2.4.2. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Decimos que f es *uniformemente continua* en (a,b) si para todo $\varepsilon > 0$ existe δ (que sólo depende de ε) tal que, si $|x-y| < \delta$, entonces
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ejercicio 2.4.3. Compare con la definición de continuidad, y encuentre todas las diferencias.

Teorema 2.4.4. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces, f es uniformemente continua en $[a,b]$.*

Demostración. Fea. $\square$

La siguiente demostración parecerá más sencilla, pero es sólo porque omitimos la parte repugnante del asunto, la demostración del teorema 2.4.4.

Necesitaremos además los siguientes resultados:

- Si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $\pi = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ tal que
$$\bar{S}_\pi - \underline{S}_\pi < \varepsilon,$$
entonces f es integrable.
- Si π, π' son dos particiones tal que todo punto de π pertenece a π', entonces
$$\underline{S}_\pi \le \underline{S}_{\pi'} \le \bar{S}_{\pi'} \le \bar{S}_\pi.$$

Teorema 2.4.5. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces, f es integrable Riemann.*

Demostración. La demostración consiste en fijar un $\varepsilon > 0$ arbitrario, y hallar una partición $\pi = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ tal que
$$\bar{S}_\pi - \underline{S}_\pi < \varepsilon.$$

Como f es continua, el Teorema 2.4.4 nos garantiza que es uniformemente continua. Entonces, existe un δ tal que si $|x-y| < \delta$ entonces
$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Tomemos una partición π tal que $\Delta x_j < \delta$. Entonces, como f es continua, existen x_{s_j}, $x_{i_j} \in [x_{j-1}, x_j]$, los puntos donde f alcanza su máximo y su mínimo valor en $[x_{j-1}, x_j]$ (como es continua, el supremo es un máximo, el ínfimo es un mínimo).

Dado que ambos puntos están en un intervalo de longitud menor a δ, tenemos $|x_{s_j} - x_{i_j}| < \delta$, y entonces

$$|f(x_{s_j}) - f(x_{i_j})| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\bar{S_\pi} - \underline{S}_\pi &= \sum_{j=1}^{n} f(x_{s_j}) \cdot \Delta x_j - \sum_{j=1}^{n} f(x_{i_j}) \cdot \Delta x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(f(x_{s_j}) - f(x_{i_j}) \right) \cdot \Delta x_j \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \Delta x_j \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{j=1}^{n} \Delta x_j \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como ε era arbitrario, para cualquiera podemos encontrar una partición tal que $\bar{S}_\pi - \underline{S}_\pi < \varepsilon$, y por lo tanto, f es integrable. $\square$

Capítulo 3

Integración en varias variables

Omitimos la definición de integral de Riemann, análoga a la de una variable, sólo que partimos en rectángulos en lugar de intervalos.

3.1. Teoremas principales

Teorema 3.1.1 (Teorema de Fubini)**.** *Sea $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces,*

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Demostración. Veamos la primera igualdad. Para eso, tomemos una partición de $[c,d]$,

$$\pi_y = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\},$$

y definamos, para x fijo,

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy.$$

Por la aditividad de la integral, más el teorema de valor medio,

$$F(x) = \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy = \sum_{j=1}^m f(x,\bar{y}_j(x))\Delta y_j$$

(observemos que el punto $\bar{y}_j$ depende de x).

Integremos ahora $F(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe una partición de $[a,b]$,

$$\pi_x = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\},$$

tal que

$$\int_a^b F(x)dx - \sum_{i=1}^n F(\bar{x}_i)\Delta x_i < \varepsilon.$$

Entonces,

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j(\bar{x}_i))\Delta y_j \Delta x_i < \varepsilon.$$

Por otra parte, llamando $|Q_{ij}| = \Delta x_i \Delta y_j$ al área del rectángulo $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \min_{(x,y)\in Q_{i,j}} f(x,y)|Q_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\bar{x}_i, \bar{y_j}(\bar{x}_i))\Delta y_j \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \max_{(x,y)\in Q_{i,j}} f(x,y)|Q_{ij}|.$$

Como f es continua, es integrable, y refinando la partición, ambos extremos difieren de la integral $\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dA$ en menos de ε, con lo cual

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dA - \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx < 2\varepsilon,$$

pero ε es arbitrario, y podemos tomarlo arbitrariamente chico. Entonces,

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

La otra igualdad se prueba de la misma forma, definiendo primero $F(y)$, etcétera. □

3.2. Una aplicación

Un resultado importante es el siguiente:

Teorema 3.2.1. *Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua. Si $f(P) > 0$, existe un radio $r > 0$ tal que $f > 0$ en la bola de centro P y radio r.*

Demostración. Sea $a = f(P) > 0$. Como f es continua, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(Q) - f(P)| < \varepsilon \qquad si \qquad |P - Q| < \delta.$$

Tomemos $\varepsilon = a/2$, y por la continuidad existe un δ (que será el r buscado) tal que $|P - Q| < \delta$ entonces $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon = a/2$.

Veamos que $f > a/2 > 0$ en la bola de centro y radio r: como

$$-\frac{a}{2} < f(Q) - f(P) < \frac{a}{2}$$

y $f(P) = a$,

$$-\frac{a}{2} < f(Q) - a < \frac{a}{2}$$

sumando a

$$a - \frac{a}{2} < f(Q) < a + \frac{a}{2}$$

con lo cual $f(Q) > a/2 > 0$ y el Teorema queda demostrado. □

Teorema 3.2.2. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y $f(x_0, y_0) > 0$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x,y)dxdy > 0.$$

Demostración. Sea $a = f(x_0, y_0)$. Por el Teorema 3.2.1, existe $r > 0$ tal que $f > a/2$ en el círculo de centro (x_0, y_0) y radio r. Podemos ubicar adentro un cuadrado concéntrico de lado 2δ si su diagonal es menor a $2r$, así que por Pitágoras tenemos

$$2(2\delta)^2 = (2r)^2,$$

y con $\delta = r/\sqrt{2}$ se cumple.

Ahora,

$$\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x,y)dxdy > \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{a}{2}dxdy > \frac{a}{2}\cdot(2\delta)^2 = \frac{a}{2}\cdot\frac{4r^2}{2} = ar^2 > 0.$$

El teorema queda demostrado. $\square$

Ahora sí, una demostración que vale la pena:

Teorema 3.2.3 (Schwarz)**.** *Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase C^2. Entonces, las derivadas segundas conmutan (es decir, $f_{xy} = f_{yx}$).*

Demostración. Definamos una función auxiliar,

$$g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

y veamos que $g \equiv 0$. Si no lo es, supongamos que $g(x_0,y_0) > 0$. Entonces, existe un rectángulo $[a,b]\times[c,d]$ donde g es estrictamente positiva, y por lo tanto su integral es positiva.

Luego,

$$\begin{aligned} 0 < \int_a^b\int_c^d g(x,y)dxdy &= \int_a^b\int_c^d \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] dxdy \\ &= \int_c^d\left[\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\right]dy - \int_a^b\left[\int_c^d \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dy\right]dx, \end{aligned}$$

usando la linealidad de la integral y Fubini.

Veamos la primera integral. Como $\partial f/\partial y$ es una primitiva, tenemos

$$\int_c^d\left[\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\right]dy = \int_c^d\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|_a^b\right]dy = \int_c^d\left[\frac{\partial f}{\partial y}(b,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,y)\right]dy$$

Ahora, $f(b,y) - f(a,y)$ es una primitiva, y queda

$$\int_c^d\left[\frac{\partial f}{\partial y}(b,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,y)\right]dy = [f(b,y)-f(a,y)]|_c^d = f(b,d)-f(b,c)-f(a,d)+f(a,c).$$

Veamos la segunda integral. Como $\partial f/\partial x$ es una primitiva, tenemos

$$\int_a^b\left[\int_c^d \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dy\right]dx = \int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_c^d\right]dx = \int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,d) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,c)\right]dx$$

Ahora, $f(x,d) - f(x,c)$ es una primitiva, y queda

$$\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,d) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,c)\right]dx = [f(x,d)-f(x,c)]|_a^b = f(b,d)-f(a,d)-f(b,c)+f(a,c).$$

Por lo tanto, las dos integrales son iguales, y llegamos a un absurdo:

$$0 < \int_a^b\int_c^d g(x,y)dxdy = 0;$$

con lo cual no puede ser $g > 0$ en ningún punto. Tampoco puede ser $g < 0$ (la misma demostración), con lo cual

$$0 \equiv g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

y el Teorema queda demostrado, las derivadas segundas son iguales. $\square$

Bibliografía

[1] R. Courant, D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vol. I, Interscience Publishers, Inc., New York, 1953.

Este libro no tiene nada que ver con la materia, pero vale la pena leerlo alguna vez en la vida.

[2] R. Courant, F. John, Introducción al Cálculo y al Analisis Matemático, Ed. Limusa, México.

Este sí tiene que ver con la materia, son dos volúmenes, y cubre análisis en una y varias variables, geometría euclídea, ecuaciones diferenciales y análisis complejo. Tiene algo de algebra lineal y de geometría diferencial.

[3] J. Marsden, A. Tromba. Cálculo vectorial. Addison Wesley, 1991.

Un libro que la mayoría odia cuando cursa, pero admira cuando por fin entendió el análisis en varias variables. O algo así, depende de cada uno.

[4] R. Noriega, Calculo diferencial e integral. Ed. Docencia, 1979.

Un clásico para resultados en una variable.

[5] E. Lages Lima, Curso de análise, volúmenes 1 y 2.

Demasiado teóricos para una primer lectura.

[6] M. Spivak, Calculus (ó Cálculo Infinitesimal, traducido), Vol I y II. Ed. Reverte.

Una variable, bien riguroso. Lindo libro.

[7] N. Piskounov, Cálculo diferencial e integral, tomos I y II. Ed. Mir.

Este vale la pena.

[8] M.R. Spiegel, Cálculo superior (ó Advanced Calculus, original). Serie Shaum.

Ejercicios para todos y todas.

[9] Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo: Análisis Matemático, Vol. I y II. Ed. Kapelusz.

Acá va a encontrar absolutamente todo. Bueno, está todo, no se si lo va a encontrar.

[10] T. Apostol: Calculus, Vol. I y II. Editorial Reverte.

Lindo libro, incluye una y varias variables, algo de álgebra lineal, y ecuaciones diferenciales.