Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2012
SOLUCIONES DÉBILES

1. Consideremos el siguiente operador elíptico

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + cu.$$

donde $\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$.

Probar que existe una constante $\mu > 0$ tal que la correspondiente forma bilineal $B[\ ,\ ]$ satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram si $c(x) \geq -\mu$ $(x \in \Omega)$.

2. Una función $u \in H_0^2(\Omega)$ se dice una solución débil del siguiente problema de valores de contorno para el operador *bilaplaciano*

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

si verifica

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

para toda $v \in H_0^2(\Omega)$. $(\Delta^2 u = \Delta(\Delta u))$.

(a) Probar que $u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución clásica de (1) si y sólo si es solución débil de (1).

(b) Probar que dada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil de (1).
(Sugerencia: Usar el ejercicio 9 de la práctica de Sobolev para probar que $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ define una norma equivalente a la usual en $H_0^2(\Omega)$)

3. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$ y $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Mostrar que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución del problema de Neumann si y sólo si verifica la siguiente *formulación débil*:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega u\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx$$

para toda $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

(b) Mostrar que para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única $u \in H^1(\Omega)$ solución débil de este problema.

4. Consideremos la siguiente ecuación diferencial elíptica de segundo orden:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j}) + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j} + cu &= f \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde

(a) $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ con $\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega$.

(b) $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$.

(c) $b_j \in L^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ con $\operatorname{div}(\vec{b}) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} b_j = 0$ en Ω.

Probar que para toda $f \in L^2(\Omega)$, existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil del problema.

5. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$ y $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Dar una formulación débil del problema y mostrar que si existe una solución débil, entonces $\int_\Omega f\,dx = 0$.

(b) Mostrar que si $f \in L^2(\Omega)$ verifica que $\int_\Omega f\,dx = 0$, entonces existe una única $u \in H^1(\Omega)$ con $\int_\Omega u\,dx = 0$ solución débil de este problema. Más aún, dicha solución es única en $H^1(\Omega)$ salvo constante.

(Sugerencia: Usar la desigualdad de Poincaré para funciones con promedio 0, ejercicio 11 de la práctica de Sobolev, y usar Lax-Milgram en el subespacio ortogonal a las constantes en $H^1(\Omega)$).

6. *Principio débil del máximo*

Sea $Lu = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i}$ un operador uniformemente elíptico con $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$. Decimos que $u \in H^1(\Omega)$ verifica $Lu \geq 0$ en sentido débil o, equivalentemente, que es una subsolución débil de $Lu = 0$ si

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_j}v_{x_i}\,dx \leq 0, \qquad \text{para toda } v \in H_0^1(\Omega),\ v \geq 0.$$

(a) Verificar que $u \in C^2(\Omega)$ es subsolución débil de $Lu = 0$ si y sólo si $Lu \geq 0$.

(b) Probar que si u es subsolución débil de $Lu = 0$ y $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ (es decir $u \leq 0$ en $\partial\Omega$), se tiene que $u \leq 0$ en Ω.

7. Consideremos el siguiente problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$.

Probar que existe una sucesión $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \nearrow \infty$ de autovalores del problema con autofunciones $u_k \in H^1(\Omega)$ donde $u_1 = cte$ y $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ forman una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ y una base ortogonal de $H^1(\Omega)$.

8. Sea $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq V(x) \to \infty$ si $|x| \to \infty$.

(a) Probar que si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^n)$ es una sucesión acotada, entonces existe una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$f_{k_j} \to f \qquad \text{en } L^2(B_r), \quad \text{para todo } r > 0.$$

(b) Probar que si, además,

$$\|f_k\|^2_{L^2_V(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} f_k^2 V(x)\,dx \leq C \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

entonces $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$f_{k_j} \to f \qquad \text{en } L^2(\mathbb{R}^n).$$

(c) Concluir que $V = H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2_V(\mathbb{R}^n)$ verifica

$$V \subset\subset L^2(\mathbb{R}^n).$$

(d) Probar que existe una suceción $0 \le E_1 \le E_2 \le \cdots \nearrow \infty$ de autovalores de la *ecuación de Schroedinger*

$$-\Delta u + V(x)u = Eu \text{ en } \mathbb{R}^n,$$

$$u \in V,$$

y que las autofunciones forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

9. *Lema de Cea*

Se intenta construir una aproximación de la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Para eso, se toma un subespacio de dimensión finita $V \subset H_0^1(\Omega)$, $V = \langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle$ y se define la *solución aproximada* $\tilde{u} \in V$ como la solución del problema

$$\int_\Omega \nabla\tilde{u}\nabla\phi_i\,dx = \int_\Omega f\phi_i\,dx \quad i = 1, \dots, n.$$

(a) Probar que $\tilde{u}$ está bien definida (es decir, existe una única solución del problema aproximado).

(b) Probar que se tiene la siguiente *estimación de error*

$$\|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \le C \inf_{v \in V} \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

es decir, el método da la “mejor aproximación” que permite el subespacio V.

10. Sea

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}.$$

Decimos que el operador $u_t + Lu$ es uniformemente parabólico si el operador L es uniformemente elíptico, i.e. existe $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \theta|\xi|^2$$

para todo $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ y $u_0 \in L^2(\Omega)$. Consideremos el siguiente problema parabólico:

$$\begin{cases} u_t + Lu &= 0 & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ u &= u_0 & \text{en } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

(a) Dar una definición adecuada de solución débil y demostrar que si una solución débil es suficientemente regular, entonces es una solución clásica.

(b) Probar que existe una única solución débil.

11. Considerar la siguiente ecuación del calor con condiciones de Neumann

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ u &= u_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

(a) Dar una definición adecuada de solución débil y demostrar que si una solución débil es suficientemente regular, entonces es una solución clásica.

(b) Probar que existe una única solución débil.